


Date Due
Demco 293-5

ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55.

143853-54



ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PAR

LA SECTION DE GÉOMÉTRIE

TOME IX

PUBLIÉ AVEC LA COLLABORATION

DE

GÉRARD PETIAU

MAITRE DE RECHERCHES

Préface de M. Louis de Broglie

DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1954

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

PRÉFACE

POUR LES TOMES IX ET X DES ŒUVRES DE HENRI POINCARÉ

Les tomes IX et X de la présente publication contiennent les travaux de Henri Poincaré sur la Physique mathématique et sur divers problèmes de théorie physique. Comme à toutes les branches des Mathématiques, comme à la Mécanique générale et à la Mécanique céleste, comme au Calcul des Probabilités, Poincaré a apporté à la Physique mathématique et théorique de son temps des contributions d'une importance capitale portant la marque de l'originalité et de la profondeur d'un esprit extraordinairement puissant dont la capacité de travail était véritablement inouïe.

* * *

Une première catégorie de Mémoires reproduits au début du tome IX est consacrée aux équations différentielles de la Physique mathématique. Poincaré avait beaucoup étudié la théorie du potentiel newtonien et celle de la propagation de la chaleur : il y avait consacré quelques-uns de ses enseignements. Comme il était désireux de faire reposer sur des raisonnements rigoureux l'emploi des solutions envisagées dans ces théories, il a été amené à rechercher la démonstration de difficiles théorèmes d'existence. Ainsi l'on rencontre dans de nombreuses branches de la physique classique le problème qui consiste à déterminer les « vibrations stationnaires » dont un système physique est susceptible : ces vibrations sont solutions d'une équation aux dérivées partielles d'un type en général assez simple avec des conditions aux limites

données qui peuvent d'ailleurs prendre des formes analytiques diverses. L'exemple physique le plus simple d'un cas où se pose le problème mathématique en question est celui de déterminer les sons propres d'un corps élastique vibrant dont la périphérie est soumise à certaines liaisons. Dans la Physique quantique contemporaine, ce genre de problèmes a pris une importance plus grande encore qu'en Physique classique puisque la détermination par la Mécanique ondulatoire des états stationnaires des systèmes quantifiés en relève. Dans le langage actuel des physiciens, chaque vibration stationnaire est caractérisée par une « valeur propre » qui donne la fréquence de cette vibration, la forme même de la vibration étant donnée par la « fonction propre » (ou l'une des fonctions propres) correspondant à cette valeur propre. Du point de vue mathématique, le point difficile est la démonstration de l'existence des valeurs propres. En 1885, Schwarz avait pu démontrer l'existence générale de la première valeur propre ou fréquence fondamentale et Picard avait pu donner une démonstration analogue pour la seconde valeur propre. C'est à Henri Poincaré qu'est revenu l'honneur de donner une démonstration générale de l'existence des valeurs et fonctions propres à l'aide d'une méthode remarquable qui a été comme une préfiguration de la théorie des équations intégrales découverte quelques années plus tard par Fredholm. Dans ces profondes recherches, Poincaré a aussi montré l'importance des séries de fonctions propres et en a justifié l'emploi.

Dans la théorie du potentiel newtonien, on rencontrait un problème célèbre qui au premier abord semblait assez différent du précédent : celui de la détermination de la solution de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ qui satisfait à des conditions aux limites données. Le principe de Dirichlet affirmait l'existence d'une telle solution : Riemann avait cru en donner une démonstration, mais elle n'était pas rigoureuse. Poincaré fut le premier à donner une démonstration rigoureuse du principe de Dirichlet par une méthode un peu longue mais très originale, la méthode du balayage. Puis il orienta ses réflexions sur ce sujet dans une autre voie en s'inspirant des travaux de Neumann : c'est ainsi qu'il parvint à

découvrir une relation profonde, mais assez cachée, entre le problème des vibrations propres et le problème de Dirichlet et qu'il put développer, pour résoudre le second de ces difficiles problèmes, une méthode tout à fait analogue à celle qui lui avait réussi pour le premier. Le Mémoire intitulé « La Méthode de Neumann et le principe de Dirichlet » où il a développé ces remarquables analogies et que l'on trouvera plus loin est considéré à juste titre par M. Hadamard comme l'un des beaux triomphes du génie de Poincaré. Assurément le développement de la théorie des équations intégrales, la considération des espaces fonctionnels et d'autres ressources des mathématiques contemporaines nous ont rendu ces résultats plus familiers et nous en ont fait mieux comprendre la portée : mais Poincaré, qui ne disposait pas des moyens analytiques puissants que peuvent utiliser les mathématiciens d'aujourd'hui, n'a eu que plus de mérite à les apercevoir, il y a plus d'un demi-siècle.

On trouvera aussi dans la première partie du tome IX l'élégante forme que Henri Poincaré a donnée en 1893 de la solution de l'équation des télégraphistes : elle est différente de celle que Picard avait obtenue vers la même époque en appliquant la méthode d'intégration de Riemann.

Un grand nombre de résultats que Henri Poincaré a développés dans ses Mémoires sur les équations différentielles de la Physique mathématique ont été reproduits dans les Ouvrages classiques où ses enseignements ont été recueillis tels que « Théorie du potentiel newtonien », « Théorie analytique de la propagation de la chaleur », « Les oscillations électriques » etc., mais dans le texte même des Mémoires originaux, on en apercevra mieux les détails et l'enchaînement.

*
* *

La seconde partie du tome IX contient des Mémoires ou exposés de Henri Poincaré sur diverses questions de Physique théorique qui étaient alors à l'ordre du jour. Les quatre premiers Mémoires sur la polarisation de la lumière par diffraction, sur la théorie de Larmor

et sur deux aspects de la théorie de Lorentz se trouvent reproduits, sous une forme plus ou moins résumée, dans les ouvrages fameux que Poincaré a consacrés aux théories élastiques ou électromagnétiques de la lumière sous les titres « Théorie mathématique de la lumière » et « Électricité et Optique ». La plupart des résultats contenus dans ces écrits ont aujourd'hui perdu une partie de leur intérêt : la théorie de Larmor est un peu oubliée, celle de Lorentz est devenue classique, l'explication des Effets Zeeman anormaux que Poincaré ne pouvait obtenir a été plus tard fournie par l'introduction de notions nouvelles telles que le spin de l'électron. Néanmoins les Mémoires de Poincaré d'une admirable clarté ont conservé, du point de vue de l'histoire des Sciences, une très grande valeur. On ne saurait, en particulier, oublier qu'en insistant sur le fait qu'en théorie de Lorentz, le principe de la conservation de l'impulsion ne paraissait pas vérifié, il a amené Max Abraham à introduire la notion si importante de quantité de mouvement du rayonnement et à rétablir ainsi la conservation de l'impulsion.

Le célèbre Mémoire de Poincaré sur la Dynamique de l'Électron paru en 1906 dans les Rendiconti du Cercle mathématique de Palerme, après avoir été résumé dans une Note aux Comptes rendus, est encore aujourd'hui bien intéressant à relire. Commentant la transformation de Lorentz et les conceptions de l'illustre physicien hollandais sur la contraction des corps en mouvement et sur le temps local, Henri Poincaré a développé d'une façon complète la nouvelle dynamique de l'électron qui en découlait : il l'a rattachée à la théorie du rayonnement électromagnétique que Paul Langevin venait de préciser dans un beau travail et il a comparé les diverses hypothèses que l'on pouvait faire sur la structure de l'électron et sa déformation résultant de son mouvement. Poincaré établissait ainsi sur des bases solides la nouvelle dynamique relativiste de l'électron qui a encore à l'heure actuelle tant d'applications : il accomplissait ainsi une œuvre capitale, mais en même temps, peut-être parce qu'il était plus analyste que physicien, il n'apercevait pas le point de vue général appuyé sur une critique très

fine de la mesure des distances et des durées que le jeune Albert Einstein venait de découvrir dans une géniale intuition et qui le conduisait à une transformation complète de nos idées sur l'espace et sur le temps. Poincaré n'a pas franchi ce pas décisif, mais il est, avec Lorentz, celui qui a le plus contribué à le rendre possible. Notons un point capital du Mémoire de Poincaré : la découverte du fait qu'un électron conçu à la façon de Lorentz, n'est pas stable sous l'action des seules forces électromagnétiques, que sa stabilité exige l'intervention d'une autre force, de nature inconnue, dérivant d'un potentiel proportionnel au volume de l'électron. Cette « pression de Poincaré » qui peut s'interpréter comme indiquant le caractère incomplet de notre conception usuelle du champ électromagnétique, a gardé à l'heure présente toute son importance et il en est souvent question dans les travaux les plus récents sur la structure de l'électron. Ce fut là de la part du grand mathématicien une importante découverte d'ordre physique.

Les réflexions de Henri Poincaré sur la théorie cinétique des gaz sont encore aujourd'hui hautement instructives à relire. Sa distinction entre l'entropie grossière et l'entropie fine, son analyse de l'établissement des états d'équilibre dans un gaz à une dimension et dans un gaz à trois dimensions ont apporté d'importantes contributions à l'épineuse question de la justification complète par la Mécanique statistique de l'irréversibilité des phénomènes thermodynamiques. Cette question sur laquelle Poincaré est revenu dans une Note consacrée à l'entropie que l'on trouvera dans le tome X a été depuis lors bien des fois réexaminée du point de vue classique comme du point de vue quantique sans qu'on puisse dire qu'elle ait été définitivement épuisée ou éclaircie.

Le tome IX se termine par quatre exposés relatifs à la théorie des Quanta de Planck : une Note aux Comptes rendus, un Mémoire paru dans le Journal de Physique où les mêmes calculs sont beaucoup plus complètement développés, enfin deux conférences de vulgarisation sur le même sujet déjà publiées dans le livre intitulé : « Dernières pensées » dans la Collection de Philosophie scientifique (Flammarion). Poincaré, dont l'attention avait été attirée sur la théorie de Planck au cours de sa

participation au Conseil de Physique Solvay d'octobre 1911, a montré, en s'appuyant principalement sur la théorie du dernier multiplicateur, que la loi du rayonnement de Planck est incompatible avec les conceptions classiques de la Mécanique et de l'Électromagnétisme et qu'elle implique nécessairement une discontinuité analogue à celle que postule la théorie de Planck. Historiquement les conclusions de Poincaré ont joué un grand rôle dans le développement de la théorie des Quanta en montrant que les faits expérimentaux traduits par la loi réelle de distribution spectrale de l'énergie dans le rayonnement noir impose l'existence d'une discontinuité quantique. Les calculs du grand géomètre et les commentaires qu'il en a lui-même donnés méritent toujours d'être médités par ceux qui cherchent à découvrir la véritable nature, aujourd'hui encore bien mystérieuse, d'une découverte dont les développements ont été depuis lors aussi étendus qu'imprévus.

*
* *

Le tome X contiendra d'abord des travaux de Poincaré sur la théorie des oscillations hertziennes et de leur propagation. Contemporain de la découverte de Hertz, Poincaré s'est beaucoup intéressé à toutes les questions qui la concernent. Il a rédigé sur ce sujet plusieurs Notes que l'on trouvera au début du tome X : il en a incorporé les résultats dans l'exposé d'ensemble qu'il a publié sous le titre « Les oscillations électriques » en 1894. Il a beaucoup étudié la diffraction des ondes hertziennes et notamment ses effets sur leur propagation à la surface d'une sphère conductrice analogue au globe terrestre : le problème qui est d'un haut intérêt pour la Radiotélégraphie a donné lieu à de très nombreux travaux et à d'assez vives controverses qui ne sont pas toutes terminées aujourd'hui. Les recherches de Henri Poincaré à ce sujet, bien qu'ayant elles aussi aussi été l'objet de critiques, ont beaucoup contribué à permettre de poser la question d'une manière rationnelle.

Le tome X reproduira ensuite toute une série de discussions et de controverses sur divers problèmes de Physique théorique servant en général de compléments à des Mémoires ou à des Livres antérieurement publiés par l'auteur. Elles portent sur les sujets les plus variés :

élasticité, thermodynamique, théorie cinétique des gaz, optique, électromagnétisme, rayons X et rayons cathodiques, etc. Nous n'insisterons pas sur le détail de ces publications car la plupart des questions qui y sont traitées sont aujourd'hui périmées ou définitivement tranchées. On les lira cependant avec intérêt car on y verra revivre l'activité intellectuelle de Henri Poincaré théoricien de la Physique, souvent aux prises avec des difficultés ou des objections.

Poincaré n'a pas négligé de s'intéresser aussi à des questions de Physique appliquée. Théoricien des ondes hertziennes et des électrons, il a fait des exposés les concernant à l'usage des élèves ingénieurs de l'École supérieure des Postes et Télégraphes. Il a étudié les dispositifs employés par la Télégraphie sans fil alors à ses débuts ainsi que les principes de leur fonctionnement, notamment dans un intéressant petit Ouvrage de la collection Scientia. On trouvera aussi dans le tome X une étude de Poincaré sur les récepteurs téléphoniques et une autre sur la théorie de la commutation en Électrotechnique. Ainsi, à certaines branches de la technique, Poincaré a su apporter des contributions qui ont été à l'origine de beaucoup de développements ultérieurs.

*
* *

Il paraît bien naturel que Henri Poincaré, mathématicien de génie, ait fait réaliser de grands progrès aux méthodes de la Physique mathématique et à l'étude des équations qu'elle utilise. Mais, en joignant l'intuition physique à la rigueur abstraite, il a su aussi, fait assez rare chez les grands géomètres, faire réaliser de véritables progrès aux théories physiques de son époque en leur apportant des conceptions et des résultats nouveaux. Il a même réussi parfois, nous venons de le voir, à apporter une aide efficace aux techniciens.

Comme celles qu'il avait effectuées dans d'autres branches de la Science ou en philosophie scientifique, l'Œuvre de Poincaré en Physique mathématique et théorique restera un monument d'une impérissable grandeur.

1er janvier 1954.

Louis de BROGLIE.

AVANT-PROPOS

Dans l'Analyse de ses travaux scientifiques rédigée en 1901 et dont la Cinquième partie est reproduite au début de ce volume, Henri Poincaré avait classé ses publications de Physique mathématique en trois groupes : XXIII. *Équations différentielles de la Physique mathématique;* XXIV. *Critique des théories physiques;* XXV. *Oscillations hertziennes.*

Pour tenir compte de ses nombreux travaux ultérieurs, nous avons été amené à modifier en partie cette classification en répartissant l'ensemble des publications de H. Poincaré relatives à la Physique mathématique et à la Physique théorique en quatre groupes : XXIII, XXIV_1, XXV, XXIV_2.

Les mémoires rangés dans le groupe : XXIII. *Équations différentielles de la Physique mathématique* sont tous inclus par H. Poincaré dans la partie correspondante de sa classification.

Dans le groupe : XXIV_1. *Théories physiques,* nous avons placé les importants travaux de Physique théorique dans lesquels Henri Poincaré a développé une œuvre essentiellement créatrice dont l'influence sur l'évolution de la physique a été considérable.

Suivant H. Poincaré, nous avons séparé et rangé dans le groupe : XXV. *Oscillations hertziennes,* ses travaux portant sur les caractères et le calcul des conditions de la propagation des ondes hertziennes. Sont insérés dans ce groupe, non seulement les Mémoires indiqués par H. Poincaré, mais aussi l'importante série de Notes et d'articles dans lesquels il a plus tard étudié le problème de la diffraction des ondes hertziennes par la Terre.

Nous avons réuni dans le groupe : XXIV_2. *Critiques, discussions et exposés sur les théories physiques*, les remarques, articles de discussion ou de mise au point, conférences, ... par lesquels H. Poincaré est intervenu activement dans l'évolution historique de la Physique. Un certain nombre de ses publications portent sur des polémiques aujourd'hui oubliées, mais elles sont extrêmement démonstratives de l'importante contribution apportée par H. Poincaré au mouvement scientifique de la fin du XIX[e] et du début du XX[e] siècle.

Les publications des groupes XXIII et XXIV_1 sont insérées dans le Tome IX, celles des groupes XXV et XXIV_2 dans le Tome X.

ANALYSE

DE SES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

FAITE PAR H. POINCARÉ.

Acta mathematica, t. 38, p. 116-125 (1921).

CINQUIÈME PARTIE. — PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

XXIII. — Équations Différentielles de la Physique Mathématique (107, 109, 113, 141, 142, 143, 144, 146, 151, 156, 174, 185, 190, 195, 200, 220, 293, 295).

Dans beaucoup de problèmes de Physique mathématique on rencontre des équations aux dérivées partielles du second ordre qui appartiennent toutes à peu près au même type et dont la plus simple est la célèbre équation de Laplace $\Delta u = 0$.

Ces problèmes qui conduisent ainsi à des équations identiques ou presque identiques appartiennent cependant aux branches de la Physique les plus diverses. On rencontre ces équations en électrostatique, en magnétisme, en électrodynamique, dans la théorie de la propagation de la chaleur, dans celle de l'élasticité, en Optique, en Hydrodynamique. On les rencontre en Mécanique, dans la théorie du potentiel newtonien; et j'ajouterai enfin qu'elles

jouent un rôle capital en Analyse pure et servent de fondement à la théorie des fonctions analytiques.

La plus importante de ces équations est, comme je l'ai dit, l'équation de Laplace qui est l'équation fondamentale de la théorie de l'attraction newtonienne, de l'électrostatique, du magnétisme et de l'hydrodynamique. Dans d'autres questions, on a à envisager des équations un peu plus compliquées telles que :

$$\Delta u = ku, \qquad \Delta u = k\frac{du}{dt}, \qquad \Delta u = k\frac{d^2 u}{dt^2}.$$

Enfin en optique, en élasticité, on trouve des systèmes de trois équations à trois inconnues où figure encore le Laplacien Δ.

Nous parlerons plus loin dans une question d'Analyse pure, d'une équation analogue, mais plus compliquée

$$\Delta u = e^u.$$

Mais ce n'est pas seulement par la forme des équations que ces problèmes diffèrent entre eux, c'est surtout par les conditions aux limites. Tantôt la fonction inconnue u est assujettie à prendre des valeurs données sur une surface fermée; tantôt on se donne sur cette surface la dérivée normale $\frac{du}{dn}$, ou bien une relation entre u et $\frac{du}{dn}$.

Ces problèmes ont été envisagés à plusieurs points de vue différents. Tantôt on a cherché seulement à démontrer qu'ils sont possibles et à établir en ce qui les concerne des « *théorèmes d'existence* ».

Pour ces théorèmes d'existence eux-mêmes, on s'est quelquefois contenté de démonstrations par à peu près et à demi intuitives, dont le type est ce qu'on appelle le *principe* de Dirichlet. Ces aperçus, dépourvus de véritable valeur mathématique, sont cependant de nature à satisfaire le physicien parce qu'ils laissent en évidence, pour ainsi dire, le mécanisme physique du phénomène. Ils sont généralement fondés sur la considération d'une intégrale définie simple ou multiple qui ne pouvant s'annuler doit admettre un minimum.

D'autres fois, on s'est préoccupé de démontrer rigoureusement ces théorèmes d'existence et pour cela on a imaginé des procédés d'approximations successives dont on pouvait établir la convergence. Cette convergence est en général trop lente et les approximations trop compliquées pour que l'on puisse y voir autre

chose qu'un moyen de démonstration et pour que le calcul effectif soit possible.

Enfin on a cherché à résoudre ces problèmes au moyen de séries procédant suivant certaines fonctions que l'on peut appeler *harmoniques*, parce que la représentation d'un phénomène quelconque par une pareille série est analogue à la décomposition d'un son complexe en ses harmoniques. Les types de ces séries sont la série de Fourier, celle de Laplace qui procède suivant les fonctions sphériques, et les diverses séries considérées par Fourier dans l'étude du refroidissement des corps solides.

Dans l'application de cette méthode, on rencontre plusieurs difficultés successives. Il faut d'abord démontrer l'existence des fonctions harmoniques, ce qui se fait comme pour les autres théorèmes d'existence, par les procédés dont je viens de parler. On doit ensuite calculer les coefficients des séries, ce qui généralement est facile. Il reste enfin à démontrer la convergence de la série et l'on a alors une difficulté grave à surmonter.

Tels sont les différents points de vue auxquels j'ai dû envisager successivement tous ces problèmes.

Je me suis occupé d'abord de l'équation de Laplace. La théorie de cette équation est intimement liée à celle du potentiel. Mais les propriétés du potentiel n'avaient pas toujours été démontrées ni avec assez de généralité, ni avec assez de rigueur. Je m'en suis aperçu quand j'ai voulu les enseigner et aussi quand j'ai voulu les appliquer à des questions d'Analyse. J'ai cherché [295] à perfectionner ces démonstrations et j'ai eu besoin également [190] de les étendre à l'espace à plus de trois dimensions.

En ce qui concerne l'équation de Laplace, bien des méthodes avaient déjà été proposées en vue de la démonstration rigoureuse du théorème d'existence. Les principales étaient celles de Schwarz et de Neumann. J'en ai proposé une troisième, entièrement nouvelle [107, 200] et qui est connue aujourd'hui sous le nom de méthode du *balayage*. Elle présente, comme méthode de démonstration, l'avantage de la généralité et elle permet de supprimer certains intermédiaires. En revanche elle semble, moins que celle de Neumann, susceptible de s'approprier au calcul numérique.

L'élégante méthode de Neumann ne paraissait applicable qu'aux surfaces convexes. J'ai reconnu [151, 185] qu'elle était beaucoup plus générale, j'ai montré rigoureusement qu'elle s'appliquait à toutes les surfaces simplement connexes et j'ai fait voir qu'elle était probablement applicable à une surface

tout à fait quelconque; c'est ce qui a d'ailleurs été confirmé depuis. Je suis malheureusement obligé d'admettre le principe de Dirichlet qu'il faut établir d'abord par exemple par la méthode du balayage, de sorte que la démonstration doit se faire en deux temps.

Les mêmes principes peuvent s'étendre au problème de l'équilibre d'un corps élastique qui est beaucoup plus compliqué puisqu'il y entre trois équations à trois inconnues. J'ai montré [156] qu'on pouvait résoudre ce problème par une méthode tout à fait analogue à celle de Neumann. Je n'ai pas néanmoins développé cette idée et au lieu de démontrer rigoureusement la convergence du procédé, je me suis borné à un aperçu, analogue au « principe de Dirichlet », qui, il est vrai, n'est pas suffisamment rigoureux, mais qui ne permet pas de douter sérieusement du résultat.

Je suis revenu à diverses reprises sur le problème de Fourier relatif aux lois du refroidissement des corps solides. Dans mes premiers Mémoires, je me suis placé plutôt au point de vue du physicien et j'ai montré l'existence des fonctions harmoniques par des aperçus analogues au principe de Dirichlet [109, 113, 200]. C'est à ce même point de vue que je me suis placé le plus souvent dans mon enseignement [293].

C'est seulement plus tard [143, 220] que j'ai donné une démonstration rigoureuse de ces théorèmes d'existence. L'équation est la même que celle des vibrations d'une membrane. M. Schwarz avait démontré l'existence de la première harmonique, M. Picard celle de la seconde. J'ai démontré d'une façon plus simple l'existence de toutes les harmoniques. La méthode de démonstration, toujours fondée sur la considération de certaines intégrales si heureusement introduites par M. Schwarz, repose en outre sur l'étude d'une certaine fonction méromorphe d'un paramètre auxiliaire. En multipliant cette fonction par un polynome convenable, on fait disparaître quelques-uns de ces pôles; le cercle de convergence s'étend et l'on peut aborder l'étude d'harmoniques d'ordre de plus en plus élevé.

Cette méthode ne s'applique pas seulement au problème du refroidissement et à celui des membranes. J'ai dit plus haut comment j'avais abordé l'étude de l'équation de Laplace par la méthode de Neumann et celle de l'équilibre des corps élastiques. Dans cette double étude je me suis encore servi des intégrales de Schwarz et de la fonction méromorphe auxiliaire dont je viens de parler.

Mais on peut encore employer les mêmes procédés dans des questions bien différentes. Je m'en suis servi, par exemple, pour étudier l'équilibre et le

mouvement des mers [146, 195]. Dans le problème statique, par exemple, qui est sensiblement réalisé dans les marées à longue période, on rencontre, si l'on veut tenir compte de l'influence de la forme des continents, des fonctions harmoniques analogues aux fonctions sphériques et dont l'existence peut encore se démontrer par les mêmes méthodes. Le problème dynamique, tel qu'on doit le traiter pour les marées à courte période, présente évidemment plus de difficultés. Il se simplifierait si l'on pouvait négliger la force de Coriolis. L'équation où on serait ramené serait encore celle des vibrations d'une membrane dont la tension et la densité seraient variables. Si l'on tient compte de la force de Coriolis, tout devient plus complexe. Les intégrales de Schwarz doivent être remplacées par d'autres intégrales plus compliquées, quoique analogues; mais la marche générale du calcul reste la même.

Une équation de même forme $\Delta u = e^u$ peut encore être traitée de la même manière. Ce n'est plus cette fois en vue d'applications physiques, mais en vue d'applications analytiques. J'ai dit plus haut quelle était l'importance de cette équation dans la théorie des fonctions fuchsiennes. M. Picard l'a intégrée le premier. La méthode que j'ai proposée est entièrement différente et repose sur des principes analogues à ceux dont je viens de parler. Une difficulté nouvelle se présentait toutefois, c'est que notre équation n'est pas linéaire comme le sont d'ordinaire celles de la Physique mathématique. Ce qui caractérise ma méthode et la distingue de celle de M. Picard, c'est qu'elle embrasse tout de suite la totalité de la surface de Riemann envisagée, tandis que M. Picard considère d'abord un domaine limité, et étend ensuite ses résultats de proche en proche jusqu'à ce qu'ils soient établis pour la surface entière (Vide supra § II).

Une autre équation linéaire aux dérivées partielles a été l'objet de mes recherches [141]. C'est l'équation des télégraphistes, qui par sa forme tient le le milieu entre l'équation des cordes vibrantes et celle de la chaleur. Les résultats aussi sont intermédiaires à ceux que donnent ces deux équations. Dans le cas des cordes vibrantes, l'onde se propage avec une vitesse constante sans se déformer, sans s'étaler, sans envoyer d'avant-garde ni laisser d'arrière-garde. Dans le cas de la chaleur, l'onde s'étale immédiatement sur le fil conducteur tout entier, sans qu'on puisse lui assigner un commencement ou une fin. Dans le cas de l'électricité, la tête de l'onde s'avance régulièrement avec la vitesse de la lumière; mais l'onde laisse derrière elle un résidu, une sorte de queue.

Les conditions à remplir aux limites sont très différentes de celles que nous

avons envisagées jusqu'ici. J'ai pu mettre en évidence les faits que je viens de signaler par une méthode où le rôle principal est joué par la théorie de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires. Je suis revenu sur ce sujet à plusieurs reprises [293, 292].

Mais dans l'étude de ces équations aux dérivées partielles, je me suis également placé au point de vue du développement en séries harmoniques. L'existence des fonctions harmoniques était établie par les théorèmes d'existence dont j'ai parlé plus haut, mais la convergence des séries ne pouvait se démontrer sans difficulté. C'est Cauchy qui a le premier imaginé une méthode générale applicable à un grand nombre de ces séries. J'ai présenté cette méthode de Cauchy sous une forme particulière [293] qui en montre le véritable esprit et qui fait comprendre quels sont les obstacles qu'il reste à vaincre quand on veut l'appliquer à un problème particulier.

Dans le cas du refroidissement de la sphère ou du cylindre, les fonctions harmoniques sont faciles à former puisque ce sont les fonctions bien connues de Bessel. J'ai pu dans ces cas particuliers pousser jusqu'au bout l'application de la méthode de Cauchy [142, 293].

L'une des plus importantes de ces séries est celle de Laplace qui procède suivant les fonctions sphériques. La convergence a été démontrée par Lejeune Dirichlet. J'ai introduit successivement [144, 293] de telles simplifications dans cette démonstration qu'elle devient presque méconnaissable. Je m'appuie sur la convergence de la série de Fourier et sur certaines propriétés des fonctions de variables imaginaires. J'espère que la forme donnée au raisonnement en facilitera l'extension à d'autres problèmes analogues.

J'avais également à traiter la convergence des séries harmoniques que l'on rencontre dans la théorie de la propagation de la chaleur ou dans celle des vibrations d'une membrane. Je me suis contenté d'abord [109, 113, 200] de simples aperçus. Je montrais seulement, par exemple, que l'intégrale du carré de l'erreur commise tendait vers zéro quand on prenait dans la série un plus grand nombre de termes. Un pareil résultat, suffisant pour les applications physiques, ne pouvait satisfaire le mathématicien.

Depuis j'ai obtenu des démonstrations rigoureuses [220]; mais à la condition de faire des hypothèses restrictives sur la fonction à développer. Cela n'a pas d'ailleurs d'importance au point de vue des applications, car on peut toujours trouver une fonction qui satisfasse à ces hypothèses restrictives et qui diffère aussi peu que l'on veut de la fonction donnée.

XXIV. — **Critique des Théories Physiques**

(116, 117, 121, 122, 123, 125, 129, 137, 154, 155, 157, 160, 161, 162, 175, 184, 185, 232, 233, 234, 239, 240, 241, 259, 275, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 293, 294, 298).

Dans le paragraphe précédent, j'ai envisagé pour ainsi dire les problèmes de Physique mathématique; je vais les considérer maintenant par le côté physique.

J'ai publié dans une série de volumes mes cours de Physique mathématique. Je reviendrai sur ces volumes au point de vue de l'enseignement (§ XXXI); j'en parlerai encore à propos des idées philosophiques exposées dans les Préfaces (§ XXIX). Pour le moment, je ne m'occuperai que de l'intérêt qu'ils présentent pour la Physique proprement dite. J'ai été amené à passer en revue les différentes théories physiques et à les soumettre à la critique.

J'ai consacré d'ailleurs au même objet un certain nombre de Notes et d'Articles.

La chaire de Physique mathématique a pour titre officiel : Calcul des Probabilités et Physique mathématique. Ce rattachement peut se justifier par les applications que peut avoir ce calcul dans toutes les expériences de Physique; ou par celle qu'il a trouvées dans la théorie cinétique des gaz. Quoi qu'il en soit, je me suis occupé des probabilités pendant un semestre et mes leçons ont été publiées [294]. La théorie des erreurs était naturellement mon principal but. J'ai dû faire d'expresses réserves sur la généralité de la « loi des erreurs »; mais j'ai cherché à la justifier, dans les cas où elle reste légitime, par des considérations nouvelles. J'ai montré que si l'erreur totale résulte de l'accumulation d'un grand nombre de petites erreurs partielles, si ces dernières suivent des lois quelconques, mais symétriques, l'erreur résultante totale sera soumise à la loi de Gauss.

Je ne m'étendrai pas sur les leçons que j'ai consacrées aux Tourbillons [290] ou à la Capillarité [288]; ce qu'elles peuvent contenir de nouveau intéresse plutôt l'enseignement.

J'ai consacré un volume à la Thermodynamique [291]. Je signalerai seulement dans ce volume la discussion de l'inégalité de Clausius

$$\int \frac{dQ}{T} < 0.$$

La démonstration de cette inégalité avait donné lieu à de longues controverses; j'ai cherché à la mettre à l'abri de toute objection.

Dans la démonstration des théorèmes de Gibbs, on rencontre une difficulté qui avait échappé à plusieurs savants éminents. C'est celle qui se rapporte à l'évaluation de l'entropie d'un mélange gazeux. On en triomphe d'ordinaire aujourd'hui en faisant intervenir les propriétés de l'osmose. J'en suis venu à bout par un moyen tout différent, en faisant intervenir les propriétés de la dissociation du carbonate de chaux.

L'irréversibilité des phénomènes thermodynamiques a préoccupé de nombreux chercheurs. On en a voulu donner plusieurs explications mécaniques. La première est celle de Helmholtz; j'ai montré [116] qu'elle ne suffit pas pour rendre compte des faits (Vide infra § XXVIII). La seconde est celle qui se rattache à la théorie cinétique des gaz. J'y ai fait diverses objections qui me semblent la rendre peu vraisemblable, mais qui cependant ne sont pas décisives. J'ai discuté en particulier dans deux Notes [137] divers points de cette théorie, ce qui m'a donné l'occasion de rectifier une faute de calcul faite par Maxwell à propos de la relation entre la conductibilité et la viscosité des gaz. J'ai, d'autre part, justifié le principe de Boltzmann et montré sa légitimité dans des cas où il avait été contesté [259].

J'ai exposé à deux reprises différentes la théorie générale de l'élasticité [284, *in initio*, 289]. J'ai montré quelles relations il doit y avoir entre les 21 coefficients d'élasticité : 1° dans l'hypothèse des forces centrales; 2° dans le cas où la pression est nulle à l'état d'équilibre. Ces résultats supposent qu'il n'y a que des molécules d'une seule sorte, et ne s'appliqueraient pas par conséquent, au moins immédiatement, à deux milieux différents se pénétrant mutuellement. Ils ont donné lieu à des objections que j'ai facilement réfutées [125],

Dans la suite de mon livre [289], j'ai signalé (p. 134) une erreur commise par Lamé.

Je me suis occupé aussi d'un problème particulier d'élasticité [129] à propos d'une expérience de M. Cornu. J'ai montré que certaines relations, qui partout sont approchées, deviennent rigoureusement exactes sur les arêtes d'un prisme à base rectangulaire.

Les équations de l'élasticité s'appliquent immédiatement à l'Optique. J'ai cherché à réunir dans une exposition commune toutes les théories optiques des ondes. En particulier [284], j'ai montré comment dans le cas de la double réfraction, les théories de Fresnel, de Neumann et de Sarrau se déduisent des

équations générales du milieu élastique. De même, grâce à l'emploi des « couches de passage », les diverses théories de la réflexion sont notablement simplifiées et l'on comprend mieux leurs rapports mutuels.

Que résulte-t-il de ce rapprochement entre la théorie de Fresnel où la vibration est supposée perpendiculaire au plan de polarisation, et celle de Neumann où elle est regardée comme parallèle à ce plan ? On sait que ces deux théories ont jusqu'ici également bien rendu compte des faits; mais la comparaison que j'ai faite entre ces deux théories m'a montré la raison de ce fait. Cette raison est générale. Tout fait dont une des théories rendra compte, sera également bien expliqué par l'autre, de sorte qu'aucune expérience optique ne pourra décider entre elles.

On a voulu chercher un critère décisif dans les phénomènes de diffraction, dans la réflexion métallique et surtout dans l'expérience célèbre de Wiener. J'ai montré [**121**, **122**] qu'on s'était fait là une illusion.

Le principe de Huyghens et ses applications à la diffraction m'a longtemps occupé. J'ignorais à cette époque les travaux de Kirchhoff; l'interprétation que j'ai proposée pour le principe de Huyghens présente les plus grandes analogies avec celle de Kirchhoff; elle repose également sur la considération d'une intégrale analogue au potentiel newtonien.

J'ai abordé aussi le problème d'une autre manière [**284**, p. 300; **285**, p. 98] en déduisant directement des équations la propagation rectiligne de la lumière comme première approximation; et la diffraction comme seconde approximation. Je montre ainsi que la direction du rayon lumineux doit être conforme au principe de Huyghens; en ce qui concerne la seconde approximation, je cherche à illustrer la théorie générale par un exemple simple, en étudiant les cas de propagation anormale des ondes dans un faisceau très délié [**128**, **285**].

Quoi qu'il en soit, la théorie de la diffraction restait très imparfaite. Non seulement la question de la polarisation était laissée de côté, mais certains phénomènes que M. Gouy appelle « diffraction éloignée » restaient complètement inexpliqués. J'ai cherché à donner une théorie de la diffraction éloignée et de la polarisation par diffraction [**184**, **186**]; malheureusement j'étais obligé de faire certaines hypothèses, assez voisines de la réalité pour donner une idée générale de la marche des phénomènes, pas assez toutefois pour en asseoir la théorie complète et définitive.

J'ai passé en revue dans mes leçons publiées les principales théories de l'électrodynamique [**286**, **287**, **298**]. Mais j'ai consacré aussi plusieurs Notes à

certaines questions particulières. J'ai discuté [117] la loi électrodynamique de Weber et ses rapports avec le principe de la conservation de l'énergie. J'ai étudié [123] les conditions d'équilibre d'un liquide diélectrique placé dans un champ électrique, je voulais montrer qu'on pouvait faire cette théorie de la façon la plus élémentaire et sans faire intervenir les pressions de Maxwell. J'ai traité [176] des rapports du phénomène de Hall avec la théorie de Lorentz.

J'ai consacré [240] un article à l'induction unipolaire. Les lignes de force magnétiques sont-elles entraînées par les aimants en mouvement? Ma conclusion est que cette question si controversée est dénuée de sens.

Mais je me suis surtout occupé des rapports de l'Électrodynamique et de l'Optique. J'ai traité à plusieurs reprises du phénomène de Zeemann [234, 239, 298]. L'un de ces articles a été critiqué par Lorentz. L'expérience décidera. Si l'on confirme définitivement les expériences de Zeemann sur la dissymétrie du triplet dans un champ faible, relatées par Lorentz dans son rapport au Congrès de Physique (t. III, p. 31), ce sera Lorentz qui aura raison.

J'ai passé en revue [286, 287, 298, 232] les principales théories électromagnétiques de la Lumière, celle de Maxwell, de Helmholtz, de Hertz, de Lorentz et de Larmor. La plus satisfaisante m'a paru être celle de Lorentz. J'y ai fait cependant une objection; cette théorie n'est pas conforme au principe de l'égalité de l'action et de la réaction (supposé appliqué à la matière seule) [232, 298]. Je suis revenu [275] plus en détail sur les relations de la théorie de Lorentz avec ce principe.

J'ai été amené enfin à m'occuper des rayons cathodiques et des rayons Röntgen. J'ai donné [162] l'explication d'une expérience de M. Birkeland, en déterminant la trajectoire des rayons cathodiques dans un champ variable. J'ai réfuté [154, 155, 233] les idées de M. Jaumann sur ces rayons.

J'ai fait [157, 160, 161] diverses observations à propos de certaines expériences relatives aux rayons Röntgen. C'est dans un article de vulgarisation [260] que j'ai émis au sujet des rayons Röntgen une hypothèse qui a exercé une certaine influence sur le développement de la Science. Je me suis demandé s'il n'y aurait pas quelque relation entre ces rayons et les phénomènes de phosphorescences. Plusieurs savants ont alors dirigé leurs recherches de ce côté. Quelques-uns n'ont obtenu que des succès partiels ou douteux. Mais M. Becquerel a réussi complètement et a découvert les rayons qui portent son nom. Les phénomènes qu'il a observés ne sont pas sans analogie avec ceux que j'avais prévus; mais ils sont beaucoup plus extraordinaires encore.

XXV. — **Oscillations hertziennes**

(119, 126, 132, 140, 223, 224, 225, 287, 292).

Je crois devoir mettre à part, à cause de leur nombre les articles que j'ai consacrés aux oscillations hertziennes. Le premier est une Note [119] où j'ai rectifié une erreur de calcul commise par Hertz dans la détermination de la période. Cette rectification était facile, mais il importait de la faire promptement; car à ce moment, cette erreur, si elle était restée inaperçue, aurait pu arrêter les progrès de la Science.

J'ai donné dans d'autres Notes et dans mes leçons, des procédés en vue du calcul plus ou moins approché de la période d'un excitateur, et j'ai discuté les différentes circonstances qui influent ou qui sembleraient devoir influer sur cette période [126, 223, 224, 292].

Le phénomène de la résonance multiple découvert par MM. Sarasin et de La Rive semblait assez paradoxal. J'en ai donné une explication simple [225, 292] fondée sur l'amortissement rapide des oscillations. Cette explication a été confirmée expérimentalement d'abord par M. Bjerknes, puis par d'autres physiciens.

J'ai étudié enfin [132, 140] la propagation d'une onde hertzienne le long d'un fil. J'ai montré que l'affaiblissement de cette onde est dû à deux causes; le rayonnement et la chaleur de Joule. La première de ces causes croît avec le diamètre du fil, tandis que la seconde décroît. L'expérience semble indiquer que la seconde est prépondérante.

BIBLIOGRAPHIE DE LA CINQUIÈME PARTIE.

XXIII. — *Équations différentielles de la Physique mathématique.*

[107] *Sur le problème de la distribution électrique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 104, 1887, p. 44-46).

[109] *Sur la Théorie analytique de la chaleur* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 104, 1887, p. 1753-1759)).

[113] *Sur la Théorie analytique de la chaleur* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 107, 1888, p. 967-971).

[141] *Sur la propagation de l'électricité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 117, 1893, p. 1027-1032).

[142] *Sur certains développements en séries que l'on rencontre dans la théorie de la propagation de la chaleur* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 118, 1894, p. 383-387).

[143] *Sur l'équation des vibrations d'une membrane* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 118, 1894, p. 447-451).

[144] (¹) *Sur la série de Laplace* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 118, 1894, p. 497-501).

[146] (²) *Sur l'équilibre des mers* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 118, 1894, p. 948-952).

[151] *Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 120, 1895, p. 347-352).

[156] *Sur l'équilibre d'un corps élastique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 122, 1896, p. 154-159).

[174] (³) *Les fonctions fuchsiennes et l'équation* $\Delta u = e^u$ (*C. R. Acad. Sc.*, t. 126, 1898, p. 627-630).

[185] *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* (*Acta Math.*, t. 20, 1896-1897, p. 59-142).

[190] (⁴) *Les propriétés du potentiel et les Fonctions abéliennes* (*Acta Math.*, t. 22, 1899, p. 89-178).

[195] (⁵) *Sur l'équilibre et le mouvement des mers* (deux articles) (*J. Math. pures et appl.*, 5ᵉ série, t. 2, 1896, p. 57-102 et 217-262).

[200] *Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique* (*Amer. J. Math.*, t. 12, 1890, p. 211-294).

[220] *Sur les équations de la Physique Mathématique* (*Circ. Matem. Palermo*, t. 8, 1894, p. 57-156).

[293] *Théorie analytique de la Propagation de la chaleur* (1895).

[295] *Théorie du potentiel newtonien* (1899).

(¹) Inséré Tome III, p. 607.
(²) Inséré Tome VIII, p. 193.
(³) Inséré Tome II, p. 67.
(⁴) Inséré Tome IV, p. 162.
(⁵) Inséré Tome VIII, p. 237.

XXIV. — Critique des Théories physiques.

[116] *Sur les tentatives d'explication mécanique des principes de la thermodynamique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 108, 1889, p. 550-553).

[117] *Sur la loi électrodynamique de Weber* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 110, 1890, p. 825-829).

[121] *Sur l'expérience de M. Wiener* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 112, 1891, p. 325-329).

[122] *Sur la réflexion métallique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 112, 1891, p. 456-459).

[123] *Sur l'équilibre des diélectriques fluides dans un champ électrique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 112, 1891, p. 555-557).

[125] *Sur la théorie de l'élasticité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 112, 1991, p. 914-915).

[129] *Sur la théorie de l'élasticité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 114, 1892, p. 385-389).

[137] *Sur une objection à la théorie cinétique des gaz* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 116, 1893, p. 1017-1021); *Sur la Théorie cinétique des gaz* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 116, 1893, p. 1165-1166).

[153] *Sur le spectre cannelé* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 120, 1895, p. 757-762).

[154] *Remarque sur un Mémoire de M. Jaumann intitulé : « Longitudinales Licht »* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 121, 1895, p. 792-793).

[155] *Réponses à M. Jaumann* (trois Notes) *C. R. Acad. Sc.*, t. 122, 1896, p. 76, 520 et 990).

[157] *Observations au sujet d'une Communication de M. Perrin sur quelques propriétés des rayons Röntgen* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 122, 1896, p. 188).

[160] *Observations au sujet d'une Communication de M. de Metz sur la photographie à l'intérieur des tubes de Crookes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 122, 1896, p. 881).

[161] *Observations au sujet d'une Communication de M. de Metz* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 123, 1896, p. 356).

[162] *Remarques sur une expérience de M. Birkeland* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 123, 1896, p. 530-533)

[176] *Le phénomène de Hall et la théorie de Lorentz* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 128, 1899, p. 339-341).

[184] *Sur la polarisation par Diffraction* (*Acta Math.*, t. 16, 1892-1893, p. 297-339).

[186] *Sur la polarisation par Diffraction* (*suite*) (*Acta Math.*, t. 20, 1896-1897, p. 313-355).

[232] *A propos de la théorie de Larmor* (quatre articles) (*L'Éclairage Électrique*, t. 3, 1895, p. 5-13 et 289-295; t. 5, 1895, p. 5-14 et 385-392).

[233] *Polémique avec M. Jaumann* (quatre articles) (*L'Éclairage Électrique*, t. 9, 1896, p. 241-251 et 289-293).

[234] *Sur le phénomène de Zeeman* (*L'Éclairage Électrique*, t. 11, 1897, p. 481-489).

[238] *L'énergie magnétique d'après Maxwell et d'après Hertz* (*L'Éclairage Électrique*, t. 19, 1899, p. 361-367).

[239] *Sur le phénomène de Zeeman et la théorie de Lorentz* (*L'Éclairage Électrique*, t. 19, 1899, p. 5-15).

[240] *Sur l'induction unipolaire* (*L'Éclairage Électrique*, t. 23, 1900, p. 41-53).

[241] *Polémique avec M. Tait* (*Nature*, t. 45, 1892, p. 414-415 et 485; t. 46, 1892, p. 76).

[259] *Sur la théorie cinétique des gaz* (*Rev. gén. des Sciences*, t. 5, 1894, p. 513-521).

[275] *La théorie de Lorentz et le Principe de Réaction* [*Arch. Néerl. des Sciences exactes et naturelles* (Jubilé de Lorentz), 2e série, t. 5, 1900, p. 252-278].

[284] *Théorie mathématique de la Lumière*, t. I, 1889 (G. Carré et Naud, édit).

[285] *Théorie mathématique de la Lumière*, t. II, 1892 (G. Carré et Naud, édit.).

[286] *Électricité et Optique*, 1re édition, t. I, 1890 (G. Carré et Naud, édit.).

[287] *Électricité et Optique*, 1re édition, t. II, 1891 (G. Carré et Naud, édit.).

[288] *Capillarité*, 1895 (G. Carré et Naud, édit.).

[289] *Théorie de l'Élasticité*, 1892 (G. Carré et Naud, édit.).

[290] *Théorie des Tourbillons*, 1893 (G. Carré et Naud, édit.).

[291] *Thermodynamique*, 1892 (G. Carré et Naud, édit.).

[293] *Théorie analytique de la Propagation de la Chaleur*, 1895 (G. Carré et Naud, édit.).

[294] *Calcul des Probabilités*, 1896 (G. Carré et Naud, édit.).

[298] *Électricité et Optique*, 2e édition, 1901 (G. Carré et Naud, édit.).

XXV. — Oscillations hertziennes.

[119] *Contribution à la théorie des expériences de Hertz* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 111, 1890, p. 322-326).

[126] *Sur la théorie des Oscillations hertziennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 113, 1891, p. 515-519).

[132] *Sur la propagation des Oscillations électriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 114, 1892, p. 1229-1233).

[140] *Observations sur une Communication de MM. Birkeland et Sarasin sur la nature de la réflexion des ondes électriques au bout d'un fil conducteur* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 117, 1893, p. 622-624).

[223] *Contribution à la théorie des expériences de Hertz* (*Arch. des Sciences phys. et nat. de Genève*, 3e période, t. 24, 1890, p. 285-290).

[224] *Sur le calcul de la période des excitateurs hertziens* (*Arch. des Sciences phys. et nat. de Genève*, 3e période, t. 25, 1891, p. 5-25).

[225] *Sur la Résonance multiple des Oscillations hertziennes* (*Arch. des Sciences phys. et nat. de Genève*, 3e période, t. 25, 1891, p. 609-627).

[287] *Électricité et Optique* (ch. supra).

[292] *Les Oscillations électriques*, 1894 (G. Carré et Naud, édit.).

SUR LE PROBLÈME
DE LA
DISTRIBUTION ÉLECTRIQUE

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 104, p. 44-46 (3 janvier 1887).

Le problème de la distribution électrique se ramène, comme on le sait, au problème de Dirichlet qui consiste à déterminer une fonction V qui satisfasse à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ à l'intérieur d'une certaine région et qui prenne sur la surface qui limite cette région des valeurs données. Riemann a donné de la possibilité de ce problème une démonstration simple et élégante, mais peu rigoureuse. Depuis, MM. Neumann, Schwarz et Harnarck ont imaginé plusieurs méthodes qui permettent, non seulement d'établir l'existence de la solution, mais de la déterminer complètement. Ces méthodes ont un double caractère : ce sont à la fois des méthodes de démonstration, destinées à montrer la possibilité du problème, et des méthodes de calcul destinées à le résoudre effectivement. A ce second point de vue, elles sont très imparfaites; car, si elles sont susceptibles théoriquement de donner une approximation indéfinie; si même elles conduisent assez facilement à certaines inégalités auxquelles doit satisfaire la fonction cherchée, elles ne permettraient pas, sans un labeur très pénible, de pousser l'approximation un peu loin. Il n'est donc pas inutile d'en imaginer de nouvelles, quand même elles devraient avoir les mêmes inconvénients, ce qu'il paraît, d'ailleurs, impossible d'éviter. En effet, chaque méthode nouvelle conduit facilement à des inégalités nouvelles qu'il

peut être intéressant de connaître. C'est ce qui m'engage à exposer ici un procédé qui n'a pas encore été proposé, du moins que je sache.

Supposons, pour fixer les idées et simplifier l'exposé qui va suivre, qu'il s'agisse de déterminer la distribution électrique sur un conducteur *unique* (mais de forme, d'ailleurs, quelconque), chargé au potentiel intérieur 1. On peut imaginer un réseau formé d'une infinité de sphères $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots,$ qui sont toutes et tout entières extérieures au conducteur. Je suppose, de plus, que tout point extérieur au conducteur soit intérieur, au moins à l'une des sphères S_i. J'envisage, enfin, une sphère Σ dont le rayon R soit assez grand pour que le conducteur y soit contenu tout entier.

Imaginons maintenant une quantité R d'électricité positive répartie sur Σ avec une densité uniforme $\frac{1}{4\pi R}$. Le potentiel de cette électricité sera égal à 1 à l'intérieur de Σ et plus petit que 1, mais positif, à l'extérieur.

Rappelons maintenant un résultat bien connu : c'est qu'il est possible de remplacer un point électrisé, situé à l'intérieur d'une sphère, par une couche électrique répandue à la surface de cette même sphère et dont l'action sur un point extérieur soit la même; nous l'appellerons *couche équivalente*.

Voici maintenant la série d'opérations que nous allons faire. Considérons l'une des sphères S_i et remplaçons l'électricité contenue à l'intérieur de cette sphère par une couche équivalente répandue à sa surface. Le potentiel ne changera pas à l'extérieur de S_i et diminuera à l'intérieur.

Si donc nous opérons successivement ainsi sur chacune des sphères S_i, en dirigeant les opérations, de façon à revenir une infinité de fois sur chaque sphère, le potentiel ira toujours en diminuant; mais, comme il n'y aura en aucun point d'électricité négative, il sera toujours positif. Il tendra donc vers une limite finie et déterminée que j'appelle V.

Mais, d'après un théorème de Harnack, si, dans une certaine région, tous les termes d'une série sont positifs et satisfont à l'équation de Laplace, la série ne peut converger qu'uniformément. Donc notre potentiel tendra uniformément vers sa limite V. Cela suffit pour démontrer que V est une fonction continue et que

$$\Delta V = 0.$$

Il est clair que V est toujours plus petit que 1 et s'annule à l'infini; il reste à démontrer que V tend vers l'unité quand on se rapproche de la surface du conducteur. Il suffit, pour cela, de faire une remarque. Soit O un point quel-

conque intérieur au conducteur; soit ρ la distance de O au point (x, y, z); soit r la plus courte distance de O à la surface du conducteur. Notre potentiel sera toujours plus grand que $\frac{r}{\rho}$; on aura donc encore à la limite

$$1 > V > \frac{r}{\rho}.$$

Or, il est évident que, quand le point (x, y, z) se rapprochera indéfiniment d'un point P de la surface du conducteur, on pourra toujours choisir le point O, ou faire tendre le point O vers le point P, de telle façon que $\frac{r}{\rho}$ tende vers 1.

Il résulte de là que la fonction V ainsi définie n'est autre chose que le potentiel d'une charge électrique distribuée sur notre conducteur.

Comme méthode de démonstration, celle que je propose est supérieure à toutes les autres, puisqu'elle ne souffre aucune exception; comme méthode de calcul, elle est évidemment moins simple que celle de Neumann, dans le cas où cette dernière s'applique, c'est-à-dire pour un conducteur convexe. Elle n'en fournit pas moins diverses inégalités intéressantes, très nombreuses et variées, parce que le choix des sphères S_i reste arbitraire dans une large mesure et, qu'on peut, d'ailleurs, introduire dans la méthode diverses modifications de détail, que je n'ai pu exposer ici, mais qui augmentent encore cet arbitraire et qui, de plus, permettent d'étendre la méthode au cas de plusieurs conducteurs.

SUR

LA THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 104, p. 1753-1759 (20 juin 1887).

Les principes sur lesquels reposent les lois générales de la théorie analytique de la chaleur, pour le cas d'un corps solide quelconque, sont loin d'être établis d'une façon suffisamment rigoureuse. Sans doute, en cette matière, il serait impossible, et d'ailleurs inutile, d'exiger autant de rigueur qu'en Analyse, et même les raisonnements que je vais proposer ne seraient pas de nature à satisfaire un analyste; cependant il ne sera peut-être pas sans intérêt de perfectionner les méthodes de démonstration dont on a dû se contenter jusqu'ici.

1. On considère un corps solide homogène et isotrope, isolé dans un milieu indéfini à travers lequel la chaleur se propage par rayonnement. La température extérieure est o, la température du corps est V et cette fonction V est définie par les équations suivantes, où j'emploie les notations habituelles de la théorie du potentiel :

$$\frac{dV}{dt} = a^2 \Delta V, \qquad \frac{dV}{dn} + hV = 0.$$

La première de ces équations doit être satisfaite à l'intérieur du corps et la seconde à la surface. Quant à h, c'est un coefficient positif qui dépend du pouvoir émissif et que je supposerai constant.

La solution classique de ce problème repose sur la considération d'une infinité de fonctions fondamentales U satisfaisant aux conditions

$$\Delta U - kU = 0 \qquad \frac{dU}{dn} + hU = 0, \qquad \int U^2 d\tau = 1.$$

k étant une constante positive. Le premier point est donc d'établir l'existence de ces fonctions U. C'est ce qu'on n'a pas encore fait, que je sache, dans le cas général, et ce que je vais chercher à faire.

2. Soit F une fonction quelconque, et posons

$$A = \int F^2 \, d\tau, \qquad B = h\int F^2 \, d\omega + \int \left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2 \right] d\tau.$$

L'intégrale A ainsi que la seconde des intégrales de l'expression B sont étendues à tous les éléments $d\tau$ du volume du corps solide et l'intégrale $\int F^2 \, d\omega$ est étendue à tous les éléments $d\omega$ de sa surface.

Supposons que la fonction F soit assujettie à la condition $A = 1$, mais reste d'ailleurs quelconque, l'expression B qui est essentiellement positive ne pourra s'annuler; elle admettra donc un minimum absolu. Soit U_1 ce que devient F quand ce minimum est atteint; le calcul des variations nous donne

$$\frac{1}{2}\delta A = \int U_1 \, \delta U_1 \, d\tau = 0,$$

$$\frac{1}{2}\delta B = \int \delta U_1 \left(\frac{dU_1}{dn} + h U_1\right) d\omega - \int \Delta U_1 \, \delta U_1 \, d\tau = 0.$$

On en conclut

$$\frac{dU_1}{dn} + h U_1 = 0, \qquad \Delta U_1 + k_1 U_1 = 0,$$

k_1 étant une constante. L'existence d'une des fonctions fondamentales est donc établie. Quant à k_1, il est aisé de vérifier que c'est la valeur même de B.

On a donc, quelle que soit la fonction F,

$$k_1 < \frac{B}{A},$$

d'où il est aisé de tirer une infinité d'inégalités importantes. On trouve ainsi, par exemple, que $\frac{k_1}{h}$ est toujours plus petit que le rapport de la surface du corps solide à son volume.

Supposons maintenant que la fonction F soit assujettie à deux conditions

$$A = \int F^2 \, d\tau = 1, \qquad \int F U_1 \, d\tau = 0.$$

L'expression B n'en aura pas moins un minimum absolu et, si ce minimum

est atteint pour $F = U_2$, on trouve, comme plus haut,

$$\frac{dU_2}{dn} + hU_2 = 0, \qquad \Delta U_2 + k_2 U_2 + \lambda U_1 = 0,$$

k_2 et λ étant deux constantes; mais, si l'on tient compte des conditions

$$U_2 \frac{dU_1}{dn} - U_1 \frac{dU_2}{dn} = 0, \qquad \int U_1 U_2 \, d\tau = 0, \qquad \int U_1^2 \, d\tau = 1,$$

on verra sans peine que λ est nul. L'existence d'une seconde fonction fondamentale est donc démontrée.

Si l'on impose maintenant à la fonction F les trois conditions

$$\int F^2 \, d\tau = 1, \qquad \int FU_1 \, d\tau = \int FU_2 \, d\tau = 0,$$

on démontrera de la même façon l'existence d'une troisième fonction U_3 et, en continuant de la sorte, on verra qu'il existe une infinité de fonctions fondamentales.

On remarquera que cette démonstration est tout à fait analogue à celle dont se sert Riemann pour établir le principe de Dirichlet et que les analystes ont depuis remplacée par des raisonnements plus rigoureux. Je crois néanmoins que nous pouvons nous en contenter ici.

En particulier, si $h = 0$, on trouve

$$k_1 = 0, \qquad U_1 = \text{const.}$$

Si le corps solide est un parallélépipède rectangle et que a soit la plus grande de ses dimensions, on trouve, pour $h = 0$,

$$k_2 = \frac{\pi^2}{a^2}.$$

3. Soient U' et U'' deux fonctions fondamentales correspondant à deux valeurs différentes du pouvoir émissif; soient h' et h'', k' et k'' les valeurs correspondantes des coefficients h et k. On trouve

$$(h' - h'') \int U' U'' \, d\omega = (k' - k'') \int U' U'' \, d\tau.$$

Si l'on suppose que U' et U'', h' et h'', k' et k'' diffèrent infiniment peu, on trouve

$$dh \int U'^2 \, d\omega = dk \int U'^2 \, d\tau.$$

Cette égalité prouve que, lorsque h va en croissant, toutes les quantités k_1, k_2, ..., k_n, ... vont aussi en croissant.

4. D'après la définition de k, k_n croît avec n; je dis qu'il croît au delà de toute limite.

D'après ce qui précède, il me suffira de le démontrer pour le cas de $h=0$.

Supposons d'abord que le solide considéré soit un polyèdre P, dont chaque face soit parallèle à l'un des trois plans de coordonnées. Posons

$$V = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_n U_n,$$

les α étant des coefficients indéterminés. On trouve

$$k_n \int V^2 d\tau > \int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right] d\tau.$$

Nous pouvons, si n est assez grand, décomposer notre polyèdre en $n-1$ parallélépipèdes rectangles. Nous pourrons ensuite disposer des coefficients α de telle façon que, pour chacun de ces $n-1$ parallélépipèdes, on ait

$$\int V \, d\tau = 0.$$

Or, d'après la définition de k_2, si $h=0$ et si V est une fonction quelconque, telle que

$$\int V \, d\tau = 0,$$

on a

$$\int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right] d\tau > k_2 \int V^2 d\tau.$$

Si donc les trois dimensions de nos $n-1$ parallélépipèdes sont plus petites que a, on aura, pour chacun des parallélépipèdes et, par conséquent, pour le polyèdre P tout entier,

$$\int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right] d\tau > \frac{\pi^2}{a^2} \int V^2 d\tau.$$

On en déduit

$$k_n > \frac{\pi^2}{a^2}.$$

Quand n croît indéfiniment, a tend vers 0, donc k_n tend vers l'infini.

C. Q. F. D.

Pour étendre ce résultat au cas d'un solide quelconque, il me suffira de faire observer que l'on peut toujours construire un polyèdre P, qui diffère de ce solide aussi peut que l'on veut. Je crois que, dans une question de ce genre, je puis me contenter de cet aperçu.

5. Le problème à résoudre consiste, étant donnée la valeur initiale F de la température V du corps solide, à trouver une fonction V_0 qui représente cette même température V à l'instant $t = t_0$, avec une erreur R aussi petite qu'on le veut. La mesure de l'erreur commise sera, par définition,

$$A' = \int (V - V_0)^2 \, d\tau = \int R^2 \, d\tau.$$

Nous devons avoir, par hypothèse,

$$(1) \qquad \frac{dV}{dt} = a^2 \Delta V, \qquad \frac{dV}{dn} + hV = 0.$$

La seconde de ces équations est certainement satisfaite pour toute valeur positive du temps, mais elle pourrait ne pas l'être pour $t = 0$, puisque la fonction donnée F est quelconque. Nous pouvons supposer toutefois, pour éviter toute difficulté, qu'elle le soit encore pour $t = 0$; car, quelle que soit F, on peut toujours trouver une fonction qui en diffère aussi peu qu'on veut et qui satisfasse à cette équation.

Cela posé, écrivons

$$V = \beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 + \ldots + \beta_n U_n + R.$$

On sait que, si l'on veut déterminer les coefficients β_i de telle façon que $\int R^2 \, d\tau$ soit minimum, il faut prendre

$$\beta_i = \int V U_i \, d\tau.$$

On trouve, en tenant compte des équations (1),

$$\frac{d\beta_i}{dt} = -k_i a^2 \beta_i, \qquad \text{d'où} \qquad \beta_i = \text{const.}\, e^{-k_i a^2 t}.$$

Nous trouvons, d'autre part,

$$\frac{dA'}{dt} = 2 \int R \frac{dR}{dt} \, d\tau = -2a^2 B',$$

où l'on a posé

$$B' = h\int R^2\,d\omega + \int\left[\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dz}\right)^2\right]d\tau.$$

Mais on a

$$\int RU_i\,d\tau = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On en conclut, d'après la définition de k_{n+1},

$$B' > k_{n+1}A';$$

d'où enfin

$$A' < A'_0\,e^{-2a^2k_{n+1}t} < e^{-2a^2k_{n+1}t}\int F^2\,d\tau,$$

A'_0 désignant la valeur initiale de A'. Cela montre que, si t est positif, on peut prendre n assez grand pour que A' soit aussi petit que l'on veut.

C. Q. F. D.

6. Posons, en désignant toujours par V la température,

$$A = \int V^2\,d\tau, \qquad B = -\int V\,\Delta V\,d\tau.$$

Il viendra

$$\frac{dA}{dt} = -2a^2B, \qquad \frac{dB}{dt} = -2a^2\int(\Delta V)^2\,d\tau,$$

et

$$A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt} = -a^2\iint(V\,\Delta V' - V'\,\Delta V)^2\,d\tau\,d\tau'.$$

Pour calculer l'intégrale du second membre, il faut effectuer deux intégrations : la première par rapport à $d\tau$, la seconde par rapport à $d\tau'$, et étendre chacune d'elles à tous les éléments du volume du corps solide. D'ailleurs V et V' désignent respectivement la température dans l'élément $d\tau$ et dans l'élément $d\tau'$.

Ces égalités prouvent que A et $\frac{A}{B}$ vont constamment en décroissant.

SUR

LA THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 107, p. 967-971 (17 décembre 1888).

Dans une Note antérieure (*Comptes rendus*, t. 104, p. 1754) [1], j'ai étudié le problème du refroidissement d'un corps solide homogène et isotrope. J'ai montré qu'il existe une infinité de fonctions

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_n, \quad \ldots$$

qui satisfont, à l'intérieur du corps, à l'équation

$$\Delta U_n + k_n U_n = 0,$$

et à sa surface, à l'équation

$$\frac{dU_n}{dn} + h U_n = 0.$$

Le coefficient h est une constante positive qui dépend du pouvoir émissif du corps et qui est une donnée de la question. Les coefficients

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n, \quad \ldots$$

sont des constantes positives qu'il reste à déterminer.

J'ai appliqué ensuite ce résultat à la détermination de la température d'un point quelconque du corps à un instant quelconque. Mais, dans cette application, il y a un théorème qui joue un rôle essentiel :

Il faut commencer par établir que k_n croît indéfiniment quand son indice n augmente lui-même au delà de toute limite.

Je n'ai donné de ce théorème, dans la Note que je cite, qu'une démonstration peu rigoureuse. Je me suis contenté de le démontrer complètement pour un

(1) Ce tome, p. 18.

polyèdre dont toutes les faces sont parallèles aux plans de coordonnées, et de faire observer ensuite que l'on peut toujours trouver un pareil polyèdre différant aussi peut que l'on veut d'un solide quelconque.

Pour démontrer le théorème d'une façon plus satisfaisante, il faut trouver une limite inférieure de la quantité k_2. Nous nous restreindrons au cas d'un solide *convexe* et de $h = 0$. Soit alors V une fonction quelconque de x, y, z. Soient $d\tau$ et $d\tau'$ deux éléments de volume quelconque du corps; x, y, z et x', y', z' les coordonnées des centres de gravité M et M' de ces deux éléments; V et V' les valeurs de la fonction V aux points M et M'; *soit enfin* W *le volume total du corps.* On peut se proposer de choisir la fonction V de façon à rendre minimum le rapport

$$(1) \qquad \frac{2W \int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right] d\tau}{\iint (V - V')^2 \, d\tau \, d\tau'}.$$

Il est aisé de voir que ce minimum est alors égal à k_2.

Posons alors

$$x = \xi + \rho \cos\varphi \sin\theta, \qquad x' = \xi + \rho' \cos\varphi \sin\theta;$$
$$y = \eta + \rho \sin\varphi \sin\theta, \qquad y' = \eta + \rho' \sin\varphi \sin\theta;$$
$$z = \rho \cos\theta, \qquad z' = \rho' \cos\theta.$$

L'expression (1) deviendra

$$(2) \qquad \frac{3W}{\pi} \frac{\int \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 \sin\theta \cos\theta \, d\rho \, d\xi \, d\eta \, d\theta \, d\varphi}{\int (V - V')^2 (\rho - \rho')^2 \sin\theta \cos\theta \, d\rho \, d\rho' \, d\xi \, d\eta \, d\theta \, d\varphi},$$

où l'on a

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{dV}{dx} \cos\varphi \sin\theta + \frac{dV}{dy} \sin\varphi \sin\theta + \frac{dV}{dz} \cos\theta.$$

Si l'on intègre d'abord par rapport à ρ et à ρ', voici comment on trouvera les limites d'intégration. Si ξ, η, φ et θ restant constants, on fait varier ρ, le point x, y, z décrira une droite. Cette droite coupera la surface de notre solide convexe en deux points, et les valeurs correspondantes de ρ seront ρ_0 et ρ_1. Les limites d'intégration pour ρ et ρ' seront alors ρ_0 et ρ_1. On aura, d'ailleurs,

$$\rho_1 - \rho_0 < \lambda,$$

λ étant la plus grande distance de deux points de la surface du corps.

Nous sommes ainsi conduit à chercher le minimum du rapport des deux intégrales

$$B = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 d\rho, \qquad A = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \int_{\rho_0}^{\rho_1} (V - V')^2 (\rho - \rho')^2 \, d\rho \, d\rho'.$$

Ce minimum existe certainement; par de simples raisons d'homogénéité, on voit qu'il doit être de la forme

$$\frac{2 k_0}{(\rho_1 - \rho_0)^2},$$

k_0 étant une constante numérique. La détermination effective de cette constante est possible, mais serait très pénible; elle dépend de l'intégration d'une équation différentielle et de la résolution d'une équation transcendante.

On aura donc, pour une fonction V quelconque,

$$\frac{B}{A} \geq \frac{2 k_0}{(\rho_1 - \rho_0)^2} \geq \frac{2 k_0}{\lambda^2}.$$

Il importe de remarquer que, dans le calcul des intégrales qui entrent dans l'expression (2), les limites d'intégration sont 0 et 2π pour φ, 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour θ. Les fonctions sous le signe $\int$ sont donc toujours positives.

Donc l'expression (2), qui n'est qu'une transformation de l'expression (1), sera toujours plus grande que

$$\frac{6 k_0 W}{\pi \lambda^5}.$$

On a donc

$$k_2 > \frac{6 k_0 W}{\pi \lambda^5}.$$

Si nous considérons un solide quelconque, on peut le diviser en $n - 1$ solides partiels convexes; on aura alors, en raisonnant comme nous l'avons fait dans la Note citée,

$$k_n > \frac{6 k_0}{\pi} \frac{W}{\lambda^5},$$

$\frac{W}{\lambda^5}$ étant la valeur de cette fraction calculée pour celui des $n - 1$ solides partiels pour lequel cette fraction est la plus petite. Or on peut choisir n assez grand et diriger la décomposition de telle sorte que $\frac{W}{\lambda^5}$ soit aussi grand que l'on veut.

Donc *k_n croît indéfiniment avec n.*

Le théorème est démontré pour un solide quelconque et pour $h = 0$; comme k_n est croissant avec h, il est vrai aussi pour h quelconque.

Voici maintenant un moyen de trouver une limite *supérieure* de k_n.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_n$ n fonctions quelconques de x, y, z. Posons

$$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_n F_n,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des indéterminées. Posons encore

$$B = h\int F^2\,d\omega + \int\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right]d\tau,$$

$$A = \int F^2\,d\tau,$$

A et B seront des formes quadratiques par rapport à ces n indéterminées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Formons la forme $B - \lambda A$, où λ est un coefficient quelconque; écrivons que le discriminant de cette forme est nul. Nous obtiendrons une équation algébrique de degré n en λ. Cette équation aura toutes ses racines réelles et positives.

Soient

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n,$$

ces racines rangées par ordre de grandeur croissante. On aura

$$\lambda_1 > k_1, \qquad \lambda_2 > k_2, \qquad \ldots, \qquad \lambda_n > k_n.$$

Voici enfin un autre moyen de trouver une limite supérieure de k_2, dans le cas de $h = 0$.

Soient u, v, w trois fonctions quelconques de x, y, z que j'assujettis à une seule condition. On devra avoir à la surface du corps

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0,$$

α, β et γ étant les trois cosinus directeurs de la normale à la surface du corps. Il arrivera alors que le rapport

$$\frac{\int\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)^2 d\tau}{\int(u^2 + v^2 + w^2)\,d\tau}$$

sera toujours plus grand que k_2.

SUR LES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DE LA

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

American Journal of Mathematics, t. 12, p. 211-294 (1890).

Quand on envisage les divers problèmes de Calcul Intégral qui se posent naturellement lorsqu'on veut approfondir les parties les plus différentes de la Physique, il est impossible de n'être pas frappé des analogies que tous ces problèmes présentent entre eux. Qu'il s'agisse de l'électricité statique ou dynamique, de la propagation de la chaleur, de l'optique, de l'élasticité, de l'hydrodynamique, on est toujours conduit à des équations différentielles de même famille et les conditions aux limites, quoique différentes, ne sont pas pourtant sans offrir quelques ressemblances. Nous ne citerons ici que quelques exemples.

J'imagine d'abord que l'on se propose de trouver la température finale d'un corps solide conducteur, homogène et isotrope, lorsque les divers points de la surface de ce corps sont maintenus artificiellement à des températures données.

Ce problème traduit dans le langage analytique s'énonce comme il suit :

Trouver une fonction V qui dans une portion de l'espace satisfasse à l'équation de Laplace,

$$\Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

et qui prenne des valeurs données aux divers points de la surface qui limite cet espace.

C'est le *problème de Dirichlet*.

Supposons maintenant que l'on cherche quelle est la distribution de l'électricité statique à la surface d'un conducteur donné; nous retrouverons le même problème analytique.

Il s'agit de trouver une fonction V qui satisfasse à l'équation de Laplace dans tout l'espace extérieur au conducteur et qui se réduise à o à l'infini et à 1 à la surface du conducteur.

C'est un cas particulier du problème de Dirichlet, mais on connaît un moyen (par les fonctions de Green) de ramener le cas général à ce cas particulier.

Les deux problèmes, absolument différents au point de vue physique, sont identiques au point de vue analytique.

D'autres analogies, quoique moins complètes, sont cependant évidentes.

Nous citerons d'abord le problème suivant; un liquide est contenu dans un vase qu'il remplit complètement; divers corps solides mobiles sont plongés dans ce liquide; on connaît les mouvements de ces corps et l'on suppose qu'il y a une fonction des vitesses; on demande quel est le mouvement du liquide.

C'est là le problème des sphères pulsantes de M. Bjerknes (imitation hydrodynamique des phénomènes électriques).

Au point de vue analytique, il s'agit de trouver une fonction V qui satisfasse à l'équation de Laplace à l'intérieur, d'un certain espace et telle que sur la surface qui limite cet espace la dérivée $\frac{dV}{dn}$ ait des valeurs données.

Je rappelle quel est le sens de cette notation $\frac{dV}{dn}$ dont il sera fait un fréquent usage dans la suite. Soit un élément de surface quelconque; et α, β, γ les trois cosinus directeurs de la normale à cet élément; nous posons :

$$\frac{dV}{dn} = \alpha\frac{dV}{dx} + \beta\frac{dV}{dy} + \gamma\frac{dV}{dz}.$$

Ainsi dans le problème hydrodynamique, nous retrouvons la même équation différentielle que dans les problèmes thermique et électrique; les conditions aux limites seules diffèrent. Il en sera encore de même dans le problème de l'induction magnétique.

Supposons un ou plusieurs aimants permanents mis en présence d'un corps magnétique parfaitement doux M. Il s'agit de trouver une fonction V (le potentiel magnétique) qui satisfait à l'équation de Laplace dans toute la portion de l'espace qui n'est pas occupée par des aimants permanents et qui est assujettie en outre aux conditions suivantes. Aux divers points où il y a du magnétisme

permanent, ΔV n'est pas nul, mais peut être regardé comme donné. La fonction V est continue dans tout l'espace; ses dérivées sont continues à l'intérieur du corps M et à l'extérieur de ce corps, mais elles sont discontinues à la surface du corps M. Dans le voisinage de cette surface, $\frac{dV}{dn}$ aura donc deux valeurs différentes selon qu'on se placera à l'intérieur ou à l'extérieur du corps M; mais le rapport de ces deux valeurs sera une constante donnée.

Ici encore, nous retrouvons la même équation différentielle, avec des conditions aux limites analogues quoique différentes.

Voici maintenant des cas où l'équation différentielle est légèrement modifiée.

Supposons que l'on cherche la loi du refroidissement d'un corps solide isolé dans l'espace. Il s'agira de trouver une fonction V satisfaisant à l'équation

$$\frac{dV}{dt} = k\,\Delta V,$$

et qui de plus, est donnée pour $t = 0$. Enfin à la surface du corps le rapport de V à $\frac{dV}{dn}$ est donné.

Dans les problèmes d'optique, on a trois fonctions inconnues u, v, w et quatre équations :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = k\,\Delta u, \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = k\,\Delta v, \quad \frac{d^2 w}{dt^2} = k\,\Delta w, \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Les conditions aux limites varient suivant les problèmes; mais dans les questions de diffraction principalement elles ne sont pas sans analogie avec celles que nous avons rencontrées jusqu'ici.

Ce sont encore les mêmes équations, avec des conditions aux limites analogues, quoique différentes, que l'on rencontre dans le problème de la viscosité des liquides, traité d'après des idées de Navier. Les récents travaux de M. Couette ont rappelé l'attention sur cette question, qui était tombée dans un injuste oubli, malgré le beau chapitre que Kirchhoff y avait consacré dans sa Physique mathématique.

La théorie de l'élasticité nous offre des équations plus compliquées, mais qui ne diffèrent pas beaucoup des précédentes.

On a encore trois fonctions inconnues u, v, w, auxquelles j'adjoindrai la fonction auxiliaire $\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$ et trois équations dont la première s'écrit :

$$\Delta u + \lambda \frac{d\theta}{dx} = 0.$$

Je n'écris pas les conditions aux limites tout à fait analogues, *mutatis mutandis*, à celles des problèmes précédents et je passe immédiatement à une question très importante en hydrodynamique et qui consiste à trouver les composantes de la vitesse en tous les points d'un liquide quand on connaît les composantes du tourbillon en tous les points de ce même liquide. Ce problème au point de vue analytique s'énonce comme il suit :

Connaissant trois fonctions α, β, γ, trouver trois fonctions inconnues u, v, w, qui satisfont à certaines conditions aux limites et, de plus, aux équations

$$(1)\quad \alpha = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \qquad \beta = \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \qquad \gamma = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}, \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

L'analogie avec les problèmes précédents ne paraît pas d'abord évidente, mais elle le devient si l'on observe que les trois premières équations (1) peuvent (en vertu de la quatrième) être remplacées par trois autres dont la première s'écrit

$$\Delta u = \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy},$$

et dont les autres peuvent s'écrire par symétrie.

Je pourrais montrer aussi, si je ne craignais de fatiguer l'attention par de trop nombreux exemples, que presque toutes les questions, encore mal étudiées, relatives à l'induction électrodynamique dans des conducteurs non linéaires se ramènent à des problèmes analogues aux précédents et surtout à la dernière question d'hydrodynamique que je viens de mentionner.

Cette revue rapide des diverses parties de la Physique mathématique nous a convaincus que tous ces problèmes, malgré l'extrême variété des conditions aux limites et même des équations différentielles, ont, pour ainsi dire, un certain air de famille qu'il est impossible de méconnaître. On doit donc s'attendre à leur trouver un très grand nombre de propriétés communes.

Malheureusement la première des propriétés communes à tous ces problèmes, c'est leur extrême difficulté. Non seulement on ne peut le plus souvent les résoudre complètement, mais ce n'est qu'au prix des plus grands efforts qu'on peut en démontrer rigoureusement la possibilité.

Cette démonstration est-elle nécessaire ? La plupart des physiciens en feraient bon marché. L'expérience ne permettant pas de douter, par exemple, de la possibilité de l'équilibre électrique, on ne peut douter, non plus semble-t-il, de la possibilité des équations qui expriment cet équilibre. Nous ne saurions nous contenter de cette défaite; l'analyse doit pouvoir se suffire à elle-même et

d'ailleurs un pareil raisonnement, s'il s'applique peut-être aux problèmes que l'on rencontre directement en Physique, ne saurait s'appliquer de même à une foule de problèmes plus simples, qui se posent d'eux-mêmes dès qu'on cherche à résoudre les premiers.

En outre, toute démonstration rigoureuse de la possibilité d'un problème en est toujours une solution ; dans le cas qui nous occupe, cette solution sera généralement grossière et tout à fait impropre au calcul numérique ; cependant elle nous enseignera toujours quelque chose.

Maintenant si cette démonstration est nécessaire, devons-nous pourtant nous astreindre à la même rigueur que dans une question d'analyse pure ? Ce serait dans beaucoup de cas un pédantisme bien inutile. Les équations différentielles auxquelles obéissent les phénomènes physiques n'ont été souvent établies que par des raisonnements peu rigoureux ; on ne les regarde que comme des approximations ; les résultats expérimentaux, auxquels il s'agit de comparer les conséquences de la théorie, sont eux-mêmes approximatifs. Dans ces conditions, la rigueur absolue est de peu de prix, et il semble souvent qu'il n'y a pas lieu de la rechercher si on doit la payer de trop d'efforts.

Mais alors comment reconnaîtra-t-on qu'un raisonnement dont la rigueur n'est pas absolue, n'est pas un simple paralogisme ? Quand aura-t-on le droit de dire que telle démonstration, insuffisante pour l'Analyse, est assez rigoureuse pour la Physique ? La limite est bien difficile à tracer. J'essayerai pourtant d le faire ; je m'efforcerai de marquer nettement cette frontière et d'expliquer pourquoi en deçà on est encore dans le domaine de la science, et au delà dans celui du paralogisme.

Néanmoins, toutes les fois que je le pourrai, je viserai à la rigueur absolue et cela pour deux raisons ; en premier lieu, il est toujours dur pour un géomètre d'aborder un problème sans le résoudre complètement ; en second lieu, les équations que j'étudierai sont susceptibles, non seulement d'applications physiques, mais encore d'applications analytiques. C'est sur la possibilité du problème de Dirichlet que Riemann a fondé sa magnifique théorie des fonctions abéliennes. Depuis, d'autres géomètres ont fait d'importantes applications de ce même principe aux parties les plus fondamentales de l'Analyse pure.

Est-il encore permis de se contenter d'une demi-rigueur ? Et qui nous dit que les autres problèmes de la Physique mathématique ne seront pas un jour, comme l'a déjà été le plus simple d'entre eux appelés à jouer en Analyse un rôle considérable ?

1. — Problème de Dirichlet.

Le Problème de Dirichlet énoncé plus haut est toujours possible; ce principe est connu sous le nom de principe de Dirichlet et la première démonstration est due à Riemann. Si une fonction V est assujettie à prendre des valeurs données aux divers points d'une certaine surface, limitant un certain volume où la fonction et ses dérivées sont continues, l'intégrale triple :

$$\iiint \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz$$

ne peut s'annuler; elle admet donc un certain minimum et il est aisé de vérifier que ce minimum correspond au cas où la fonction V satisfait à l'équation de Laplace. Cette démonstration, qui est à peu de chose près celle de Riemann n'est pas rigoureuse car elle est soumise à toutes les objections relatives à la continuité des fonctions définies par le calcul des variations.

Aussi un très grand nombre de géomètres se sont-ils préoccupés d'établir plus solidement ce principe; je citerai en première ligne les recherches de M. Schwarz (dans le programme de l'École Polytechnique de Zurich, 1869, et dans les Monatsberichte de l'Académie de Berlin, 1870), bien qu'elles se rapportent plus particulièrement au cas de deux variables et ne puissent pas toujours s'étendre sans modification au cas qui nous occupe.

M. Neumann a donné de son côté une méthode générale qui permet de résoudre complètement le problème, si la surface où la fonction V prend des valeurs données est convexe. Il résout donc le problème de la distribution électrique dans le cas d'un conducteur convexe.

La méthode de M. Robin ne s'applique également qu'aux conducteurs convexes. Toutefois il y a un certain nombre de méthodes plus ou moins compliquées connues sous le nom de *méthodes alternantes* et qui permettent d'étendre les résultats au cas d'un conducteur de forme quelconque ou de plusieurs conducteurs isolés.

Le problème de Dirichlet se ramène à la recherche des fonctions de Green. Soit à trouver une fonction V qui à l'intérieur d'une surface S satisfasse à l'équation de Laplace et sur cette surface prenne des valeurs données.

Supposons qu'on ait trouvé une fonction U qui soit finie, qui satisfasse à l'équation $\Delta U = 0$, continue à l'intérieur de S sauf au point (a, b, c) intérieur

à S où la fonction U sera infinie, de telle façon que la différence

$$U - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

soit finie. Pour achever de définir la fonction U nous l'assujettirons à s'annuler en tous les points de S. On voit alors que la valeur de V au point a, b, c est égale à l'intégrale

$$\int \frac{V\frac{dV}{dn}d\omega}{4\pi}$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de S.

Donc quand on saura trouver les fonctions de Green, on saura résoudre le problème de Dirichlet.

D'autre part, la recherche des fonctions de Green se ramène, à l'aide de la transformation par rayons vecteurs réciproques, au problème de la distribution électrostatique à la surface d'un conducteur.

Ce problème de la distribution électrostatique n'est qu'un cas particulier du problème de Dirichlet, et cependant nous voyons que le cas général s'y ramène. La méthode alternante de Murphy permet d'ailleurs de ramener le problème de la distribution à la surface de plusieurs conducteurs isolés, au cas d'un conducteur unique. Nous ne nous occuperons donc plus désormais que du cas particulier où l'on cherche la distribution électrostatique à la surface d'un seul conducteur, puisque le cas général y ramène.

Que devons-nous penser des méthodes proposées jusqu'ici ? Ce sont à la fois des méthodes de démonstration destinées à établir la possibilité du problème et des méthodes de calcul destinées à le résoudre effectivement. Comme méthodes de démonstration, elles sont assez compliquées, mais elles se complètent mutuellement de façon à s'appliquer à tous les cas et à satisfaire les juges plus sévères au sujet de la rigueur.

Comme méthodes de calcul, elles ne valent rien; car personne n'aura jamais l'idée de les appliquer; même les plus simples d'entre elles, celles de Neumann ou de Robin, conduisent à des calculs inextricables dès la seconde approximation. Tout ce qu'on peut espérer en tirer, sans un labeur par trop écrasant, ce sont des inégalités assez grossières auxquelles sera soumise la capacité du conducteur.

Tel est l'état actuel de la question; voyons maintenant quel est le but que

je me suis proposé; ce qui eût été le plus intéressant, c'eût été de remplacer les méthodes de calcul actuel par d'autres moins défectueuses. Je n'ai pu le faire, je me suis borné à chercher une méthode de démonstration plus simple que celles qui ont été proposées jusqu'ici et directement applicable à tous les cas.

Je vais commencer par rappeler succinctement les principales propositions dont j'aurai à faire usage dans la suite.

1° La fonction de Green, U, relative à une sphère S et à un point P s'obtient de la façon suivante. Soit R le rayon de la sphère.

Prenons sur la droite OP une longueur $OQ = \frac{R^2}{OP}$; la fonction U sera le potentiel de deux masses l'une égale à 1 et placée au point P, l'autre égale à $-\sqrt{\frac{OQ}{OP}}$ et placée au point Q.

2° La valeur de $\frac{dU}{dn}$ correspondant à un élément quelconque de la sphère S est en raison inverse du cube de la distance de cet élément au point P. Elle est égale à

$$\frac{R^2 - OP^2}{R} \frac{1}{MP^3},$$

M désignant le centre de gravité de l'élément considéré.

3° Si l'on considère une sphère S et un point P intérieur à cette sphère, le potentiel d'une masse électrique égale à 1 et placée au point P sera égale à $\frac{1}{MP}$ au point M.

Imaginons ensuite que cette même masse électrique égale à 1 se répartisse sur la surface de la sphère S de telle façon que la densité sur un élément quelconque de cette sphère soit en raison inverse du cube de la distance de cet élément au point P. Je dis que le potentiel de cette masse ainsi distribuée que nous appellerons W sera égale à $\frac{1}{MP}$ en tout point M extérieur à la sphère et plus petit que $\frac{1}{MP}$ si le point M est intérieur à la sphère.

En effet, considérons une fonction qui soit égale à la fonction de Green, U, définie plus haut à l'intérieur de la sphère et o à l'extérieur de la sphère. Cette fonction satisfait partout à l'équation de Laplace; elle est continue sauf au point P et sur la surface de la sphère. Au point P la fonction devient infinie et

sa différence avec $\frac{1}{MP}$ reste finie; sur la surface de la sphère, la fonction elle-même reste continue, mais sa dérivée $\frac{d}{dn}$ subit un saut brusque égal à $\frac{R^2 - OP^2}{R.MP^3}$.

Nous devons en conclure que cette fonction est égale au potentiel de diverses masses électriques distribuées comme il suit :

1° Une masse égale à 1 au point P.

2° Une masse de densité $-\frac{R^2 - OP^2}{4\pi.R.MP^3}$ aux divers points de la surface de S. Cette seconde masse n'est autre chose que la masse définie plus haut et dont le potentiel était W, mais *changée de signe*.

On a donc :

$$\frac{1}{MP} - W = 0$$

à l'extérieur de S et

$$\frac{1}{MP} - W = U > 0$$

à l'intérieur de S. C. Q. F. D.

3° Supposons que nous nous proposions de trouver une fonction V qui satisfasse à l'équation de Laplace à l'intérieur de la sphère S et qui aux différents points M de la surface de cette sphère prennent des valeurs données V^0.

La valeur de cette fonction V en un point P intérieur à la sphère sera l'intégrale

$$\int \frac{R^2 - OP^2}{4\pi R} \frac{V^0}{MP^3} d\omega,$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de la sphère.

4° Soient w et W la plus petite et la plus grande valeur que puisse prendre V^0; ce seront aussi, comme on le sait, la plus petite et la plus grande valeur que puisse prendre V.

Si w est positif, il sera de même de V^0 et de V.

D'ailleurs comme MP est toujours compris entre R — OP et R + OP; on aura

$$V < \frac{R + OP}{(R - OP)^2} \int \frac{V^0 \, d\omega}{4\pi R}$$

et

$$V > \frac{R - OP}{(R + OP)^2} \int \frac{V^0 \, d\omega}{4\pi R}.$$

5° J'arrive au théorème de Harnack dont je ferai un fréquent usage et qui peut s'énoncer comme il suit :

Si une série

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$$

est convergente en un point intérieur à la sphère S, que tous ses termes soient positifs à l'intérieur de cette sphère et satisfassent tous à l'équation de Laplace, cette série sera uniformément convergente à l'intérieur de toute sphère intérieure elle-même à S.

Soit, en effet, V_i^0 la valeur de V_i en un point quelconque de la surface de S; d'après l'hypothèse V_i^0 sera essentiellement positif de sorte qu'on pourra écrire :

$$V_1 < \frac{R + OP}{(R - OP)^2} \int \frac{V_i^0 \, d\omega}{4\pi R}, \qquad V_i > \frac{R - OP}{(R + OP)^2} \int \frac{V_i^0 \, d\omega}{4\pi R}.$$

Si maintenant nous appelons V_i' la valeur de V_i au point O, centre de la sphère, on aura

$$V_i' = \int \frac{V_i^0 \, d\omega}{4\pi R^2},$$

d'où

$$V_i' \frac{R(R + OP)}{(R - OP)^2} > V_i > \frac{R(R - OP)}{(R + OP)^2} V_i',$$

ou si le point P est intérieur à une sphère s, concentrique à S et de rayon $r < R$,

$$\frac{R(R + r)}{(R - r)^2} V_i' > V_i > \frac{R(R - r)}{(R + r)^2} V_i'.$$

Si donc le point P est intérieur à s, chacun des termes positifs de la série

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$$

sera plus petit que le terme de la série convergente

$$V_1' + V_2' + \ldots + V_n' + \ldots$$

multiplié par le facteur constant

$$\frac{R(R + r)}{(R - r)^2}.$$

Si donc la série converge au point O, elle convergera en tous les points intérieurs à S, et la convergence sera uniforme à l'intérieur de s.

Il suffit d'ailleurs que la série converge en un point P quelconque pour qu'elle converge au point O; on a en effet :

$$V_i' < V_i \frac{(R + OP)^2}{R(R - OP)}.$$

Ainsi si la série converge en un point quelconque intérieur à S, elle convergera encore en tous les autres points intérieurs à S, et la convergence sera uniforme dans toute sphère intérieure à S.

Ce n'est pas tout; non seulement la série :

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$$

converge uniformément à l'intérieur de s; mais il en est de même des séries

$$\frac{dV_1}{dx} + \frac{dV_2}{dx} + \ldots + \frac{dV_n}{dx} + \ldots,$$

$$\frac{d^2V_1}{dx^2} + \frac{d^2V_2}{dx^2} + \ldots + \frac{d^2V_n}{dx^2} + \ldots,$$

$$\frac{d^2V_1}{dx\,dy} + \frac{d^2V_2}{dx\,dy} + \ldots + \frac{d^2V_n}{dx\,dy} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La démonstration est la même; et en effet la fonction V_i étant exprimée sous la forme d'une intégrale définie, une dérivée quelconque de V_i s'obtiendra sous la même forme par le procédé de la différentiation sous le signe $\int$; et l'on en déduira comme plus haut deux inégalités auxquelles cette dérivée devra satisfaire.

On en conclut qu'à l'intérieur de la sphère S, la somme de la série

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$$

est une fonction finie et continue ainsi que toutes ses dérivées et que cette fonction satisfait à l'équation de Laplace.

Le théorème démontré pour une sphère, s'étend aisément à une région R de l'espace.

Si dans la région R les fonctions

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_n, \quad \ldots$$

sont positives et satisfont à l'équation de Laplace.

Si en un point de cette région la série

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$$

converge, elle convergera dans toute la région et la somme sera une fonction finie et continue qui satisfera à l'équation de Laplace.

Ces préliminaires posés, je puis aborder le problème que j'ai en vue. Il s'agit de démontrer la possibilité de l'équilibre électrostatique à la surface d'un conducteur isolé.

Je supposerai qu'en chaque point de la surface de ce conducteur il y a un plan tangent déterminé et deux rayons de courbure principaux déterminés. Ces conditions restrictives ne sont pas toutes indispensables. Je préfère pourtant me les imposer d'abord et rechercher ensuite, par une courte discussion, quelles sont celles dont je puis me débarrasser.

On peut évidemment toujours trouver une sphère Σ telle que le conducteur soit contenu tout entier à l'intérieur de cette sphère.

On peut ensuite trouver un système de sphères en nombre infini

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \ldots$$

jouissant des deux propriétés suivantes : 1° Chacune de ces sphères sera tout entière extérieure au conducteur; 2° Tout point de l'espace extérieur au conducteur appartient au moins à une des sphères du système.

Cette proposition paraîtra presque évidente à qui voudra se donner la peine d'y réfléchir.

Nous croyons néanmoins devoir la démontrer en quelques mots.

Il s'agit de démontrer que l'on peut trouver à l'extérieur du conducteur une infinité de points

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n, \quad \ldots$$

tels que pour tout point M extérieur au conducteur, il y ait un point C_i plus rapproché du point M que de la surface du conducteur. Et, en effet, s'il en est ainsi et que du point C_i comme centre on décrive une sphère S_i ayant pour rayon la plus courte distance de C_i à la surface du conducteur, la sphère S_i sera tout entière extérieure au conducteur et le point M sera intérieur à la sphère S_i.

Cherchons donc à établir l'existence des points C_i.

Considérons d'abord une région finie R située à une distance finie de la surface du conducteur et soit δ la plus courte distance de la région R à cette surface. Cela posé considérons le triple système de plans :

$$x = \frac{m_1 \delta}{\sqrt{3}}, \qquad y = \frac{m_2 \delta}{\sqrt{3}}, \qquad z = \frac{m_3 \delta}{\sqrt{3}}$$

parallèles aux trois plans de coordonnées. Les trois quantités m_1, m_2, m_3 sont des nombres entiers positifs ou négatifs. Ces plans partageront l'espace en une infinité de cubes égaux dont la diagonale est égale à δ.

Ceux de ces cubes qui appartiendront en totalité ou en partie à la région R seront en nombre fini. Soient

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_n$$

ces cubes. A l'intérieur de chacun d'eux j'envisagerai un point appartenant à la région R ; j'obtiendrai ainsi n points

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n,$$

le point C_i appartenant à la fois au cube K_i et à la région R.

Si nous considérons maintenant un point M quelconque de la région R, ce point appartiendra à l'un de nos cubes, par exemple au cube K_i. La distance du point M au point C_i sera plus petite que δ diagonale du cube; la distance du point C_i à la surface du conducteur est elle-même plus grande que δ, puisque C_i appartient à R.

Donc tout point de R est plus rapproché de l'un des n points $C_1, C_2, \ldots, C_n$ que celui-ci ne l'est du conducteur.

Je partage maintenant l'espace extérieur au conducteur en une infinité de régions

$$\ldots, \quad R_{-n}, \quad R_{-n+1}, \quad \ldots, \quad R_{-2}, \quad R_{-1}, \quad R_0, \quad R_1, \quad \ldots, \quad R_n, \quad \ldots.$$

Chacune de ces régions est ainsi représentée par la lettre R affectée d'un indice qui peut varier depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. La région R_i se compose des points dont la plus courte distance à la surface du conducteur est comprise entre Q^i et Q^{i+1}. Dans chacune de ces régions je définirai les points $C_1, C_2, \ldots, C_n$ comme je l'ai dit plus haut. J'obtiendrai ainsi une infinité de points C. Il est clair alors que tout point extérieur au conducteur sera toujours plus près de l'un de ces points que celui-ci ne l'est lui-même de la surface du conducteur.

C. Q. F. D.

L'existence des sphères S_i *est donc établie.*

Il est clair qu'on pourrait construire ces sphères S_i d'une infinité d'autres manières et que celle que je viens d'exposer en détail dans le seul but de fixer les idées a été choisie d'une façon tout à fait arbitraire. La seule chose essentielle c'est que les sphères S_i, quoique en nombre infini, puissent être rangées en une série linéaire :

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \ldots.$$

où chacune d'elles ait un indice entier positif parfaitement déterminé, c'est-à-dire pour parler le langage de M. Cantor, que l'ensemble des sphères S_i soit de la 1re puissance.

L'ordre dans lequel ces sphères seront rangées dans la série linéaire

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \ldots$$

est d'ailleurs indifférent.

Il s'agit maintenant d'établir qu'il existe une fonction V finie et continue ainsi que toutes ses dérivées à l'extérieur du conducteur et satisfaisant à l'extérieur du conducteur à l'équation de Laplace; et de plus que cette fonction tend vers o quand le point (x, y, z) s'éloigne indéfiniment et vers 1 quand le point (x, y, z) se rapproche indéfiniment de la surface du conducteur.

Soit O le centre et R le rayon de la sphère Σ; imaginons une certaine quantité d'électricité positive distribuée uniformément à la surface de cette sphère avec une densité $\frac{1}{4\pi R}$. J'appelle V_0 le potentiel dû à cette électricité. Nous aurons

$$V_0 = 1$$

à l'intérieur de la sphère Σ et, en particulier, à l'intérieur du conducteur et

$$V_0 = \frac{R}{OM}$$

lorsque le point $M(x, y, z)$ est extérieur à Σ. On a dans tous les cas

$$0 < V_0 \leqq 1$$

et V_0 tend vers o quand le point M s'éloigne indéfiniment.

Nous allons faire maintenant une série d'opérations que je vais définir.

Nous avons vu plus haut que si une masse électrique P se trouve à l'intérieur d'une sphère S, on peut la remplacer par une masse égale distribuée à la surface de la sphère de façon que la densité en chaque point de cette surface soit en raison inverse du cube de la distance de ce point au point P. Le potentiel par rapport à un point extérieur à S n'est pas changé, le potentiel par rapport à un point intérieur est diminué.

On peut appeler cette couche électrique répandue à la surface de S la *couche équivalente* à la masse unique P.

Cela posé, supposons qu'on remplace toutes les masses électriques qui peuvent exister à l'intérieur d'une sphère S_i par la couche équivalente répandue à la surface de cette sphère. Le potentiel en un point extérieur à S_i ne changera pas, le potentiel en un point intérieur à S_i diminuera. Cette opération pourra s'appeler « balayer la sphère S_i ».

Nous partons de la masse électrique répandue sur Σ et dont le potentiel est V_0. Chacun des points de Σ appartenant à l'une des sphères S_i, quelques-unes de ces sphères contiendront de l'électricité; soit S_1 une de celles qui en contiennent; « balayons » cette sphère; balayons ensuite la sphère S_2 si cette sphère contient de l'électricité et ainsi de suite.

Il faut diriger les opérations de façon que chaque sphère soit balayée une infinité de fois. On peut par exemple balayer les sphères dans l'ordre suivant :

$$S_1\, S_2\, S_1\, S_2\, S_3\, S_1\, S_2\, S_3\, S_4\, S_1\, S_2\, S_3\, S_4\, S_5\, S_1\, S_2\, S_3\, S_4\, S_5\, S_6 \ldots$$

Il est aisé de constater que de cette façon chaque sphère est balayée une infinité de fois.

Soit ensuite V_1 ce que devient le potentiel V_0 après la première opération, V_2 ce que devient V_1 après la seconde opération; soit enfin V_n ce que devient le potentiel après n opérations.

Supposons que la $n^{\text{ième}}$ opération consiste à balayer la sphère S_k. On aura :

$$V_n = V_{n-1} \quad \text{à l'extérieur de } S_k,$$

$$V_n \quad V_{n-1} \quad \text{à l'intérieur de } S_k.$$

On aura donc dans tous les cas :

$$V_n \leqq V_{n-1}.$$

Cette inégalité montre qu'en un point quelconque de l'espace V_n est toujours décroissant (ou du moins toujours non-croissant) quand on fait croître l'indice n.

Il importe de remarquer qu'il n'y a aucun moment et en aucun point de masse électrique négative. Au début nous avons sur la sphère Σ une couche électrique uniforme et positive. Aucune des opérations subséquentes ne peut introduire de masses négatives. En effet, le balayage d'une sphère quelconque consiste à remplacer les masses électriques *positives* situées à l'intérieur de cette sphère par des couches équivalentes *positives* répandues à la surface de cette sphère.

On a donc

$$V_n > 0.$$

Ainsi en un point quelconque de l'espace V_n est toujours positif et décroissant. Donc quand n croît indéfiniment, V_n tend vers une limite finie et déterminée que j'appelle V. J'ai donc démontré l'existence d'une fonction V définie en tous les points de l'espace. Il reste à étudier les propriétés de cette fonction.

Considérons une quelconque des sphères S_i. Par hypothèse cette sphère sera balayée une infinité de fois. Supposons qu'elle le soit à la $\alpha_1^{\text{ième}}$ opération, à la $\alpha_2^{\text{ième}}$, ..., à la $\alpha_n^{\text{ième}}$, ... Après chacune de ces opérations, il n'y aura plus d'électricité à l'intérieur de S_i de sorte qu'on aura :

$$\Delta V_\alpha = 0 \qquad (\alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots).$$

Quand α_n croît indéfiniment, V_{α_n} tend vers V de sorte que la série :

$$V_{\alpha_1} + (V_{\alpha_2} - V_{\alpha_1}) + (V_{\alpha_3} - V_{\alpha_2}) + \ldots + (V_{\alpha_n} - V_{\alpha_{n-1}}) + \ldots$$

converge et a pour somme V. Chacun de ces termes satisfait à l'équation de Laplace; de plus chacun d'eux est négatif (sauf le premier) car on a :

$$V_{\alpha_n} < V_{\alpha_{n-1}} \quad \text{si, comme on le suppose,} \quad \alpha_n > \alpha_{n-1}.$$

Donc en vertu du théorème de Harnack la convergence est uniforme et les séries déduites de la précédente par différentiation convergent aussi uniformément. Donc à l'intérieur de S_i la fonction V est continue aussi que toutes ses dérivées et satisfait à l'équation de Laplace.

Mais par hypothèse tout point de l'espace extérieur au conducteur appartient au moins à l'une des sphères S_i.

Donc en tout point extérieur au conducteur, V et ses dérivées sont continues et l'on a :

$$\Delta V = 0.$$

Je dis que V tend vers o quand le point M s'éloigne indéfiniment. En effet, on a :

$$V_0 > V > 0.$$

Or V_0 tend vers o quand M s'éloigne indéfiniment, donc il en est de même de V.

Il reste à démontrer que V tend vers 1 quand le point M se rapproche indéfiniment de la surface du conducteur.

Soit donc M_0 un point de la surface du conducteur et supposons que le point M se rapproche indéfiniment de M_0. Par hypothèse il y a au point M_0 un plan tangent déterminé et deux rayons de courbure principaux déterminés. On peut donc construire une sphère σ tangente à la surface du conducteur en M_0 et dont le rayon r est assez petit pour que cette sphère soit tout entière contenue à l'intérieur du conducteur.

Soit C le centre de cette sphère. La fonction

$$\frac{M_0C}{MC} = \frac{r}{MC},$$

regardée comme fonction des coordonnées x, y, z du point M satisfait à l'équation de Laplace et se réduit à 1 à la surface de la sphère σ.

D'autre part, la fonction V_n est un potentiel dû à des masses électriques qui sont toutes positives. Il en résulte que cette fonction V_n peut avoir des maxima, mais ne peut avoir de minimum.

De plus V_n est égal à 1 en tous les points intérieurs au conducteur et en particulier sur toute la surface de σ. En effet cela est vrai de V_0, mais, en balayant l'une des sphères S_i, on ne change pas le potentiel à l'extérieur de cette sphère, ni par conséquent à l'intérieur du conducteur qui est tout entier extérieur, par hypothèse, à toutes les sphères S_i. On a donc à l'intérieur du conducteur

$$1 = V_0 = V_1 = \ldots = V_n = \ldots.$$

La différence

$$U = V_n - \frac{r}{MC}$$

est un potentiel dû aux masses électriques qui engendrent V_n et qui toutes sont positives et extérieures à σ, et à une masse $-r$ concentrée au point C et, par conséquent, intérieure à σ. Toutes celles de ces masses qui sont extérieures à σ sont positives. Donc à l'extérieur de σ, la fonction U ne peut avoir que des maxima et pas de minima. A la surface de σ, U est nul, car

$$V_n = \frac{r}{MC} = 1.$$

A l'infini, U est encore nul, car

$$V_n = \frac{r}{MC} = 0.$$

Donc à l'extérieur de σ, U ne peut être que positif, en sorte que l'on a :

$$V_n > \frac{r}{MC}.$$

Nous avons donc la double inégalité

$$1 > V_n > \frac{r}{MC},$$

qui à la limite devient :

$$1 \geq V \geq \frac{r}{MC} \geq \frac{r}{r + MM_0}.$$

Il est donc clair que quand la distance MM_0 tend vers 0, V tend vers 1.

C. Q. F. D.

La fonction V satisfait donc bien aux conditions que nous nous étions imposées et le *principe de Dirichlet est établi*.

Voyons maintenant si l'on peut se débarrasser des conditions restrictives que nous nous sommes imposées, à savoir que le plan tangent et les rayons de cour-

bure principaux sont déterminés. Nous ne nous sommes servis de ces conditions que pour établir l'existence de la sphère σ, tangente au conducteur et tout entière intérieure à ce conducteur. Cette sphère σ n'existera évidemment que si le plan tangent est déterminé; mais elle pourra exister encore en un point singulier où les rayons de courbure ne varieraient pas suivant les lois habituelles; nous n'aurions alors rien à changer à notre démonstration.

Nous n'avons donc qu'à examiner les points singuliers pour lesquels la sphère σ n'existerait pas. S'il y a sur la surface du conducteur de pareils points singuliers, nous ne pouvons pas encore affirmer que la fonction V tende vers 1 quand le point M se rapproche de l'un de ces points singuliers; remarquons toutefois que l'existence de ces points singuliers n'empêche pas V de tendre vers 1 quand M se rapproche d'un point non singulier de la surface.

Mais on peut aller plus loin; supposons que le principe de Dirichlet soit démontré pour un certain conducteur C'. Supposons ensuite que le conducteur donné C présente un point singulier M_0, et que l'on puisse construire un conducteur C'', semblable à C', dont la surface passe par M_0 et qui soit tout entier intérieur à C. Je dis que quand le point M se rapprochera de M_0, V tendra vers 1.

En effet le principe de Dirichlet établi pour C' l'est aussi pour C''; il existe donc une fonction V'' satisfaisant à l'équation de Laplace à l'extérieur de C'' et se réduisant à 0 à l'infini et à 1 à la surface de C''. Nous allons faire jouer alors au conducteur C'' le même rôle qu'à la sphère σ dans le cas précédemment examiné, On verrait comme plus haut que :

$$1 > V_{n} > V''$$

et, par conséquent, que :

$$1 > V > V''.$$

Or quand M tend vers M_0 :

$$\lim V'' = 1.$$

Donc

$$\lim V = 1. \qquad \text{C. Q. F. D}$$

Parmi ces points singuliers les plus intéressants sont les points coniques que nous allons étudier de plus près.

Je suppose qu'une partie de la surface du conducteur C soit une portion de cône de révolution. Soit M_0 le sommet de ce cône. Je dis que V tendra vers 1 quand le point M se rapprochera indéfiniment de M_0.

Mais pour cela il est nécessaire de démontrer le lemme suivant :

Soit S une sphère fixe, C un cercle fixe sur cette sphère, P un point fixe en dehors de la sphère. Soit maintenant E un ellipsoïde de révolution variable assujetti à rester tangent à la sphère S tout le long du cercle C. Soit V une fonction satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$ à l'extérieur de E et se réduisant à o à l'infini et à 1 à la surface de E. Soit V_0 la valeur de V au point P.

Je dis que V_0 tendra vers 1 quand le grand axe de E croîtra indéfiniment.

Désignons, en effet, par ρ et $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ les axes de l'ellipsoïde E, par $\rho + h$ et $\sqrt{(\rho + h)^2 - b^2}$ les axes de l'ellipsoïde E', homofocal à E et passant par P. On aura :

$$V_0 = \frac{L\frac{\rho + h - b}{\rho + h + b}}{L\frac{\rho - b}{\rho + b}} = \frac{L(\rho + b) + L\left(1 + \frac{h}{\rho + b}\right) - L(\rho + h - b)}{L(\rho + b) - L(\rho - b)}.$$

A la limite les ellipsoïdes E et E' se réduisent à deux paraboloïdes homofocaux P_1 et P'_1 faciles à construire.

Alors h tend vers une limite finie qui n'est autre que la distance des sommets des deux paraboloïdes; $\rho - b$ tend vers une limite finie qui est le demi-paramètre de P_1. On voit aussi que $L(\rho - b)$ et $L(\rho + h - b)$ tendent vers des limites finies, que $L\left(1 + \frac{h}{\rho + b}\right)$, tend vers o et que $L(\rho + b)$ croît indéfiniment. Par conséquent V_0 tend vers 1. C. Q. F. D.

Revenons maintenant à notre conducteur C dont une partie de la surface appartiendra à un cône de révolution de sommet M_0. Par le point M_0, et en dehors du cône faisons passer une droite M_0P et supposons que le point M se rapproche de M_0 en suivant cette droite; je dis que V tendra vers 1.

En effet, du point M je mène une normale au cône et par le pied de cette normale je fais passer un parallèle du cône de révolution. Je construis ensuite un ellipsoïde de révolution E qui soit tangent au cône tout le long de ce parallèle. Je ferai varier cet ellipsoïde de telle façon qu'il reste constamment tout entier à l'intérieur du conducteur C et que son grand axe reste fini quand le point M se rapproche indéfiniment de M_0. Cela est manifestement toujours possible.

Je construis ensuite un potentiel W qui se réduise à 1 à la surface de E. Soit W_0 la valeur de W au point M, on aura :

$$1 > V > W_0.$$

Construisons maintenant une figure homothétique de la précédente en prenant pour centre d'homothétie le point M_0, le cône de révolution sera son propre homothétique; l'homothétique de l'ellipsoïde E sera un ellipsoïde E' tangent au cône tout le long d'un parallèle; l'homothétique du point M sera un point M' de la droite M_0P. Nous choisirons le rapport d'homothétie de façon que M' soit fixe; alors l'ellipsoïde de révolution E sera tangent au cône tout le long d'un parallèle fixe.

Soit maintenant un potentiel W' qui se réduise à 1 à la surface de E'. Soit W'_0 la valeur de W' au point M'; on aura :

$$W_0 = W'_0.$$

Lorsque le point M se rapprochera de M_0, le rapport d'homothétie et, par conséquent, le grand axe de E' croîtront indéfiniment. Donc d'après le lemme W'_0 tendra vers 1. Donc W_0 et, par conséquent, V tendront aussi vers 1. C. Q. F. D.

Cela posé considérons maintenant un conducteur C quelconque, et un point singulier M_0 de ce conducteur; je supposerai qu'en ce point M_0 le plan tangent est déterminé, ou que ce point M_0 est un point conique ordinaire. Je pourrai alors construire un conducteur C'' formé par exemple d'une sphère et d'un cône de révolution circonscrit, ayant pour sommet M_0; je pourrai choisir l'angle du sommet du cône et le rayon de la sphère assez petits pour que C'' soit tout entier intérieur à C.

Le principe de Dirichlet est démontré pour C''; C'' est intérieur à C; nous devons en conclure, comme nous l'avons vu plus haut que V tend vers 1, quand M tend vers M_0.

Nous pouvons résumer cette discussion en disant que *le principe de Dirichlet est établi pour tout conducteur dont la surface est telle que le plan tangent en chaque point est déterminé sauf en un nombre limité de points coniques ordinaires.*

Comme méthode de démonstration, celle que je viens d'exposer ne laisse rien à désirer comme méthode de calcul; elle ne vaut pas mieux que celles qu'on a proposées jusqu'ici et même si le conducteur est convexe, elle est inférieure à celles de Neumann et de Robin. Mais même à ce point de vue, je ne regrette pas de l'avoir publiée; en effet, ainsi que nous l'avons vu, il ne faut guère compter que sur la première approximation si l'on veut pousser plus loin, même avec le procédé de Neumann, on serait conduit à des calculs trop rebutants.

Chaque méthode donnera donc seulement quelques inégalités, il n'est donc pas inutile de multiplier les méthodes; dans chaque cas particulier, un analyste habile saura choisir celle qui convient le mieux, ou mieux encore les combiner toutes d'une manière convenable.

A ce point de vue, la méthode que j'expose ici offrira à cet analyste habile d'assez grandes ressources à cause de son élasticité (si j'ose m'exprimer ainsi). Le choix des sphères $S_1, S_2, \ldots, S_n$ reste arbitraire dans une très large mesure; d'ailleurs on peut sans rien changer à la méthode remplacer la sphère Σ par d'autres surfaces, ou même prendre pour V_0 une fonction potentielle quelconque, pourvu qu'elle se réduise à 1 à l'intérieur du conducteur et que les masses électriques qui l'engendrent soient toutes positives.

On pourra encore remplacer les sphères S_i par d'autres surfaces, pourvu que l'on sache construire sur cette surface la couche équivalente à une masse électrique donnée intérieure à la surface. On conçoit qu'on pourra profiter de toutes ces facilités pour adapter le mieux possible la méthode à chaque cas particulier.

Parmi ces perfectionnements dont la méthode est susceptible, il en est un qui me paraît fort important. Nous avons construit les sphères S_i de façon que tout point extérieur au conducteur soit intérieur au moins à l'une de ces sphères.

Imaginons qu'on construise seulement assez de sphères S_i tout entières extérieures au conducteur, pour que tout point extérieur au conducteur et *intérieur à* Σ soit intérieur au moins à l'une de ces sphères. Les sphères S_i dont le rayon doit être fini dès qu'on est à une distance finie du conducteur, empiéteront d'ailleurs sur la région extérieure à Σ.

Dans ces conditions tout point de l'espace est ou bien intérieur au conducteur C, ou intérieur à l'une des sphères S_i, ou extérieur à Σ.

Il ne peut être à la fois intérieur à C et intérieur à S_i, ou bien intérieur à C et extérieur à Σ; mais il peut être à la fois intérieur à deux ou plusieurs des sphères S_i, ou intérieur à l'une ou plusieurs de ces sphères et extérieur à Σ. Nous avons vu plus haut comment on pouvait remplacer une masse électrique P intérieure d'une sphère Σ, c'est-à-dire par une couche électrique répandue à la surface de la sphère et dont le potentiel soit égal à celui de la masse P à l'extérieur de Σ et plus petit à l'intérieur.

Je dis maintenant qu'on peut également remplacer une masse électrique Q *extérieure* à la sphère Σ par une couche équivalente, c'est-à-dire par une couche électrique répandue à la surface de Σ, et dont le potentiel soit égal à celui de la masse Q à *l'intérieur* de Σ et plus petit à l'extérieur.

En effet, soit O le centre de Σ et R son rayon; soient P et Q deux points situés sur un même rayon vecteur OP et tels que :

$$\mathrm{OP}.\mathrm{OQ} = \mathrm{R}^2.$$

Supposons que P soit intérieur à Σ; Q sera extérieur à Σ.

Considérons deux masses l'une égale à 1 et placée en P, l'autre égale à $-\sqrt{\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}}$ et placée en Q. Nous avons vu que le potentiel dû à ces deux masses était une fonction U, nulle à la surface de Σ, positive à l'intérieur de Σ et négative à l'extérieur.

Soit W le potentiel de la couche équivalente à la masse P répandue à la surface de Σ. D'après ce que nous avons vu, nous aurons :

$$\text{à l'extérieur de } \Sigma : \quad \frac{1}{\mathrm{MP}} - \mathrm{W} = 0, \qquad \frac{1}{\mathrm{MP}} < \sqrt{\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}}\,\frac{1}{\mathrm{MQ}}$$

et

$$\text{à l'intérieur de } \Sigma : \quad \frac{1}{\mathrm{MP}} - \mathrm{W} = \frac{1}{\mathrm{MP}} - \sqrt{\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}}\,\frac{1}{\mathrm{MQ}} > 0.$$

La lettre M désigne toujours le point de coordonnées courantes x, y, z.

Ces égalités montre que l'on a

$$\text{à l'extérieur de } \Sigma : \quad \mathrm{W} < \sqrt{\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}}\,\frac{1}{\mathrm{MQ}},$$

$$\text{à l'intérieur de } \Sigma : \quad \mathrm{W} = \sqrt{\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}}\,\frac{1}{\mathrm{MQ}}.$$

Par conséquent, la couche équivalente à la masse intérieure 1 située en P est aussi équivalente à la masse extérieure $\sqrt{\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}}$ située en Q.

Il importe de remarquer une différence essentielle entre les deux cas; nous savons que la masse totale de la couche équivalente à la masse 1 située en P est égale à 1 et, par conséquent, plus petite que $\sqrt{\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}}$, c'est-à-dire que la masse extérieure située en Q.

Ainsi la couche équivalente à une masse *intérieure* a une masse totale *égale* à cette masse; la couche équivalente à une masse *extérieure* a une masse totale *plus petite* que cette masse.

A côté des opérations dont il a été question plus haut et qui consistent à « balayer » l'intérieur des sphères S_i, nous pourrons introduire une opération nouvelle que nous pourrons appeler le balayage de l'extérieur de Σ.

Cette opération consistera à remplacer toutes les masses extérieures à Σ par la couche équivalente répandue à la surface de cette sphère.

Cela posé on fera une série de balayages successifs en partant de la fonction V_0 et en ayant soin de diriger les opérations de telle façon que l'intérieur de chacune des sphères S_i, ainsi que l'extérieur de Σ, soient balayés une infinité de fois.

Les raisonnements que nous avons faits plus haut sont encore applicables et l'on obtiendra une série de fonctions

$$V_0, \quad V_1, \quad \ldots, \quad V_n, \quad \ldots$$

qui convergeront de la fonction cherchée V.

Seulement l'approximation sera plus rapide, parce que chaque balayage de l'extérieur de Σ, peut remplacer le balayage d'une infinité de sphères S_i qui devraient, dans la méthode primitive, remplir l'espace infini extérieur à Σ.

De plus, nous devons observer que dans la méthode primitive, chaque balayage laissait subsister la même quantité totale d'électricité dans l'espace; au contraire, dans la méthode nouvelle, cette quantité totale diminue après chaque balayage de l'extérieur de Σ.

La méthode nouvelle se prête, par conséquent, mieux que la première au calcul des capacités.

Nous avons vu que le problème général de Dirichlet se ramène au cas que nous venons de traiter. Nous pourrions donc nous dispenser d'étudier directement ce cas général. Cependant je vais montrer que la méthode exposée ci-dessus y est directement applicable.

Soit donc C une surface partageant l'espace en deux régions, l'une extérieure à la surface, l'autre intérieure. Soit U une fonction quelconque, bien déterminée en tous les points de C.

Nous nous proposons de trouver une fonction V :

1° qui est finie et continue ainsi que ses dérivées tant à l'extérieur de C qu'à l'intérieur, mais qui peut devenir discontinue sur la surface C elle-même;

2° qui satisfasse à l'équation de Laplace tant à l'extérieur de C qu'à l'intérieur, mais qui peut cesser d'y satisfaire sur la surface C elle-même;

3° qui tende vers O quand le point M de coordonnées courantes x, y, z s'éloigne indéfiniment;

4° qui tende vers U quand le point M se rapproche indéfiniment d'un point de C, soit par l'intérieur, soit par l'extérieur.

1[er] *cas.* — Supposons qu'on puisse trouver une fonction V_0 finie et continue dans tout l'espace ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres ; qui soit égale à o à l'infini et à U à la surface de C et qui soit telle que ΔV_0 soit constamment négatif.

Une pareille fonction pourra être regardée comme un potentiel dû à de l'électricité répandue dans tout l'espace et dont la densité $-\frac{\Delta V_0}{4\pi}$ sera partout positive.

Nous n'avons donc encore ici que des masses électriques positives.

Construisons maintenant une infinité de sphères $S_1, S_2, \ldots, S_n$, de telle façon que chacune de ces sphères soit tout entière extérieure à la surface C et que tout point de l'espace, extérieur à C, soit intérieur au moins à l'une des sphères S_i.

Balayons ensuite, comme il a été dit plus haut, ces diverses sphères S_i en dirigeant les opérations de telle sorte que chacune d'elles soit balayée une infinité de fois.

Soit V_n ce que devient V_0 après la $n^{\text{ième}}$ opération ; on aura encore, puisque toutes les masses électriques sont positives :

$$V_{n+1} < V_n \quad \text{et} \quad V_n > 0,$$

ce qui montre que quand n croît indéfiniment, V_n tend vers une limite finie et déterminée que j'appelle V. Pour un point intérieur à C on a $V_n = V_0$.

On verrait, comme plus haut, qu'à l'intérieur de chacune des sphères S_i, et par conséquent pour tout point extérieur à C, la fonction V est finie et continue ainsi que ses dérivées et satisfait à l'équation de Laplace.

On verrait également que V tend vers o quand le point M s'éloigne indéfiniment. Il me reste à montrer que V tend vers U quand le point M se rapproche de la surface C.

Nous supposerons pour fixer les idées que le point M se rapproche indéfiniment d'un point M_0 de la surface C en restant extérieur à cette surface.

Nous construirons une sphère σ tangente à la surface C en M_0 et de rayon assez petit pour être tout entière intérieure à C.

Le principe de Dirichlet étant démontré pour une sphère, nous pourrons construire une fonction W qui à l'extérieur de la sphère satisfasse à l'équation $\Delta W = 0$, qui se réduise à o à l'infini, et à V_0 à la surface de la sphère.

Quand le point M tendra vers M_0, la fonction W tendra vers V_0 et, par conséquent, vers U.

Comparons les fonctions V_n et W.

A la surface de σ, on a :

$$V_n = V_0 = W.$$

A l'infini, on a :

$$V_n = 0 \quad = W.$$

Maintenant V_n et W sont deux potentiels; le premier est engendré par des masses électriques toutes positives et dont quelques-unes sont extérieures à σ; le second par des masses qui sont toutes intérieures à σ.

Donc à l'extérieur de σ la différence $V_n - W$ peut avoir des maxima, mais pas de minima; et comme elle est nulle à la surface de σ elle sera toujours positive. On a donc :

$$V_0 > V_n > W$$

et, par conséquent, à la limite

$$V_0 > V > W.$$

Quand M tend vers M_0, V_0 et W tendent tous deux vers U. Donc V tend aussi vers U. C. Q. F. D.

Le principe de Dirichlet est ainsi établi pour la région extérieure à C; on le démontrerait absolument de la même manière pour la région intérieure.

2[e] *cas.* — Supposons maintenant qu'on puisse trouver une fonction V_0 qui soit finie et continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, qui se réduise à o à l'infini et à U à la surface de C. (Nous ne supposons donc plus que ΔV_0 est toujours négatif). On pourra trouver une fonction V_0 satisfaisant à ces conditions toutes les fois que *la fonction* U *sera elle-même finie et continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres.*

La fonction V_0 pourra être regardée comme un potentiel engendré par des masses électriques répandues dans tout l'espace avec une densité $-\frac{\Delta V_0}{4\pi}$. Seulement comme ΔV_0 n'est pas toujours négatif, les masses ne seront pas toutes positives. Nous pourrons alors écrire :

$$V_0 = V'_0 - V''_0,$$

V'_0 étant le potentiel dû aux masses positives seulement, et V''_0 le potentiel dû seulement aux masses négatives changées de signe.

Soient U' et U'' les valeurs de V'_0 et V''_0 à la surface de C, on aura :

$$U = U' - U''.$$

V'_0 et V''_0 n'étant engendrés que par des masses positives, on pourra, comme nous venons de le voir, construire des fonctions V' et V'' qui satisferont à l'équation de Laplace à l'extérieur de C et qui se réduiront respectivement à U' et à U'' à la surface de C.

La différence

$$V = V' - V''$$

satisfera à l'équation $\Delta V = 0$ et se réduira à U à la surface de C.

Le principe de Dirichlet est donc encore ici établi.

3[e] *cas.* — Il nous reste à examiner le cas où la fonction U n'est plus continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres.

Bien des méthodes s'offrent à nous pour généraliser les résultats obtenus dans les deux premiers cas.

Je ferai d'abord observer que si la fonction U est elle-même continue et si ses dérivées du 1[er] ordre ne présentent de discontinuités que le long de certaines courbes analytiques tracées sur la surface C, les démonstrations dont j'ai fait usage dans les deux premiers cas peuvent se répéter sans qu'on ait rien à y changer.

Passons au cas général; nous pourrons trouver deux séries indéfinies de fonctions

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_n, \quad \ldots; \qquad U'_1, \quad U'_2, \quad \ldots, \quad U'_n,$$

qui à la surface de C jouissent des propriétés suivantes :

1° Elles sont finies et continues ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres;

2° On a :

$$U_{n+1} > U_n, \qquad U'_{n+1} < U'_n, \qquad U'_n > U_n;$$

3° On a :

$$\lim U_n = \lim U'_n = U \quad \text{pour } n \text{ infini.}$$

(Cela n'aura lieu que pour les points de C dans le voisinage desquels U est continue).

Nous pourrons alors construire deux séries de fonctions

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, V_n, \quad \ldots; \quad V'_1, \quad V'_2, \quad \ldots, \quad V'_n$$

telles que

$$\Delta V_n = 0, \quad \Delta V'_n = 0$$

à l'extérieur de C et

$$V_n = U_n, \quad V'_n = U'_n$$

à la surface de C. On aura alors :

$$V_{n+1} > V_n, \quad V'_{n+1} < V'_n, \quad V'_n > V_n.$$

Nous conclurons de là que V_n tend vers une limite finie et déterminée V.

Le théorème de Harnack montre que l'on a :

$$\Delta V = 0. \quad \text{D'ailleurs} \quad V'_n > V > V_n.$$

Il reste à montrer que V tend vers U quand le point M se rapproche indéfiniment d'un point M_0 de la surface de C. Pour cela, il faut que dans le voisinage de M_0 la fonction U soit continue, sans quoi la proposition qu'il s'agit de démontrer serait fausse et n'aurait même pas de sens.

Nous voulons démontrer que l'on peut prendre M assez voisin de M_0 pour que

$$U - \varepsilon < V < U + \varepsilon$$

quelque petit que soit ε.

Comme au point M_0, U est continu, U_n et U'_n tendent vers une limite commune U quand n croît indéfiniment. Nous pourrons donc prendre n assez grand pour que :

$$U'_n - U_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où *a fortiori*

$$U'_n - U < \frac{\varepsilon}{2}, \quad U - U_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous regardons n comme désormais déterminé, nous pourrons prendre M assez voisin de M_0 pour que :

$$V_n > U_n - \frac{\varepsilon}{2}, \quad V'_n < U'_n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors :

$$V > V_n > U_n - \frac{\varepsilon}{2} > U - \varepsilon$$

et

$$V < V'_n < U'_n + \frac{\varepsilon}{2} < U + \varepsilon.$$

C. Q. F. D.

2. — Problème de Fourier.

Le problème de Fourier a pour objet l'étude du refroidissement d'un corps solide rayonnant. J'ai donné de ce problème, dans une Note insérée aux *Comptes rendus*, une solution plus rigoureuse et plus complète que celles qui ont été proposées jusqu'ici. Bien qu'elle ne soit pas encore entièrement satisfaisante, je crois qu'il ne sera pas inutile de la rappeler et de la développer ici; car elle va nous servir de point de départ naturel pour ce qui va suivre.

Considérons un corps solide homogène et isotrope, isolé dans un milieu indéfini à travers lequel la chaleur se propage par rayonnement. Soit V la température d'un point du corps; ce sera une fonction de x, y, z et t; soit zéro la température extérieure. On aura, à l'intérieur du corps :

$$\frac{dV}{dt} = a^2 \Delta V \tag{1}$$

et à la surface du corps

$$\frac{dV}{dn} + hV = 0. \tag{2}$$

a^2 est un coefficient constant qui dépend de la conductibilité du corps et de sa chaleur spécifique. Quant à h c'est un coefficient positif et constant qui dépend du pouvoir émissif du corps.

Le premier point est d'établir l'existence d'une infinité de fonctions auxiliaires

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_n, \quad \ldots$$

ne dépendant que de x, y, z et satisfaisant aux équations suivantes :

On aura à l'intérieur du corps :

$$\Delta U_n + k_n U_n = 0$$

et à la surface :

$$\frac{dU_n}{dn} + h U_n = 0.$$

Les quantités

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n, \quad \ldots$$

sont des coefficients constants que je supposerai rangés par ordre de grandeur croissante et que je déterminerai plus complètement dans la suite.

Enfin pour achever de définir la fonction U_n, nous ajouterons que l'intégrale

$$\int U_n^2 \, d\tau$$

étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ du corps solide doit être égale à 1. Nous allons pour démontrer l'existence des fonctions U_n employer une démonstration analogue à celle par laquelle Riemann établit le principe de Dirichlet.

Soit F une fonction quelconque et posons :

$$A = \int F^2 \, d\tau,$$

$$B = h \int F^2 \, d\omega + \int \left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2 \right] d\tau.$$

L'intégrale A ainsi que la seconde des intégrales de l'expression B sont étendues à tous les éléments $d\tau$ du volume du solide et l'intégrale $\int F^2 \, d\omega$ à tous les éléments $d\omega$ de sa surface.

Supposons que la fonction F soit assujettie à la condition

$$A = 1.$$

Les deux intégrales de l'expression B ont tous leurs éléments positifs. B ne peut donc devenir négatif. B ne peut non plus devenir nul; en effet il ne pourrait s'annuler que si tous les éléments des deux intégrales étaient nuls à la fois, c'est-à-dire si l'on avait :

$$F = 0$$

à la surface du corps et

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dz} = 0$$

à l'intérieur du corps. Il faudrait donc que F fut encore nul à l'intérieur du corps, ce qui est impossible à cause de la condition :

$$A = \int F^2 \, d\tau = 1.$$

B admettra donc un minimum absolu. Soit U_1 la valeur de F qui correspond à ce minimum. Le calcul des variations nous donne :

$$\frac{1}{2} \delta A = \int U_1 \, \delta U_1 \, d\tau = 0,$$

$$\frac{1}{2} \delta B = h \int U_1 \, \delta U_1 \, d\omega + \int \left(\frac{dU_1}{dx} \frac{d\delta U_1}{dx} + \frac{dU_1}{dy} \frac{d\delta U_1}{dy} + \frac{dU_1}{dz} \frac{d\delta U_1}{dz} \right) d\tau = 0.$$

Or le théorème de Green nous donne :

$$\int\left(\frac{dU_1}{dx}\frac{d\delta U_1}{dx}+\frac{dU_1}{dy}\frac{d\delta U_1}{dy}+\frac{dU_1}{dz}\frac{d\delta U_1}{dz}\right)d\tau=\int\frac{dU_1}{dn}\delta U_1\,d\omega-\int\Delta U_1\,\delta U_1\,d\tau$$

de sorte qu'il vient :

$$\frac{1}{2}\delta B=\int\left(h\,U_1+\frac{dU_1}{dn}\right)\delta U_1\,d\omega-\int\Delta U_1\,\delta U_1\,d\tau=0.$$

δB doit s'annuler toutes les fois que δA s'annule. On doit donc, d'après l'une des règles du calcul des variations, pouvoir trouver une constante k_1 telle que

$$\delta B-k_1\,\delta A$$

soit nulle quel que soit δU_1. On doit donc avoir identiquement :

$$\int\left(\frac{dU_1}{dn}+h\,U_1\right)\delta U_1\,d\omega-\int(\Delta U_1+k_1 U_1)\,\delta U_1\,\delta\tau=0,$$

ce qui exige que tous les éléments des deux intégrales soient nuls ou que l'on ait à la surface du corps

$$\frac{dU_1}{dn}+h\,U_1=0$$

et à l'intérieur :

$$\Delta U_1+k_1 U_1=0.$$

On a d'ailleurs par hypothèse :

$$A=\int U_1^2\,d\tau=1.$$

L'existence de la fonction U_1 *est donc démontrée.*

On trouve :

$$B=h\int U_1^2\,d\omega+\int\left[\left(\frac{dU_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{dU_1}{dy}\right)^2+\left(\frac{dU_1}{dz}\right)^2\right]d\tau$$

ou en vertu du théorème de Green :

$$B=\int U_1\left(\frac{dU_1}{dn}+h\,U_1\right)d\omega-\int U_1\,\Delta U_1\,d\tau$$

ou en vertu des équations qui définissent U_1 :

$$B=k_1\int U_1^2\,d\tau=k_1.$$

Ainsi k_1 n'est autre chose que la valeur du rapport $\frac{B}{A}$ pour $F=U_1$. Comme ce

rapport atteint son minimum pour $F = U_1$, nous devons conclure que k_1 est le minimum du rapport $\frac{B}{A}$.

Prenons pour F une valeur quelconque, nous obtiendrons une certaine valeur de $\frac{B}{A}$ qui sera plus grande que k_1. C'est donc un moyen de trouver une limite supérieure de k_1.

Faisons, par exemple,

$$F = 1.$$

Il vient :

$$A = \int d\tau = \text{volume du corps solide},$$

$$B = h\int d\omega = h \times \text{surface du corps solide}.$$

Le rapport $\frac{k_1}{h}$ est donc toujours plus petit que le rapport de la surface du solide à son volume.

Cherchons encore une autre inégalité.

Appelons W le volume du corps solide et S sa surface.

Prenons pour origine des coordonnées le centre de gravité du volume du corps.

Appelons I l'intégrale

$$\int x^2\,d\tau,$$

c'est-à-dire le moment d'inertie du volume par rapport au plan des yz.

Appelons H l'intégrale

$$\int x^2\,d\omega,$$

c'est-à-dire le moment d'inertie de la surface par rapport au plan des yz. Soit x_0 la distance du centre de gravité de la surface au plan des yz. Posons :

$$M = x_0 S = \int x\,d\omega.$$

Faisons maintenant :

$$F = \alpha x + 1,$$

α étant une indéterminée; il viendra :

$$A = \int (\alpha x + 1)^2\,d\tau = \alpha^2 I + W,$$

$$B = h\int (\alpha x + 1)^2\,d\omega + \int \alpha^2\,d\tau = \alpha^2(hH + W) + 2\alpha M h + S h,$$

d'où :

$$k_1 < \frac{\alpha^2(h\mathrm{H} + \mathrm{W}) + 2\alpha\mathrm{M}h + \mathrm{S}h}{\alpha^2\mathrm{I} + \mathrm{V}}.$$

Il faut maintenant choisir α de telle sorte que le second membre de cette inégalité soit minimum. Ce second membre admet un maximum et un minimum qui sont les racines de l'équation en λ :

$$\mathrm{M}^2h^2 = (h\mathrm{H} + \mathrm{W} - \lambda\mathrm{I})(\mathrm{S}h - \lambda\mathrm{W})$$

ou

$$\lambda^2\mathrm{IV} - \lambda(\mathrm{IS}h + \mathrm{W}^2 + \mathrm{WH}h) + \mathrm{SH}h^2 - \mathrm{M}^2h^2 + \mathrm{WS}h = 0.$$

On a donc :

$$k_1 < \frac{\mathrm{IS}h + \mathrm{W}^2 + \mathrm{WH}h}{2\mathrm{IW}} - \frac{\sqrt{(\mathrm{IS}h + \mathrm{WH}h + \mathrm{W}^2)^2 - \mathrm{SH}h^2 + \mathrm{M}^2h^2 - \mathrm{WS}h}}{2\mathrm{IW}}$$

cette limite est inférieure à la précédente.

Occupons-nous maintenant de démontrer l'existence de la fonction U_2; soit une fonction quelconque F assujettie aux deux conditions suivantes :

$$\mathrm{A} = 1, \qquad \mathrm{C} = \int \mathrm{FU}_1\, d\tau = 0.$$

On pourra choisir cette fonction de façon que B soit minimum; soit U_2 la fonction qu'il faut choisir pour F afin de rendre B minimum. On devra avoir :

$$\frac{1}{2}\delta\mathrm{B} = \int \left(h\mathrm{U}_2 + \frac{d\mathrm{U}_2}{dn}\right)\delta\mathrm{U}_2\, d\omega - \int \Delta\mathrm{U}_2\,\delta\mathrm{U}_2\, d\tau = 0$$

toutes les fois que :

$$\frac{1}{2}\delta\mathrm{A} = \int \mathrm{U}_2\,\delta\mathrm{U}_2\, d\tau = 0, \qquad \delta\mathrm{C} = \int \mathrm{U}_1\,\delta\mathrm{U}_2\, d\tau = 0.$$

On pourra donc trouver deux constantes λ_1 et k_2 telles que :

$$\delta\mathrm{B} - k_2\,\delta\mathrm{A} - 2\lambda_1\,\delta\mathrm{C} = 0$$

quel que soit $\delta\mathrm{U}_2$. On a donc identiquement :

$$\int \left(h\mathrm{U}_2 + \frac{d\mathrm{U}_2}{dn}\right)\delta\mathrm{U}_2\, d\omega - \int (\Delta\mathrm{U}_2 + k_2\mathrm{U}_2 + \lambda_1\mathrm{U}_1)\,\delta\mathrm{U}_2\, d\tau = 0$$

de sorte qu'on aura à la surface du corps

$$h\mathrm{U}_2 + \frac{d\mathrm{U}_2}{dn} = 0$$

et à l'intérieur :

$$\Delta U_2 + k_2 U_2 + \lambda_1 U_1 = 0.$$

Calculons λ_1 et k_2. Nous trouvons d'abord :

$$\int U_1 \Delta U_2 \, d\tau + k_2 \int U_1 U_2 \, d\tau + \lambda_1 \int U_1^2 \, d\tau = 0.$$

Or

$$\int U_1^2 \, d\tau = 1, \qquad C = \int U_1 U_2 \, d\tau = 0,$$

on aura donc :

$$\lambda_1 + \int U_1 \Delta U_2 \, d\tau = 0.$$

Or le théorème de Green donne :

$$\int U_1 \Delta U_2 \, d\tau - \int U_2 \Delta U_1 \, d\tau = \int U_1 \frac{dU_2}{dn} \, d\omega = \int U_2 \frac{dU_1}{dn} \, d\omega.$$

Mais

$$\frac{dU_2}{dn} = -h U_2, \qquad \frac{dU_1}{dn} = -h U_1.$$

Il reste donc simplement :

$$\int U_1 \Delta U_2 \, d\tau = \int U_2 \Delta U_1 \, d\tau.$$

Mais

$$\Delta U_1 = -k_1 U_1.$$

Donc

$$\lambda_1 = \int U_1 \Delta U_2 \, d\tau = -k_1 \int U_1 U_2 \, d\tau = 0.$$

Donc λ_1 est nul.

Il vient donc :

$$\Delta U_2 + k_2 U_2 = 0$$

d'où :

$$\int U_2 \Delta U_2 \, d\tau + k_2 \int U_2^2 \, d\tau = 0.$$

Or

$$A = \int U_2^2 \, d\tau = 1.$$

Donc :

$$k_2 = -\int U_2 \Delta U_2 \, d\tau = -\int U_2 \frac{dU_2}{dn} \, d\omega + \int \left[\left(\frac{dU_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dU_2}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dU_2}{dz} \right)^2 \right] d\tau$$

ou :

$$k_2 = h\int U_2^2\, d\omega + \int \Sigma \left(\frac{dU_2}{dx}\right)^2 d\tau = B.$$

Ainsi k_2 n'est autre chose que la valeur de B qui correspond à $F = U_2$. k_1 était la valeur de B qui correspond à $F = U_1$ et au minimum de B.

Par conséquent, on a :

$$k_1 < k_2$$

et d'ailleurs :

$$\frac{dU_2}{dn} + hU_2 = 0 \quad \text{à la surface du corps,}$$

$$\Delta U_2 + k_2 U_2 = 0 \quad \text{à l'intérieur,}$$

$$\int U_2^2\, d\tau = 1, \qquad \int U_1 U_2\, d\tau = 0.$$

L'existence de la fonction U_2 est donc démontrée.

Soit maintenant U_3 une fonction telle que

$$A = \int U_3^2\, d\tau = 1, \qquad C = \int U_3 U_1\, d\tau = 0, \qquad D = \int U_3 U_2\, d\tau = 0$$

et choisie d'ailleurs de telle sorte que B soit aussi petit que possible.

On devra avoir :

$$\delta B = 0$$

toutes les fois que

$$\delta A = 0, \qquad \delta C = 0, \qquad \delta D = 0.$$

On pourra donc trouver trois constantes λ_1, λ_2 et k_3 telles que l'on ait identiquement :

$$\delta B - k_3\, \delta A - 2\lambda_1\, \delta C - 2\lambda_2\, \delta D = 0.$$

Un raisonnement analogue à celui qui précède montrerait que l'on doit avoir à la surface du corps

$$\frac{dU_3}{dn} + hU_3 = 0$$

et à l'intérieur

$$\Delta U_3 + k_3 U_3 + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0.$$

On démontrerait ensuite comme on l'a fait plus haut que λ_1 et λ_2 sont nuls et que k_3 est la valeur de B qui correspond à $F = U_3$.

D'après la définition de U_3, k_3 est donc la plus petite valeur que puisse prendre l'expression B quand la fonction F est assujettie aux conditions :

$$\int F^2\, d\tau = 1; \qquad \int FU_1\, d\tau = 0; \qquad \int FU_2\, d\tau = 0.$$

D'autre part, k_2 était la plus petite valeur que pouvait prendre B quand F était assujettie aux deux premières de ces conditions seulement. Donc :

$$k_3 > k_2.$$

La fonction U_3 est ainsi définie par les conditions :

$$\frac{dU_3}{dn} + hU_3 = 0, \qquad \Delta U_3 + k_3 U_3 = 0,$$

$$\int U_3^2 \, d\tau = 1; \qquad \int U_3 U_1 \, d\tau = \int U_3 U_2 \, d\tau = 0.$$

La loi est manifeste ; il est inutile de pousser plus loin ce raisonnement. On voit que l'on a démontré l'existence d'une infinité de fonctions :

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_p, \quad \ldots$$

telles que l'on a à la surface du corps

$$\frac{dU_p}{dn} + hU_p = 0$$

et à l'intérieur :

$$\Delta U_p + k_p U_p = 0.$$

Les coefficients k_p sont des constantes positives et telles que :

$$k_{p+1} > k_p.$$

Enfin on a :

$$\int U_p U_q \, d\tau = 0 \qquad \text{pour } p \gtrless q$$

et

$$\int U_p^2 \, d\tau = 1.$$

Ce raisonnement est sujet aux mêmes objections que celui par lequel Riemann établit le principe de Dirichlet. Nous nous en contenterons toutefois pour le moment, nous chercherons dans la suite à le rendre plus rigoureux.

Ces fonctions U_p ont été entièrement construites par Lamé dans certains cas particuliers, par exemple dans celui de la sphère et celui du parallélépipède.

Dans celui du parallélépipède rectangle dont les trois dimensions parallèles aux trois axes sont $2a$, $2b$ et $2c$, l'expression des fonctions U_p et des coefficients k_p est particulièrement simple.

Nous devons avoir en effet à l'intérieur du corps :

$$\Delta U + kU = 0$$

et, en outre,

$$\text{pour } x = a \quad \frac{dU}{dx} + hU = 0, \qquad \text{pour } x = -a \quad \frac{dU}{dx} - hU = 0,$$

$$\text{pour } y = b \quad \frac{dU}{dy} + hU = 0, \qquad \text{pour } y = -b \quad \frac{dU}{dy} - hU = 0,$$

$$\text{pour } z = c \quad \frac{dU}{dz} + hU = 0, \qquad \text{pour } z = -c \quad \frac{dU}{dz} - hU = 0.$$

Posons :

$$U = \sin(\lambda_1 x + \mu_1)\sin(\lambda_2 x + \mu_2)\sin(\lambda_3 x + \mu_3).$$

Les constantes λ_1 et μ_1 nous seront données par les deux équations :

$$\lambda_1 \cos(\lambda_1 a + \mu_1) + h \sin(\lambda_1 a + \mu_1) = 0,$$

$$\lambda_1 \cos(\lambda_1 a - \mu_1) + h \sin(\lambda_1 a - \mu_1) = 0,$$

d'où :

$$\operatorname{tg}(\lambda_1 a + \mu_1) = \operatorname{tg}(\lambda_1 a - \mu_1),$$

$$\mu_1 = \frac{\varkappa\pi}{2},$$

$\varkappa$ étant un entier; il suffira de prendre $\varkappa = 0$, d'où :

$$\sin(\lambda_1 x + \mu_1) = \sin \lambda_1 x,$$

et $\varkappa = 1$, d'où :

$$\sin(\lambda_1 x + \mu_1) = \cos \lambda_1 x.$$

On aura alors pour

$$\mu_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2}, \qquad \lambda_1 + h \operatorname{tg}(\lambda_1 a + \mu_1) = 0.$$

De même, μ_2, μ_3, λ_2 et λ_3 seront données par les équations :

$$\mu_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2}, \qquad \lambda_2 + h \operatorname{tg}(\lambda_2 b + \mu_2) = 0,$$

$$\mu_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2}, \qquad \lambda_3 + h \operatorname{tg}(\lambda_3 c + \mu_3) = 0.$$

Enfin on a :

$$k = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

Considérons en particulier le cas de $h = 0$; ce qui correspond au cas où la surface du corps est imperméable à la chaleur; il vient

$$\operatorname{tg}(\lambda_1 a + \mu_1) = \infty,$$

d'où :

$$\lambda_1 a + \mu_1 = \frac{\pi}{2} + \varkappa\pi \qquad (\varkappa \text{ étant entier})$$

ou, à cause de $\mu_1 = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$,

$$\lambda_1 = \frac{m_1 \pi}{2a} \qquad (m_1 \text{ étant entier}).$$

On a alors :

$$k = \left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} + \frac{m_3^2}{c^2} \right) \frac{\pi^2}{4},$$

où m_1, m_2, m_3 sont des entiers. On aura donc :

$$k_1 = 0, \qquad k_2 = \frac{\pi^2}{4a^2}$$

si $2a$ est la plus grande des trois dimensions du parallélépipède, c'est-à-dire si

$$a > b > c.$$

On trouve ainsi

$$k_1 = 0, \qquad U_1 = \text{const.}$$

et

$$k_2 = \frac{\pi^2}{4a^2}, \qquad U_2 = \text{const.} \sin \lambda_1 x.$$

Supposons maintenant $h = \infty$, ce qui correspond au cas où la surface du corps est maintenue artificiellement à la température 0 ; on a alors :

$$\operatorname{tg}(\lambda_1 a + \mu_1) = \infty,$$

d'où

$$\lambda_1 a + \mu_1 = \alpha\pi \qquad (\alpha \text{ étant entier}),$$

ou puisque $\mu_1 = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$,

$$\lambda_1 a = m_1 \frac{\pi}{2} \qquad (m_1 \text{ étant entier}).$$

Nous trouvons donc encore :

$$k = \left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} + \frac{m_3^2}{c^2} \right) \frac{\pi^2}{4},$$

m_1, m_2 et m_3 étant entiers.

Mais toutes les solutions ne sont pas acceptables. On doit avoir, en effet,

$$U = 0$$

à la surface du corps ; d'où

$$\sin(\lambda_1 a + \mu_1) = \sin(\lambda_2 b + \mu_2) = \sin(\lambda_3 c + \mu_3) = 0,$$

ce qui exige que m_1, m_2 et m_3 soient au moins égaux à 1 ; il viendra donc :

$$k_1 = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{\pi^2}{4}.$$

Laissons maintenant de côté le cas du parallélépipède rectangle et revenons au cas général; il est clair que, pour un même corps, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sont des fonctions du pouvoir émissif h. Je dis que ces fonctions sont toujours croissantes. Soient, en effet, h' et h'' deux valeurs du pouvoir émissif; soient pour un corps donné, k'_n et k''_n les valeurs correspondantes de k_n, et U'_n et U''_n les fonctions U_n correspondantes. On aura :

A la surface du corps :

$$\frac{dU'_n}{dn} + h'U'_n = \frac{dU''_n}{dn} + h''U''_n = 0 \tag{3}$$

et à l'intérieur du corps :

$$\Delta U'_n + k'_n U'_n = \Delta U''_n + k''_n U''_n = 0. \tag{4}$$

Le théorème de Green nous donne :

$$\int \left(\frac{dU'_n}{dn} U''_n - \frac{dU''_n}{dn} U'_n \right) d\omega = \int (U''_n \Delta U'_n - U'_n \Delta U''_n) d\tau.$$

Dans cette identité remplaçons $\Delta U'_n$, $\Delta U''_n$, $\frac{dU'_n}{dn}$, $\frac{dU''_n}{dn}$ par leurs valeurs tirées des équations (2) et (4), il viendra :

$$(h' - h'') \int U'_n U''_n \, d\omega = (k'_n - k''_n) \int U'_n U''_n \, d\tau.$$

Supposons que h' et h'' diffèrent très peu de telle sorte que

$$h'' - h' = dh, \qquad k''_n - k'_n = dk_n,$$

$U'_n = U''_n$ à des infiniment petits près, il vient :

$$dh \int U'^2_n \, d\omega = dk_n \int U'^2_n \, d\tau. \tag{5}$$

Dans l'équation (5), les deux intégrales sont essentiellement positives; il reste donc :

$$\frac{dk_n}{dh} > 0,$$

ce qui signifie que k_n est une fonction croissante de h. C. Q. F. D.

Pour $h = 0$; on a évidemment :

$$k_1 = 0, \qquad U_1 = \text{const.} = \frac{1}{\sqrt{W}} \qquad (\text{W étant le volume du corps}).$$

En effet, ces quantités satisfont aux équations

$$\Delta U_1 = \Delta U_1 + k_1 U_1 = 0, \qquad \frac{dU_1}{dn} = 0.$$

L'équation (5) devient alors

$$\frac{dk_1}{dh} = \frac{S}{W},$$

S désignant la surface du corps et W son volume. Donc si h est très petit, k_1 est sensiblement égal à $h\frac{S}{W}$.

Nous venons de trouver :

$$\frac{dh}{dk_n}\int U_n^2\, d\omega = \int U_n^2\, d\tau = 1.$$

Nous avons, d'autre part,

$$k_n = h\int U_n^2\, d\omega + \int\left[\left(\frac{dU_n}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU_n}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU_n}{dz}\right)^2\right]d\tau,$$

d'où :

$$k_n > h\int U_n^2\, d\omega, \qquad \int U_n^2\, d\omega < \frac{k_n}{h},$$

$$1 < \frac{k_n}{h}\frac{dh}{dk_n}$$

et

$$\frac{dk_n}{k_n} < \frac{dh}{h}.$$

Cette inégalité montre que le rapport $\frac{k_n}{h}$ va toujours en décroissant.

Il importe de remarquer, avant d'aller plus loin que quand h est positif, k_n est essentiellement positif. Sans doute, cela résulte de la façon dont les fonctions U_n ont été définies plus haut; mais on pourrait imaginer qu'il existe des fonctions U autres que celles que nous venons de définir et pour lesquelles on aurait :

$$\frac{dU}{dn} + hU = 0, \qquad \Delta U + kU = 0, \qquad \int U^2\, d\tau = 1, \qquad k < 0.$$

Je dis que cela est impossible et il me suffit pour l'établir de montrer que l'on a :

$$k = h\int U^2\, d\omega + \int\left[\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2\right]d\tau,$$

ce qui se démontrerait par le même calcul que plus haut.

Si, au contraire, h était négatif, k_n pourrait aussi devenir négatif.

Il peut arriver quand on fait varier h, que deux des nombres k_n et k_{n+1} viennent à se confondre. Qu'arrivera-t-il alors en général ?

Soient k' et k'' deux valeurs de k, U′ et U″ les fonctions U correspondantes. Imaginons que k', k'', U′ et U″ soient des fonctions continues de h. Quand $h < h_0$, on aura par exemple $k' < k''$; pour $h = h_0$, on aura $k' = k''$; pour $h > h_0$, on aura $k' > k''$. D'après ce que nous venons de démontrer, k' et k'' sont deux fonctions croissantes de h.

Maintenant, supposons qu'il y ait $n - 1$ nombres k inférieurs à la fois à k' et à k''. Nous devrons, d'après nos conventions, appeler k_n la plus petite et k_{n+1} la plus grande des deux quantités k' et k''. Nous aurons donc :

$$k' = k_n, \qquad k'' = k_{n+1} \qquad \text{pour} \quad h < h_0$$

et

$$k'' = k_n, \qquad k' = k_{n+1} \qquad \text{pour} \quad h > h_0.$$

Les fonctions k' et k'' étant continues et croissantes, les fonctions k_n et k_{n+1} définies comme nous venons de le faire seront aussi continues et croissantes.

En résumé, dans tous les cas possibles, k_n est une fonction croissante de h; k_n atteint donc sa plus petite valeur pour $h = 0$.

Nous allons donc étudier la valeur de k_n pour $h = 0$.

Décomposons le volume de notre corps solide, d'une manière quelconque, en p volumes partiels. Considérons chacun de ces volumes partiels comme un corps solide de même conductibilité que le solide donné et dont la surface est imperméable à la chaleur. Soient :

$$\begin{array}{lllll} U_{11}, & U_{12}, & \ldots, & U_{1n}, & \ldots, \\ U_{21}, & U_{22}, & \ldots, & U_{2n}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ U_{p1}, & U_{p2}, & \ldots, & U_{pn}, & \ldots, \end{array}$$

les fonctions U relatives à ces p solides.

Soient :

$$\begin{array}{lllll} k_{11}, & k_{12}, & \ldots, & k_{1n}, & \ldots, \\ k_{21}, & k_{22}, & \ldots, & k_{2n}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ k_{p1}, & k_{p2}, & \ldots, & k_{pn}, & \ldots, \end{array}$$

les nombres k correspondants.

Comme pour chacun des p solides partiels on a $h = 0$, on aura :

$$k_{11} = k_{21} = \ldots = k_{p1} = 0$$

et les p fonctions $U_{11}, U_{21}, \ldots, U_{p1}$ seront des constantes.

Je conserverai la notation U_n et k_n pour les fonctions relatives au solide total. Posons maintenant :

$$V = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_n U_n,$$

les α étant des coefficients indéterminés.

Nous avons à la surface du corps, puisque h est supposé nul :

$$\frac{dV}{dn} = 0$$

et, par conséquent, en vertu du théorème de Green :

$$\int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right] d\tau = -\int V \Delta V \, d\tau.$$

Le second membre peut s'écrire (en vertu de l'équation $\Delta U_i + k_i U_i = 0$) :

$$\int (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_n U_n)(\alpha_1 k_1 U_1 + \alpha_2 k_2 U_2 + \ldots + \alpha_n k_n U_n) \, d\tau$$

ou encore $\left(\text{en vertu des relations } \int U_i^2 d\tau = 1, \ \int U_i U_k \, d\tau = 0\right)$:

$$k_1 \alpha_1^2 + k_2 \alpha_2^2 + \ldots + k_n \alpha_n^2.$$

D'autre part, on a :

$$\int V^2 \, d\tau = \int (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_n U_n)^2 \, d\tau = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2,$$

d'où

$$(6) \qquad \frac{\int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right] d\tau}{\int V^2 \, d\tau} = \frac{k_1 \alpha_1^2 + k_2 \alpha_2^2 + \ldots + k_n \alpha_n^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2} \leqq k_n.$$

Nous pouvons disposer de nos n coefficients arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de façon à satisfaire à $n - 1$ conditions. Voici comment nous choisirons ces conditions.

Nous annulerons d'abord les λ_1 intégrales

$$\int V U_{11} \, d\tau, \quad \int V U_{12} \, d\tau, \quad \ldots, \quad \int V U_{1\lambda_1} \, d\tau$$

étendues au premier solide partiel.

Nous annulerons ensuite les λ_2 intégrales

$$\int VU_{21}\,d\tau, \quad \ldots, \quad \int VU_{2\lambda_2}\,d\tau$$

étendues au second solide partiel.

Nous annulerons enfin les λ_p intégrales

$$\int VU_{p1}\,d\tau, \quad \ldots, \quad \int VU_{p\lambda_p}\,d\tau$$

étendues au dernier solide partiel.

Nous devrons avoir d'ailleurs :

$$(7) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p = n - 1.$$

Rappelons quelle est la définition de $k_{1.\lambda_1+1}$. Ce coefficient est le minimum du rapport des deux intégrales :

$$B = \int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right] d\tau, \qquad A = \int V^2\,d\tau;$$

quand la fonction arbitraire V est assujettie aux λ_1 conditions :

$$\int VU_{11}\,d\tau = \int VU_{12}\,d\tau = \ldots = \int VU_{1\lambda_1}\,d\tau = 0.$$

Toutes les intégrales sont supposées étendues au premier solide partiel. Donc le rapport des deux intégrales B et A étendues à ce premier solide est plus grand que $k_{1.\lambda_1+1}$.

On verrait de même que le rapport de ces deux intégrales étendues au second solide est plus grand que $k_{2.\lambda_2+1}$, etc.; que le rapport de ces deux intégrales étendues au $p^{\text{ième}}$ solide partiel est plus grand que $k_{p.\lambda_p+1}$.

Donc le rapport des deux intégrales B et A étendues au solide total, sera plus grand que la plus petite des p quantités :

$$(8) \qquad k_{1.\lambda_1+1}, \quad k_{2.\lambda_2+1}, \quad \ldots, \quad k_{p.\lambda_p+1}.$$

Mais l'inégalité (6) exprime que ce même rapport est plus petit que k_n.

Donc k_n est plus grand que la plus petite des quantités (8) pourvu que la relation (7) soit satisfaite.

Ce résultat peut s'énoncer comme il suit :

Rangeons les quantités

$$\begin{matrix} k_{11}, & k_{12}, & \ldots, & k_{1n}, & \ldots, \\ k_{21}, & \ldots, & \ldots, & k_{2n}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ k_{p1}, & \ldots, & \ldots, & k_{pn}, & \ldots, \end{matrix}$$

par ordre de grandeur croissante. (Il va sans dire que dans la série ainsi obtenue, plusieurs termes pourront être égaux; c'est ainsi que les p premiers termes qui sont $k_{11}, k_{21}, \ldots, k_{p1}$ sont tous égaux à o).

Chacun des termes de la série ainsi obtenue sera plus petit que le terme correspondant de la série :

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_n, \quad \ldots.$$

Cela posé, supposons que notre solide soit un polyèdre limité par des faces qui soient toutes parallèles à l'un des trois plans de coordonnées.

Nous pourrons décomposer notre polyèdre en $n-1$ parallélépipèdes rectangles. Soient

$$(9) \qquad k_{12}, \quad k_{22}, \quad \ldots, \quad k_{n-1.2}$$

les valeurs de k_2 correspondant à ces $n-1$ parallélépipèdes; d'après ce que nous venons de voir, la valeur de k_n correspondant au polyèdre total, sera plus grande que la plus petite des quantités (9).

Si les trois dimensions d'un parallélépipède sont $2a$, $2b$, $2c$ de telle sorte que $a > b > c$; nous avons vu qu'on a, pour ce parallélépipède :

$$k_2 = \frac{\pi^2}{4a^2}.$$

Si donc aucune des trois dimensions d'aucun de nos $n-1$ parallélépipèdes partiels n'excède a, on aura pour le polyèdre total

$$k_n > \frac{\pi^2}{4a^2}.$$

Quand n croît indéfiniment, on peut faire tendre a vers o; donc k_n croît indéfiniment.

Cela est vrai pour un polyèdre formé comme je viens de le dire; et comme on peut construire de pareils polyèdres qui diffèrent aussi peu qu'on le veut d'un solide quelconque, on pourrait dire que cela doit être vrai aussi d'un solide quelconque. Mais un semblable raisonnement ne saurait nous contenter.

Pour démontrer le théorème pour un solide quelconque, je dois d'abord chercher une limite inférieure de k_2 pour un solide *convexe* quelconque. Par solide convexe, j'entends un corps tel que le segment de droite MM′, qui joint deux points M et M′ intérieurs au corps, soit toujours tout entier intérieur au corps; ou ce qui revient au même tel qu'aucune droite ne rencontre la surface du corps en plus de deux points.

Rappelons d'abord la définition de k_2; k_2 est le minimum du rapport

$$\frac{\int \left[\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \right] d\tau}{\int V^2 \, d\tau}$$

quand la fonction V est assujettie à la condition :

$$(10) \qquad \int V \, d\tau = 0.$$

On peut transformer la définition de façon à faire disparaître cette dernière condition.

Envisageons l'intégrale

$$\int (V - V')^2 \, d\tau \, d\tau'.$$

Dans cette intégrale, $d\tau$ et $d\tau'$ sont deux éléments de volume quelconques du solide donné; x, y, z, et x', y', z' sont les coordonnées du centre de gravité de chacun de ces deux éléments; V et V′ sont les valeurs de la fonction V aux points x, y, z et x', y' z'; enfin l'intégrale est étendue à toutes les combinaisons de deux éléments de volume $d\tau$ et $d\tau'$. (Chaque combinaison sera répétée deux fois de la façon suivante : une première fois le premier élément jouera le rôle de $d\tau$ et le second celui de $d\tau'$ et la seconde fois ce sera le contraire.)

On trouve aisément en se servant de la relation (10) et en appelant W le volume total du corps

$$\int (V - V')^2 \, d\tau \, d\tau' = 2W \int V^2 \, d\tau$$

de sorte que k_2 sera le minimum de l'expression

$$\frac{2W \int \left[\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \right] d\tau}{\int (V - V')^2 \, d\tau \, d\tau'}.$$

Mais alors la condition (10) devient inutile; si en effet on ajoute à V une constante quelconque, la condition (10) cesse d'être satisfaite et l'expression (11) ne change pas.

Nous pouvons donc dire finalement que k_2 est le minimum de l'expression (11), la fonction V étant tout à fait quelconque et n'étant assujettie à aucune condition.

C'est de la transformation de cette expression (11) que nous allons maintenant nous occuper.

Posons à cet effet :

$$(12)\quad \begin{cases} x = \xi + \rho\cos\varphi\sin\theta, & x' = \xi + \rho'\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \eta + \rho\sin\varphi\sin\theta, & y' = \eta + \rho'\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta, & z' = \rho'\cos\theta. \end{cases}$$

La théorie de la transformation des intégrales multiples nous donne :

$$\int (V - V')^2\, d\tau\, d\tau' = \int (V - V')^2\, dx\, dy\, dz\, dx'\, dy'\, dz'$$
$$= \int (V - V')^2 (\rho - \rho')^2 \sin\theta\cos\theta\, d\xi\, d\eta\, d\rho\, d\rho'\, d\theta\, d\varphi.$$

Il va sans dire que, bien que je n'emploie qu'un seul signe $\int$, il s'agit ici d'intégrales sextuples.

Parlons maintenant des limites d'intégration; supposons que ξ, η, θ et φ soient considérés un instant comme des constantes; quand on fera varier ρ, le point x, y, z décrira une droite; comme le corps est convexe, cette droite rencontrera la surface du corps en deux points. Soient ρ_0 et ρ_1 les valeurs de ρ qui correspondent à ces deux points d'intersection.

Pour obtenir alors tous les points (x, y, z), (x', y', z') intérieurs au corps, il faudra faire varier ρ et ρ' de ρ_0 à ρ_1, θ de o à $\frac{\pi}{2}$, φ de o à 2π, et donner à ξ et à η toutes les valeurs telles que ρ_0 et ρ_1 soient réels.

Cela posé, cherchons à transformer le numérateur de l'expression (11).

Nous avons d'abord, en vertu des équations (12) :

$$\frac{dV}{d\rho} = \cos\varphi\sin\theta\,\frac{dV}{dx} + \sin\varphi\sin\theta\,\frac{dV}{dy} + \cos\theta\,\frac{dV}{dz},$$

d'où :

$$\iint \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \iint \left(\cos\varphi\sin\theta\,\frac{dV}{dx} + \sin\varphi\sin\theta\,\frac{dV}{dy} + \cos\theta\,\frac{dV}{dz}\right)^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Calculons cette intégrale double en intégrant entre les limites o et 2π pour φ et entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$ pour θ. Le coefficient de $\left(\frac{dV}{dx}\right)^2$ sera :

$$\iint \cos^2\varphi\sin^3\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Il est aisé de voir que le coefficient de $\left(\frac{dV}{dy}\right)^2$ a la même valeur.

Le coefficient de $\left(\frac{dV}{dz}\right)^2$ sera :

$$\iint \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Le coefficient de $2\frac{dV}{dx}\frac{dV}{dy}$ sera :

$$\iint \cos\varphi \sin\varphi \sin^3\theta \, d\theta \, d\varphi = 0.$$

Ceux de $2\frac{dV}{dx}\frac{dV}{dz}$ et de $2\frac{dV}{dy}\frac{dV}{dz}$ seront :

$$\iint \cos\varphi \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta \, d\varphi = \iint \sin\varphi \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta \, d\varphi = 0.$$

Il reste donc simplement :

$$\iint \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{2\pi}{3}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right].$$

Soit M une fonction quelconque de x, y et z; la théorie de la transformation des intégrales multiples donne :

$$\int M \, d\tau = \int M \, dx \, dy \, dz = \int M \cos\theta \, d\xi \, d\eta \, d\rho.$$

Il vient donc :

$$\int \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 \sin\theta \cos\theta \, d\xi \, d\eta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] d\tau.$$

Posons maintenant pour abréger :

$$B = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 d\rho, \qquad A = \int_{\rho_0}^{\rho_1} d\rho \int_{\rho_0}^{\rho_1} d\rho'(V - V')^2(\rho - \rho')^2,$$

l'expression (11) deviendra

$$\frac{3W}{\pi} \frac{\int B \sin\theta \cos\theta \, d\xi \, d\eta \, d\theta \, d\varphi}{\int A \sin\theta \cos\theta \, d\xi \, d\eta \, d\theta \, d\varphi}.$$

Les quantités sous les deux signes $\int$ sont essentiellement positives puisque θ varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Pour trouver une limite inférieure de l'expression (11), il nous suffira de connaître une limite inférieure du rapport $\frac{B}{A}$. C'est de quoi nous allons maintenant nous occuper.

Si la fonction V est choisie de telle façon que $A = 1$, il est clair que l'intégrale B ne pourra pas s'annuler; elle admettra donc un certain minimum. Cherchons à déterminer ce minimum par le calcul des variations.

Nous trouvons :

$$\frac{1}{2}\,\delta B = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{dV}{d\rho}\,\frac{d\delta V}{d\rho}\,d\rho = 0,$$

$$\frac{1}{2}\,\delta A = \iint (V - V')(\delta V - \delta V')(\rho - \rho')^2\,d\rho\,d\rho' = 0.$$

Transformons ces deux expressions, nous trouvons, par l'intégration par parties,

$$\frac{1}{2}\,\delta B = \left|\frac{dV}{d\rho}\,\delta V\right|_{\rho_0}^{\rho_1} - \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d^2V}{d\rho^2}\,V\,\delta\rho = 0.$$

D'autre part, si dans l'intégrale double

$$J = \iint (V - V')\,\delta V(\rho - \rho')^2\,d\rho\,d\rho'$$

on permute ρ et ρ', l'intégrale ne doit pas changer; il vient ainsi :

$$J = \iint (V' - V)\,\delta V'(\rho' - \rho)^2\,d\rho\,d\rho',$$

d'où

$$\frac{1}{2}\,\delta A = 2J$$

et

$$J = \iint (V - V')(\rho - \rho')^2\,\delta V\,d\rho\,d\rho' = 0.$$

Cela peut s'écrire :

$$J = \int_{\rho_0}^{\rho_1} H\,\delta V\,d\rho = 0$$

en posant :

$$H = V\int_{\rho_0}^{\rho_1} (\rho - \rho')^2\,d\rho' - \int_{\rho_0}^{\rho_1} V'(\rho - \rho')^2\,d\rho'.$$

Posons donc pour abréger :

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} d\rho' = \rho_1 - \rho_0; \qquad \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho'\,d\rho' = \frac{\rho_1^2 - \rho_0^2}{2}; \qquad \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho'^2\,d\rho' = \frac{\rho_1^3 - \rho_0^3}{3},$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} V'\,d\rho' = \int_{\rho_0}^{\rho_1} V\,d\rho = \alpha; \qquad \int_{\rho_0}^{\rho_1} V'\rho'\,d\rho' = \int_{\rho_0}^{\rho_1} V\rho\,d\rho = \beta; \qquad \int_{\rho_0}^{\rho_1} V'\rho'^2\,d\rho' = \gamma.$$

Il viendra :

$$H = V\left[\rho^2(\rho_1 - \rho_0) - \rho(\rho_1^2 - \rho_0^2) + \frac{\rho_1^3 - \rho_0^3}{3}\right] - \alpha\rho^2 + 2\beta\rho - \gamma.$$

Pour que B soit minimum, il faut d'après les règles du calcul des variations que δB s'annule toutes les fois que J est nul et pour cela il faut que l'on ait :

$$\frac{d^2V}{d\rho^2} + KH = 0,$$

K étant une constante qu'il reste à déterminer.

Voyons comment le problème pourra être traité.

Posons d'abord

$$\rho = \lambda + \sigma, \qquad \lambda = \frac{\rho_1 + \rho_0}{2}, \qquad \rho_1 = \lambda + \sigma_0, \qquad \rho_0 = \lambda - \sigma_0,$$

nos équations deviendront :

$$\frac{d^2V}{d\sigma^2} + KH = 0,$$

$$H = V\left[2\sigma^2\sigma_0 + \frac{2\sigma_0^3}{3}\right] - \alpha'\sigma^2 + 2\beta'\sigma - \gamma',$$

où :

$$\alpha' = \int V\,d\sigma, \qquad \beta' = \int V\sigma\,d\sigma, \qquad \gamma' = \int V\sigma^2\,d\sigma,$$

les intégrales étant prises entre les limites $-\sigma_0$ et $+\sigma_0$.

Posons maintenant

$$\sigma = \sigma_0 t,$$

(13) $$\alpha'' = \int_{-1}^{+1} V\,dt, \qquad \beta'' = \int_{-1}^{+1} Vt\,dt, \qquad \gamma'' = \int_{-1}^{+1} Vt^2\,dt.$$

L'équation devient :

(14) $$\frac{1}{K'}\frac{d^2V}{dt^2} + 2V\left[t^2 + \frac{1}{3}\right] - \alpha''t^2 + 2\beta''t - \gamma'' = 0 \qquad (K' = K\sigma_0^3).$$

L'équation (14) contient encore quatre indéterminées α'', β'', γ'' et K'. Si nous l'intégrons nous trouverons :

$$V = \alpha''V_1 + \beta''V_2 + \gamma''V_3 + \delta''V_4 + \varepsilon''V_5,$$

V_1, V_2, V_3, V_4 et V_5 étant des fonctions entièrement connues de t et de K' pendant que δ'' et ε'' sont deux constantes d'intégration.

Pour achever de connaître V il nous restera à déterminer les six constantes

α'', β'', γ'', δ'', ε'' et K'. Pour cela nous avons six équations; à savoir, les trois équations (13), l'équation A = 1 et les deux relations

$$\frac{dV}{d\rho} = 0 \quad \text{pour } \rho = \rho_0, \qquad \frac{dV}{d\rho} = 0 \quad \text{pour } \rho = \rho_1.$$

Ces six équations ne suffisent pas toutefois pour déterminer complètement ces six constantes et en particulier K'. On trouve pour K' une infinité de valeurs positives. Nous prendrons la plus petite de ces valeurs que j'appellerai K_0.

Je n'ai pas besoin pour mon objet de calculer effectivement K_0; il me suffit de faire observer que c'est une *constante numérique*.

Il vient alors :

$$K = \frac{K_0}{\sigma_0^5} = \frac{4 K_0}{(\rho_1 - \rho_0)^5}.$$

Il nous reste à chercher le minimum de $\frac{B}{A}$ correspondant à cette valeur de K.

Nous trouvons :

$$B = \left[\frac{dV}{d\rho} V\right]_{\rho_0}^{\rho_1} - \int \frac{d^2 V}{d\rho^2} V \, d\rho = -\int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d^2 V}{d\rho^2} V \, d\rho = K \int VH \, d\rho,$$

ou

$$B = K \int d\rho V \left[V \int (\rho - \rho')^2 \, d\rho' - \int V'(\rho - \rho')^2 \, d\rho' \right]$$
$$= K \iint V(V - V')(\rho - \rho')^2 \, d\rho \, d\rho'.$$

Or l'intégrale du second membre ne doit pas changer quand on permute ρ et ρ'; on a donc aussi

$$B = -K \iint V'(V - V')(\rho - \rho')^2 \, d\rho \, d\rho',$$

d'où

$$B = \frac{K}{2} \iint (V - V')^2 (\rho - \rho')^2 \, d\rho \, d\rho' = \frac{K}{2} A.$$

Ainsi le minimum de $\frac{B}{A}$ est égal à

$$\frac{K}{2} = \frac{2 K_0}{(\rho_1 - \rho_0)^5}.$$

Pour une fonction V quelconque on aura donc :

$$(15) \qquad \frac{B}{A} > \frac{2 K_0}{(\rho_1 - \rho_0)^5}.$$

Soit λ la plus grande distance de deux points de la surface du corps solide

envisagé on aura

$$\frac{B}{A} > \frac{2K_0}{\lambda^5}.$$

Il est à remarquer que si je n'avais pas voulu indiquer sommairement la manière de calculer la constante numérique K_0, j'aurais pu arriver à la formule (15) en quelques lignes par de simples considérations d'homogénéité.

Il suit de là que l'expression (11) est toujours plus grande que

$$\frac{6K_0 W}{\pi\lambda^5}.$$

Par conséquent *pour un solide convexe quelconque on a :*

$$k_2 > \frac{6K_0 W}{\pi\lambda^5},$$

K_0 *désignant une constante numérique*, W *le volume du corps, et* λ *la plus grande distance de deux points de la surface du corps.*

Cela posé passons à un solide quelconque; on peut le décomposer en $n - 1$ solides partiels convexes. On calculera pour chacun de ces solides le rapport $\frac{W}{\lambda^5}$; imaginons que pour tous ces solides $\frac{W}{\lambda^5}$ soit plus grand que α; on aura pour le solide total

$$k_n > \frac{6K_0}{\pi}\alpha.$$

Or nous pouvons prendre n assez grand et choisir nos $n - 1$ solides partiels de telle sorte que la quantité que nous venons d'appeler α soit aussi grande que l'on veut.

Donc k_n sera également aussi grand que l'on voudra.

Donc *pour un solide quelconque* k_n *croît indéfiniment avec* n.

Nous avons démontré ce théorème dans le cas où $h = 0$; cela doit suffire, car k_n est croissant avec h; le théorème peut donc être regardé comme démontré pour toutes les valeurs positives de h.

Je ne veux pas quitter ce sujet sans avoir indiqué un moyen de calculer une limite supérieure de k_n.

Posons

$$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_n F_n,$$

$F_1, F_2, \ldots, F_n$ étant des fonctions données et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des coefficients indéterminés.

Les deux intégrales :

$$B = h\int F^2\,d\omega + \int\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right]d\tau, \qquad A = \int F^2\,d\tau,$$

seront des formes quadratiques dépendant des n paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Formons la forme quadratique :

$$B - \lambda A,$$

où λ est un nouveau coefficient indéterminé.

Écrivons que le discriminant de la forme $B - \lambda A$ est nul; nous obtiendrons une équation algébrique d'ordre n en λ; il est aisé d'établir que cette équation a toutes ses racines réelles (parce que les deux formes B et A sont définies positives; il suffirait d'ailleurs que l'une d'elles le fût. Mais de ce que les deux formes sont toutes deux définies positives, il résulte que les racines sont non seulement réelles, mais positives).

Soient

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n$$

ces n racines rangées par ordre de grandeur croissante; je dis qu'on aura :

$$\lambda_1 > k_1, \qquad \lambda_2 > k_2, \qquad \lambda_3 > k_3, \qquad \ldots, \qquad \lambda_n > k_n.$$

En effet la plus petite valeur que puisse prendre le rapport $\frac{B}{A}$ quand on fait varier les α doit être plus grande que k_1. Or cette plus petite valeur est λ_1; on a donc

$$\lambda_1 > k_1.$$

En vertu de la théorie des formes quadratiques, la forme A peut être décomposée en n carrés et s'écrire :

$$A = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_n^2,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ étant des fonctions linéaires de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

De plus cette décomposition peut être faite de telle sorte que

$$B = \lambda_1\beta_1^2 + \lambda_2\beta_2^2 + \ldots + \lambda_n\beta_n^2.$$

Introduisons maintenant les conditions :

(16) $$\int FU_1\,d\tau = \int FU_2\,d\tau = \ldots = \int FU_p\,d\tau = 0.$$

Le minimum de $\frac{B}{A}$, en tenant compte des conditions (16), devra être plus grand que k_{p+1}.

Cherchons ce minimum. Les conditions (16) sont linéaires par rapport aux β de sorte qu'on peut les écrire :

$$\text{(16 bis)} \qquad \begin{cases} \mu_{11}\beta_1 + \mu_{12}\beta_2 + \ldots + \mu_{1n}\beta_n = 0, \\ \mu_{21}\beta_1 + \mu_{22}\beta_2 + \ldots + \mu_{2n}\beta_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_{p1}\beta_1 + \mu_{p2}\beta_2 + \ldots + \mu_{pn}\beta_n = 0. \end{cases}$$

Soit λ le minimum cherché du rapport $\frac{B}{A}$. On voit par des calculs qu'il est inutile de reproduire ici que ce minimum nous est donné par l'équation suivante, dont je vais expliquer la signification :

$$(17) \qquad \Sigma\, H^2\, \Pi(\lambda - \lambda_i) = 0.$$

$\Pi(\lambda - \lambda_i)$ sera le produit de $n - p$ binômes tels que $\lambda - \lambda_i$. Supprimons dans les équations (16 *bis*) tous les β_i qui ont même indice que les λ_i qui entrent dans le produit $\Pi(\lambda - \lambda_i)$; nous appellerons H le déterminant des équations linéaires ainsi obtenues. Enfin la sommation indiquée par le signe Σ est étendue à toutes les combinaisons des n quantités λ_i, prises $n - p$ à $n - p$.

On voit qu'en substituant dans l'équation (17) successivement

$$-\infty, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad +\infty,$$

on obtient au moins p changements de signe. Par conséquent, la plus petite racine de l'équation (17) sera au plus égale à λ_{p+1}. On a donc :

$$\lambda_{p+1} > k_{p+1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Je termine ce paragraphe en donnant une nouvelle manière de calculer une limite supérieure de k_2 pour $h = 0$.

Soient f, g, h trois fonctions quelconques assujetties à la condition suivante :

A la surface du corps on aura :

$$(18) \qquad \alpha f + \beta g + \gamma h = 0,$$

α, β, γ désignant les trois cosinus directeurs de la normale à cette surface.

De plus nous assujettirons nos trois fonctions à la condition

$$(19) \qquad A = \int (f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau = 1.$$

L'intégrale

$$B = \int \left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dz}\right)^2 \right] d\tau$$

aura évidemment un minimum. Cherchons ce minimum. Posons :

$$\theta = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}.$$

Nous trouverons, par le calcul des variations :

$$(18\ bis) \qquad \alpha\,\delta f + \beta\,\delta g + \gamma\,\delta h = 0 \quad \text{(à la surface du corps)}$$

et

$$\frac{1}{2}\,\delta A = \int (f\,\delta f + g\,\delta g + h\,\delta h)\,d\tau = 0,$$

$$\frac{1}{2}\,\delta B = \int \theta \left(\frac{d\delta f}{dx} + \frac{d\delta g}{dy} + \frac{d\delta h}{dz} \right) d\tau = 0.$$

L'intégration par parties donne :

$$\frac{1}{2}\,\delta B = \int \theta (\alpha\,\delta f + \beta\,\delta g + \gamma\,\delta h)\,d\omega - \int \left(\frac{d\theta}{dx}\,\delta f + \frac{d\theta}{dy}\,\delta g + \frac{d\theta}{dz}\,\delta h \right) d\tau,$$

ou en vertu de (18 *bis*)

$$\frac{1}{2}\,\delta B = -\int \left(\frac{d\theta}{dx}\,\delta f + \frac{d\theta}{dy}\,\delta g + \frac{d\theta}{dz}\,\delta h \right) d\tau = 0.$$

Pour que δB soit nul toutes les fois que δA est nul, il faut donc que l'on ait :

$$(20) \qquad kf + \frac{d\theta}{dx} = 0, \qquad kg + \frac{d\theta}{dy} = 0, \qquad kh + \frac{d\theta}{dz} = 0,$$

k étant une constante qu'il reste à déterminer.

Des équations (20) on tire par différentiation et addition :

$$\Delta\theta + k\theta = 0$$

et l'équation (18) devient :

$$\frac{d\theta}{dn} = 0.$$

Cela montre que θ est l'une des fonctions U que nous avons définies plus haut; ce ne peut être que U_2; on a $k = k_2$, et pour $\theta = U_2$ on trouve :

$$\frac{B}{A} = \frac{\int \theta^2\,d\tau}{\int (f^2 + g^2 + h^2)\,d\tau} = \frac{k_2^2 \int U_2^2\,d\tau}{\int \left[\left(\frac{dU_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU_2}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU_2}{dz}\right)^2 \right] d\tau} = k_2.$$

Pour des fonctions f, g, h quelconques on aura donc

$$\frac{B}{A} > k_2,$$

d'où la règle suivante.

On prend trois fonctions quelconques f, g, h assujetties à la condition (18). $\left(\text{La condition (19) devient inutile dès qu'on considère le rapport } \frac{B}{A}\right)$. Le rapport

$$\frac{\int \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right)^2 d\tau}{\int (f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau}$$

est plus grand que k_2.

3. — Lois du Refroidissement.

Soit V la température d'un point du corps solide; V sera une fonction de x, y, z et de t. Cette température devra satisfaire aux deux équations suivantes :

A l'intérieur du corps :

$$(1) \qquad \frac{dV}{dt} = a^2 \Delta V.$$

A la surface du corps :

$$(2) \qquad \frac{dV}{dn} + hV = 0.$$

La température est donnée arbitrairement à l'époque initiale $t = 0$. Il peut donc se faire qu'à cette époque $t = 0$, l'équation (2) ne soit pas satisfaite; mais elle devra l'être pour toute époque postérieure $t > 0$. C'est là une première anomalie qui vaut la peine d'être remarquée.

En voici une seconde : V ne peut pas en général être développée suivant les puissances croissantes de t. Supposons, en effet, que cela soit possible; qu'arrivera-t-il ? Soit V_0 la valeur de V pour $t = 0$. On aura pour $t = 0$:

$$\frac{dV}{dt} = a^2 \Delta V_0, \qquad \frac{d^2V}{dt^2} = a^2 \Delta \frac{dV}{dt} = a^4 \Delta\Delta V_0$$

ou

$$\frac{d^2V}{dt^2} = a^4 \Delta^2 V_0$$

en convenant de poser :

$$\Delta^n V = \Delta(\Delta^{n-1} V).$$

On aura ainsi en général :

$$\frac{d^n V}{dt^n} = a^{2n} \Delta^n V_0;$$

de sorte que si le développement était possible, il viendrait :

$$V = V_0 + a^2 t \, \Delta V_0 + \frac{a^4 t^2}{1.2} \Delta^2 V_0 + \frac{a^6 t^3}{1.2.3} \Delta^3 V_0 + \ldots.$$

Il résulterait de là que la température en un point donné et à un instant donné ne dépendrait plus que de la valeur de V_0 et de ses dérivées en ce point. *La forme du corps solide n'interviendrait en aucune façon.* Cela est absurde.

Pour mieux faire comprendre ces anomalies, nous allons envisager un cas particulier. Imaginons que le solide devienne un mur indéfini compris entre les deux plans

$$x = \pm \pi.$$

Supposons que les deux plans $x = \pm \pi$ qui limitent le mur soient imperméables à la chaleur, ce qui revient à supposer $h = 0$.

Supposons de plus qu'à l'époque $t = 0$ la température initiale V_0 ne dépende que de x et ne change pas quand on change x en $-x$.

Ces propriétés subsisteront évidemment à une époque quelconque. V sera fonction de x et de t seulement et ne changera pas quand on changera x en $-x$.

Dans ces conditions on peut poser :

$$V = \Sigma \varphi_m(t) \cos mx.$$

Nous aurons alors

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} = -\Sigma m^2 \varphi_m(t) \cos mx,$$

$$\frac{dV}{dt} = \Sigma \varphi'_m(t) \cos mx.$$

Si dans l'équation

$$\frac{dV}{dt} = a^2 \Delta V$$

nous faisons $a^2 = 1$ pour simplifier, il vient :

$$\varphi'_m(t) + m^2 \varphi_m(t) = 0,$$

d'où

$$\varphi_m(t) = A_m e^{-m^2 t}$$

et enfin

$$V = \Sigma A_m e^{-m^2 t} \cos mx.$$

Donnons-nous la température V_0 à l'instant initial $t = 0$. V_0 pourra toujours être développée par la série de Fourier sous la forme :

$$V_0 = \Sigma A_m \cos mx.$$

La série du second membre $\Sigma A_m \cos mx$ est toujours convergente, mais la convergence peut n'être pas absolue.

En vertu d'un théorème d'Abel, si l'on prend

$$(3) \qquad V = \Sigma A_m e^{-m^2 t} \cos mx,$$

on aura quand t tendra vers o

$$\lim V = V_0.$$

L'équation (3) nous fournit donc la solution du problème.

Il semble que la condition $h = 0$ n'ait joué aucun rôle dans ce calcul; ce n'est là qu'une apparence à laquelle il ne faut pas se tromper.

Nous pouvons, il est vrai, dans tous les cas possibles, développer V par la série de Fourier, et écrire :

$$V = \Sigma \varphi_m(t) \cos mx.$$

Mais pour que nous ayons le droit d'en conclure

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = - \Sigma m^2 \varphi_m(t) \cos mx,$$

il faut que la série (et d'ailleurs il suffit)

$$\Sigma m^2 \varphi_m(t) \cos mx$$

soit convergente.

Pour cela il suffit que l'on puisse trouver un nombre K tel que

$$|m^2 \varphi_m(t)| < \frac{K}{m^2}$$

ou

$$(4) \qquad |\varphi_m(t)| < \frac{K}{m^4}.$$

D'après un théorème que j'ai démontré dans le Tome III du *Bulletin Astronomique* (Sur un moyen d'augmenter la convergence des séries trigonométriques), la condition (4) équivaut à la suivante; la fonction représentée par

la série

$$f(x) = \Sigma \varphi_m \cos mx$$

devra être continue ainsi que ses trois premières dérivées. Or cette fonction est égale à V entre les limites $-\pi$ et $+\pi$; si on est en dehors de ces limites on a :

$$f(x) = \text{V}(x + 2p\pi),$$

p étant un entier positif ou négatif choisi de telle sorte que $x + 2p\pi$ soit compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Comme V est continue ainsi que toutes ses dérivées, il ne peut y avoir de discontinuité qu'aux deux limites $x = \pm \pi$. Si donc nous désignons pour un instant par V′, V″, . . . les dérivées successives de V par rapport à x, on devra avoir :

(5) $$\text{V}(\pi) = \text{V}(-\pi),$$

(6) $$\text{V}'(\pi) = \text{V}'(-\pi),$$

(7) $$\text{V}''(\pi) = \text{V}''(-\pi),$$

(8) $$\text{V}'''(\pi) = \text{V}'''(-\pi).$$

La fonction V étant paire, les conditions (5) et (7) sont remplies d'elles-mêmes. D'autre part, V′ et V‴ sont des fonctions impaires de sorte qu'on doit avoir :

$$\text{V}'(\pi) = -\text{V}'(-\pi), \qquad \text{V}'''(\pi) = -\text{V}'''(-\pi)$$

et que les conditions (6) et (8) peuvent s'écrire :

$$\text{V}'(\pi) = \text{V}'''(\pi) = 0,$$

c'est-à-dire que pour $x = \pi$ on devra avoir :

(9) $$\frac{d\text{V}}{dx} = \frac{d^3\text{V}}{dx^3} = 0.$$

Si $h = 0$, on doit avoir pour $x = \pi$:

$$\frac{d\text{V}}{dn} = \frac{d\text{V}}{dx} = 0.$$

Cette condition ayant lieu, quel que soit t on aura :

$$\frac{d^2\text{V}}{dt\,dx} = \frac{d^3\text{V}}{dx^3} = 0.$$

Les conditions (9) sont donc remplies, et notre calcul est légitime, *mais seulement dans le cas de $h = 0$.*

Cela posé considérons la série

$$V_0 = \Sigma A_m \cos mx.$$

En général la série :

$$\Sigma m^2 A_m \cos mx$$

ne sera pas convergente de sorte qu'on ne pourra pas écrire :

$$\Delta V_0 = \frac{d^2 V_0}{dx^2} = - \Sigma m^2 A_m \cos mx.$$

Il en résulte qu'on n'aura pas en général :

$$\lim \Delta V = \Delta V_0 \quad \text{quand } t \text{ tend vers o}$$

et qu'on n'aura pas non plus :

$$\lim \frac{dV}{dt} = \Delta V_0 \quad \text{quand } t \text{ tend vers o.}$$

C'est ce qui explique pourquoi le développement suivant les puissances de t est généralement impossible.

Revenons maintenant au cas général :

On a pour $t > 0$

$$\frac{dV}{dn} + hV = 0,$$

ou en différentiant par rapport à t :

$$\frac{d^2 V}{dt\, dn} + h \frac{dV}{dt} = 0$$

ou

$$\frac{d\Delta V}{dn} + h \Delta V = 0.$$

En différentiant p fois on trouverait de même

$$\frac{d\Delta^p V}{dn} + h \Delta^p V = 0.$$

Pour que le développement suivant les puissances de t soit possible, il faut évidemment que l'on ait :

$$\frac{dV_0}{dn} + hV_0 = 0, \qquad \frac{d\Delta^p V_0}{dn} + h \Delta^p V_0 = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, ad\ inf.).$$

Ces conditions, en nombre infini, sont nécessaires; j'ignore si elles sont suffisantes quoique cela puisse sembler probable. Je n'insiste d'ailleurs sur tous ces points que pour mieux montrer avec quelles précautions il faut toucher aux équations aux dérivées partielles.

Passons maintenant à l'exposé des lois générales du refroidissement.

Considérons d'abord l'intégrale suivante :

$$A = \int V^2 \, d\tau.$$

Je dis que cette intégrale ira toujours en diminuant; nous trouvons en effet :

$$\frac{dA}{dt} = 2\int V \frac{dV}{dt} \, d\tau = 2a^2 \int V \Delta V \, d\tau.$$

Il vient ensuite :

$$\int V \Delta V \, d\tau = \int V \frac{dV}{dn} \, d\omega - \int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right] d\tau$$

ou en vertu de l'équation (2)

$$\int V \Delta V \, d\tau = -h \int V^2 \, d\omega - \int \Sigma \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau = -B < 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{dA}{dt} = -2a^2 B < 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Je dis maintenant que si h n'est pas nul, $\int V^2 \, d\tau$ tend vers o quand t croît indéfiniment. On a, en effet,

$$\frac{B}{A} > k_1,$$

d'où

$$\frac{dA}{A \, dt} < -2a^2 k_1,$$

ou en appelant A_0 la valeur de A pour $t = t_0$,

$$A < A_0 e^{-2a^2 k_1 t}.$$

Si h n'est pas nul, k_1 n'est pas nul non plus, et l'on a :

$$\lim A = 0 \quad \text{pour} \quad t = \infty \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Je dis maintenant que le rapport $\frac{B}{A}$ va constamment en diminuant.

Il vient, en effet,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{A\,dB - B\,dA}{A^2\,dt},$$

de sorte qu'il s'agit de démontrer l'inégalité suivante :

$$A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt} < 0.$$

Nous devons donc d'abord calculer $\frac{dB}{dt}$, il viendra :

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{d}{dt}\int V\,\Delta V\,d\tau = -\int \frac{dV}{dt}\Delta V\,d\tau - \int V\frac{d\Delta V}{dt}\,d\tau.$$

L'équation (1) nous permet donc d'écrire :

$$\frac{1}{a^2}\frac{dB}{dt} = -\int (\Delta V)^2\,d\tau - \int V\,\Delta^2 V\,d\tau.$$

Or si V et U sont deux fonctions satisfaisant à la surface du corps à l'équation (2), le théorème de Green nous apprend que

$$\int (V\Delta U - U\Delta V)\,d\tau = 0.$$

Mais V et ΔV satisfont à l'équation (2). On a donc

$$\int V\,\Delta^2 V\,d\tau = \int (\Delta V)^2\,d\tau$$

et, par conséquent,

$$\frac{dB}{dt} = -2a^2\int (\Delta V)^2\,d\tau,$$

ce qui montre déjà que B est décroissant.

Nous pouvons écrire (en appelant $d\tau'$ un élément de volume du corps autre que $d\tau$ et désignant par V′ la valeur de V au centre de l'élément $d\tau'$)

$$\frac{dA}{dt} = 2a^2\int V'\,\Delta V'\,d\tau'; \qquad \frac{dB}{dt} = -2a^2\int (\Delta V')^2\,d\tau'$$

et, par conséquent,

$$A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt} = -2a^2\left[\int V^2\,d\tau\int (\Delta V')^2\,d\tau' - \int V\Delta V\,d\tau\int V'\Delta V'\,d\tau'\right]$$

ou

$$A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt} = -2a^2\iint [(V\Delta V')^2 - VV'\Delta V\Delta V']\,d\tau\,d\tau'.$$

Comme rien ne distingue $d\tau$ de $d\tau'$, nous pouvons écrire également :

$$A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt} = -2a^2 \iint [(V'\Delta V)^2 - VV'\Delta V\Delta V']\, d\tau d\tau',$$

d'où ajoutant les deux valeurs de $A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt}$ et divisant par 2,

$$A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt} = -a^2 \iint [V'\Delta V - V\Delta V']^2\, d\tau d\tau',$$

d'où

$$A\frac{dB}{dt} - B\frac{dA}{dt} < 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous avons vu plus haut que l'on a :

$$A < A_0 e^{-2a^2 k_1 t}$$

cette inégalité peut dans certains cas être remplacée par une autre. Supposons que l'on ait :

$$\int VU_1\, d\tau = \int VU_2\, d\tau = \ldots = \int VU_{n-1}\, d\tau = 0,$$

nous aurons d'après définition même des quantités k_n et U_n :

$$\frac{B}{A} > k_n,$$

il viendra donc :

$$\frac{dA}{dt} = -2a^2 B < 2a^2 k_n A$$

et

$$A < A_0 e^{-2a^2 k_n t}.$$

Étudions maintenant les variations de l'intégrale :

$$J_n = \int VU_n\, d\tau.$$

Il vient :

$$\frac{dJ_n}{dt} = a^2 \int U_n \Delta V\, d\tau.$$

Le théorème de Green donne :

$$\int \left(U_n \frac{dV}{dn} - V\frac{dU_n}{dn} \right) d\omega = \int (U_n \Delta V - V\Delta U_n)\, d\tau.$$

En vertu des égalités

$$\frac{dV}{dn} + hV = \frac{dU_n}{dn} + hU_n = 0,$$

le premier membre est nul; on a donc :

$$\int U_n \Delta V \, d\tau = \int V \Delta U_n \, d\tau = -k_n \int V U_n \, d\tau = -k_n J_n$$

d'où

$$\frac{dJ_n}{dt} = -a^2 k_n J_n$$

et

$$J_n = J_n^0 e^{-a^2 k_n t}.$$

J_n^0 représentant la valeur de l'intégrale J_n pour $t = 0$.

Étudions encore les variations de l'intégrale

$$H = \int V_1 V_2 \, d\tau,$$

où V_1 représente la température à l'instant t et V_2 la température à l'instant $h - t$. Il vient :

$$\frac{dH}{dt} = a^2 \int (V_2 \Delta V_1 - V_1 \Delta V_2) \, d\tau;$$

or en vertu du théorème de Green et des équations

$$\frac{dV_1}{dn} + h V_1 = \frac{dV_2}{dn} + h V_2 = 0$$

le second membre est nul. Donc H est une constante qui ne dépend que de h.

Si nous faisons

$$t = h - t = \frac{h}{2},$$

il vient :

$$V_1 = V_2$$

et

$$H = \int V_1^2 \, d\tau > 0.$$

Si donc V_1 et V_2 représentent les températures à deux instants quelconques, l'intégrale

$$\int V_1 V_2 \, d\tau$$

sera toujours positive.

Nous avons vu plus haut que l'intégrale

$$\int V^2 \, d\tau$$

considérée comme fonction du temps va toujours en décroissant.

Donc H qui si l'on fait $t = \frac{h}{2}$ se réduit à

$$\int V_1^2 \, d\tau$$

sera une fonction décroissante de h.

Or nous trouvons :

$$\frac{dH}{dh} = a^2 \int V_1 \Delta V_2 \, d\tau < 0.$$

Nous trouvons de même

$$\int V_2 \Delta V_1 \, d\tau = \int V_1 \Delta V_2 \, d\tau < 0.$$

Si donc V_1 et V_2 représentent les températures à deux instants quelconques, l'intégrale

$$\int V_1 \Delta V_2 \, d\tau$$

sera toujours négative.

Arrivons maintenant au problème principal; étant donnée la température au temps $t = 0$, trouver la température à un instant quelconque.

Soit V_0 la température à l'instant $t = 0$.

La solution classique consisterait en ceci :

Développer V_0 en une série de la forme suivante :

$$V_0 = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_n U_n + \ldots,$$

les A étant des constantes.

On aura ensuite à un instant quelconque :

$$V = A_1 e^{-a^2 k_1 t} U_1 + A_2 e^{-a^2 k_2 t} U_2 + \ldots + A_n e^{-a^2 k_n t} U_n + \ldots.$$

Cette solution est subordonnée à la possibilité du développement, et c'est cette possibilité que nous ne sommes pas encore en mesure de démontrer d'une manière générale.

Voici toutefois ce que nous pouvons dire :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des coefficients quelconques; posons :

$$V_0 = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_n U_n + R_0$$

et proposons-nous de déterminer les coefficients A de telle façon que l'erreur moyenne commise soit minimum.

Nous prendrons, à l'exemple de M. Tchebicheff, pour mesure de l'erreur moyenne commise l'intégrale suivante :

$$S_0 = \int R_0^2 \, d\tau.$$

Cherchons donc le minimum de l'intégrale

$$\int (V_0 - A_1 U_1 - A_2 U_2 - \ldots - A_n U_n)^2 \, d\tau.$$

Cette intégrale sera minimum quand on aura :

$$\int U_p (V_0 - A_p U_p) \, d\tau = 0$$

ou (puisque nous avons par définition

$$\int U_p^2 \, d\tau = 1, \qquad \int V_0 U_p \, d\tau = J_p^0 \Big)$$

quand on aura :

$$A_p = J_p^0.$$

Nous sommes donc conduit à écrire :

$$V_0 = J_1^0 U_1 + J_2^0 U_2 + \ldots + J_n^0 U_n + R_0.$$

Il résulte de là que l'erreur moyenne commise S_0 va en diminuant quand n augmente, mais non que cette erreur moyenne tende vers o quand n croît au delà de toute limite. D'ailleurs S_0 pourrait tendre vers o sans que R_0 tendît vers o.

Remplaçons toutefois V_0 par sa valeur approchée

$$\sum_{p=1}^{p=n} J_p^0 U_p.$$

Nous en déduirons

$$V = \sum_{p=1}^{p=n} J_p^0 e^{-a^2 k_p t} U_p = \sum J_p U_p,$$

nous rappelons que nous avons posé

$$\int V U_p \, d\tau = J_p = J_p^0 e^{-a^2 k_p t}.$$

Posons donc :

$$V = J_1 U_1 + J_2 U_2 + \ldots + J_n U_n + R,$$

et prenons pour mesure de l'erreur moyenne commise :

$$S = \int R^2 \, d\tau,$$

je me propose de démontrer que l'on peut prendre n assez grand pour que l'erreur moyenne S commise sur la température à un instant donné soit aussi petite qu'on le veut.

En effet R satisfait aux équations

$$\frac{dR}{dt} = a^2 \Delta R, \qquad \frac{dR}{dn} + hR = 0.$$

Si donc la température initiale était R_0, la température à un instant ultérieur serait représentée par R.

De plus on a, comme il est aisé de le vérifier :

$$\int RU_1 \, d\tau = \int RU_2 \, d\tau = \ldots = \int RU_n \, d\tau = 0.$$

Donc d'après un lemme que nous avons démontré plus haut, on aura :

$$S < S_0 \, e^{-a^2 k_{n+1} t}.$$

Or quand n croît au delà de toute limite, S_0 décroît (sans que nous sachions s'il tend vers o), k_{n+1} croît au delà de toute limite et l'exponentielle $e^{-a^2 k_{n+1} t}$ tend vers o. Donc S tend vers o. C. Q. F. D.

Nous avons donc démontré que l'erreur moyenne S tend vers o, mais non que R tend vers o. Cela peut toutefois nous suffire pour le moment. En effet, comment pourrait-il arriver que S tendît vers o sans qu'il en fût de même de R ? Il faudrait pour cela que la valeur de R subît des oscillations d'autant plus rapides que n serait plus grand, de telle façon que pour n très grand, R prendrait en des points très rapprochés des valeurs très différentes. Aucun physicien ne doutera que si un pareil état de choses existait à l'instant initial, il ne saurait subsister. C'est ce qui m'engage à me contenter pour le moment des considérations qui précèdent.

Je terminerai ce paragraphe par la remarque suivante :

Si V_0 est partout positif, V sera aussi positif pour toutes les valeurs de t et pour tous les points du corps. Or quand t croît indéfiniment, le rapport $\frac{V}{J_1 U_1}$ tend vers l'unité.

Donc U_1 doit être une fonction qui est positive en tous les points du corps.

L'égalité

$$\int U_1 U_n \, d\tau = 0 \qquad (n > 1)$$

montre que la fonction U_1 est la seule des fonctions U_n qui jouisse de cette propriété.

4. — Propriétés des fonctions U_n.

Reprenons la fonction U_n définie par les équations :

$$\Delta U_n + k_n U_n = 0, \qquad \frac{dU_n}{dn} + h U_n = 0, \qquad \int U_n^2 \, d\tau = 1.$$

Ou en supprimant les indices qui nous sont inutiles pour le moment :

$$\Delta U + k U = 0, \qquad \frac{dU}{dn} + h U = 0, \qquad \int U^2 \, d\tau = 1.$$

Soit T une fonction satisfaisant comme U à l'équation :

$$\Delta T + k T = 0.$$

Si T est finie et continue ainsi que ses dérivées à l'intérieur du corps, on aura

$$\int \left(U \frac{dT}{dn} - T \frac{dU}{dn} \right) d\omega = 0$$

ou

$$\int U \left(\frac{dT}{dn} + h T \right) d\omega = 0,$$

les intégrales étant étendues à la surface du corps.

Supposons maintenant que la fonction T ne soit plus finie à l'intérieur du corps qu'elle devienne infinie au point (x_0, y_0, z_0) situé à l'intérieur du corps; mais de telle façon que la différence $T - \frac{1}{r}$ (où r désigne la distance des deux points x, y, z et x_0, y_0, z_0) reste finie ainsi que ses dérivées.

On aura alors :

$$\int \left(U \frac{dT}{dn} - T \frac{dU}{dn} \right) d\omega = -4\pi U^0,$$

U^0 désignant la valeur de U au point x_0, y_0, z_0. C'est ce que j'ai déjà exposé à propos de la Diffraction dans ma Théorie mathématique de la Lumière.

Il vient donc :

$$\int U \left(\frac{dT}{dn} + h T \right) d\omega = -4\pi U^0.$$

Soit maintenant :

$$\alpha = \sqrt{k}$$

et

$$T = \frac{e^{i\alpha r}}{r},$$

r désignant encore la distance du point mobile x, y, z au point fixe x_0, y_0, z_0.

On aura alors :

$$\int U\left(\frac{dT}{dn} + hT\right) d\omega = 0 \quad \text{ou} \qquad 4\pi U^0,$$

selon que le point x_0, y_0, z_0 est extérieur ou intérieur au corps.

On a d'ailleurs dans ce cas :

$$\frac{dT}{dn} = \cos\psi \frac{e^{i\alpha r}}{r}\left(i\alpha - \frac{1}{r}\right),$$

ψ étant l'angle de la normale à la surface du corps au point x, y, z avec la droite qui joint ce point au point fixe x_0, y_0, z_0.

Nous poserons pour abréger

$$H = \frac{dT}{dn} + hT$$

et nous regarderons H soit comme fonction de r et de

$$r\cos\psi = \xi$$

soit comme fonction de x, y, z et de x_0, y_0, z_0.

On aura alors :

$$r\cos\psi = \lambda(x_0 - x) + \mu(y_0 - y) + \nu(z_0 - z),$$

λ, μ, ν désignant les trois cosinus directeurs de la normale à la surface du corps. On en déduit :

$$\frac{dH}{dx_0} = \frac{dH}{dr}\frac{x_0 - x}{r} + \frac{dH}{d\xi}\lambda.$$

On a ensuite si le point x_0, y_0, z_0 est intérieur au corps :

$$U_0 = \frac{1}{4\pi}\int HU\, d\omega, \qquad \frac{dU_0}{dx_0} = \frac{-1}{4\pi}\int \frac{dH}{dx_0} U\, d\omega.$$

Cela va nous permettre de trouver une limite supérieure de U_0 et de ses dérivées.

Soit, en effet, A la plus grande valeur que puisse prendre $|U|$ à la surface du corps, on aura évidemment :

$$|U_0| < \frac{A}{4\pi}\int |H|\, d\omega, \qquad \left|\frac{dU_0}{dx_0}\right| < \frac{A}{4\pi}\int \left|\frac{dH}{dx_0}\right| d\omega.$$

Les deux intégrales qui entrent dans ces deux inégalités

$$\int |H|\, d\omega \quad \text{et} \quad \int \left| \frac{dH}{dx_0} \right| d\omega$$

se calculent aisément quand on connaît la forme de la surface du corps et le nombre positif k. Elles ne dépendent que de x_0, y_0, z_0.

Quant au coefficient A, nous n'avons jusqu'à présent aucun moyen de le déterminer.

Commençons par étudier les variations de la première intégrale $\int |H|\, d\omega$.

Cette intégrale est évidemment finie tant que le point x_0, y_0, z_0 reste intérieur au corps. On a en effet :

$$|H| < \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{h}{r},$$

de sorte qu'il viendra :

$$\int |H|\, d\omega < S\left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{h}{\rho}\right),$$

S désignant la surface totale du corps et ρ la plus courte distance du point x_0, y_0, z_0 à cette surface. Je dis maintenant que notre intégrale tendra encore vers une limite finie quand le point x_0, y_0, z_0 se rapprochera indéfiniment de cette surface.

Posons en effet :

$$H = \frac{h}{r} - \frac{\cos\psi}{r^2} + H_1.$$

H_1 sera une fonction qui ne deviendra pas infinie même quand r s'annulera. Nous trouvons en effet :

$$H_1 = \frac{\cos\psi}{r^2}\left[i\alpha r e^{i\alpha r} - e^{i\alpha r} + 1\right] + \frac{h}{r}\left(e^{i\alpha r} - 1\right).$$

$$\left|\frac{e^{i\alpha r} - 1}{r}\right| = \frac{2\left|\sin\frac{\alpha r}{2}\right|}{r} < \alpha; \qquad \left|\frac{i\alpha r e^{i\alpha r} - e^{i\alpha r} + 1}{r^2}\right| < 4\alpha^2$$

et enfin :

$$|H_1| < h\alpha + 4\alpha^2,$$

d'où :

$$\int |H|\, d\omega < h\alpha S + 4\alpha^2 S + h\int \frac{d\omega}{r} + \int \frac{d\omega}{r^2} |\cos\psi|.$$

Il est aisé de voir que quand le point x_0, y_0, z_0 se rapproche indéfiniment de la surface du corps, les intégrales $\int \frac{d\omega\,|\cos\psi|}{r^2}$ et l'intégrale $\int \frac{d\omega}{r}$ tendent vers des limites finies.

Si d'abord le corps est convexe, de telle façon qu'une droite ne puisse couper sa surface en plus de deux points, $\cos\psi$ est positif et l'on a :

$$\int \frac{|\cos\psi|}{r^2}\,d\omega = \int \frac{\cos\psi}{r^2}\,d\omega = 4\pi.$$

Si le corps n'est pas convexe, et qu'une droite puisse rencontrer sa surface en n points on aura :

$$\int \frac{|\cos\psi|}{r^2}\,d\omega < 4(n-1)\pi,$$

car l'intégrale s'obtient en décrivant du point x_0, y_0, z_0 comme centre une sphère de rayon 1 et en faisant la perspective de la surface du corps sur la surface de cette sphère, le centre de la dite sphère étant pris comme centre de la perspective. Un point de la sphère sera alors au plus la perspective de $n-1$ points de la surface du corps; de sorte que la somme *arithmétique* des aires des perspectives des divers éléments de cette surface sera au plus égale à $n-1$ fois la surface de la sphère. Or cette somme arithmétique est précisément l'intégrale $\int \frac{|\cos\psi|}{r^2}\,d\omega$. La somme algébrique serait l'intégrale $\int \frac{\cos\psi}{r^2}\,d\omega$.

Ainsi $\int \frac{|\cos\psi|}{r^2}\,d\omega$ tend vers une limite finie; il reste à démontrer qu'il en est de même de $\int \frac{d\omega}{r}$. Or cette intégrale représente le potentiel d'une couche uniforme de matière répandue à la surface du corps, et l'on sait que ce potentiel est fini.

Si nous passons maintenant à l'inégalité :

$$\frac{dU_0}{dx_0} < A\int \left|\frac{dH}{dx_0}\right| d\omega,$$

elle nous permet de démontrer qu'à l'intérieur du corps les dérivées premières (et on le démontrerait de la même façon pour les dérivées d'ordre supérieur) de la fonction U_0 restent finies; mais elle ne nous permet pas de voir si ces dérivées tendent vers une limite finie quand le point x_0, y_0, z_0 se rapproche indéfiniment de la surface du corps.

Nous allons maintenant chercher à obtenir une limite supérieure du coefficient A.

Pour cela il nous faut démontrer que U est une fonction continue.

Cela est évident pour les points situés à l'intérieur du corps puisque nous venons de voir qu'en ces points on peut trouver une limite supérieure des dérivées de U.

Il reste à démontrer que U est encore une fonction continue sur la surface du corps, et pour cela il nous faut une expression de U_0 quand le point x_0, y_0, z_0 est sur cette surface.

Nous avons trouvé plus haut

$$\int UH\,d\omega = 0 \quad \text{ou} \quad -4\pi U_0$$

selon que le point x_0, y_0, z_0 est extérieur ou intérieur au corps.

En vertu des mêmes principes, on aura

$$\int UH\,d\omega = -2\pi U_0$$

si le point x_0, y_0, z_0 est sur la surface même du corps.

Si x'_0, y'_0, z'_0 est un autre point situé également sur la surface du corps et si H' et U'_0 sont deux fonctions formées avec le point x'_0, y'_0, z'_0 comme H et U_0 le sont avec le point x_0, y_0, z_0 ; il viendra :

$$\int U(H - H')\,d\omega = 2\pi(U'_0 - U_0),$$

d'où

$$|U'_0 - U_0| < A\int |H - H'|\,d\omega.$$

Il nous reste à établir que :

$$\int |H - H'|\,d\omega$$

tend vers 0 quand le point x'_0, y'_0, z'_0 se rapproche indéfiniment du point x_0, y_0, z_0.

Remarquons d'abord que nous pouvons poser :

$$H = \frac{h}{r} - \frac{\cos\psi}{r^2} + H_1,$$

$$H' = \frac{h}{r'} - \frac{\cos\psi'}{r'^2} + H'_1,$$

H_1 a même signification que plus haut; H'_1 est formé avec le point x'_0, y'_0, z'_0 comme H_1 avec le point x_0, y_0, z_0 ; r' désigne la distance du point x'_0, y'_0, z'_0 au point x, y, z et l'angle ψ' est défini avec le point x'_0, y'_0, z'_0 comme l'angle ψ avec le point x_0, y_0, z_0.

On a donc :

$$\int |H - H'|\,d\omega < h\int\left|\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right| d\omega + \int\left|\frac{\cos\psi}{r^2} - \frac{\cos\psi'}{r'^2}\right| d\omega + \int |H_1 - H'_1|\,d\omega.$$

Il suffit donc de démontrer que les trois intégrales

$$\int \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| d\omega, \quad \int \left| \frac{\cos\psi}{r^2} - \frac{\cos\psi'}{r'^2} \right| d\omega, \quad \int | H_1 - H'_1 | \, d\omega$$

tendent vers o quand les deux points se rapprochent indéfiniment. Cela est évident pour la troisième; car H_1 est une fonction continue et finie de x_0, y_0 et z_0.

Démontrons-le maintenant pour la première.

Décomposons la surface S du corps en deux régions σ et σ'; et supposons que les deux points x_0, y_0, z_0 et x'_0, y'_0, z'_0 appartiennent à la région σ.

Je dis que je pourrai prendre ces deux points assez rapprochés pour que

$$\int_S \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| d\omega = \int_\sigma \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| d\omega + \int_{\sigma'} \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| d\omega < \varepsilon.$$

Tout d'abord nous savons que les deux intégrales

$$\int \frac{d\omega}{r}, \quad \int \frac{d\omega}{r'}$$

sont finies et déterminées. Il en résulte que nous pourrons prendre la région σ assez petite pour que :

$$\int_\sigma \frac{d\omega}{r} < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \int_\sigma \frac{d\omega}{r'} < \frac{\varepsilon}{3}$$

quelle que soit la position du point x'_0, y'_0, z'_0 dans cette région σ, d'où :

$$\int_\sigma \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| d\omega < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

La région σ doit désormais être regardée comme entièrement déterminée, mais nous pouvons encore faire varier dans cette région le point x'_0, y'_0, z'_0.

Si maintenant r' désigne la distance du point x'_0, y'_0, z'_0 à un point x, y, z quelconque de la région σ', $\frac{1}{r'}$ sera une fonction finie et continue de x'_0, y'_0, z'_0 et cette fonction tendra *uniformément* vers $\frac{1}{r}$ quand x'_0, y'_0, z'_0 tendront vers x_0, y_0, z_0. Cela sera vrai tant que le point x, y, z restera sur la région σ', puisque les points x_0, y_0, z_0 et x'_1, y'_1, z'_1 n'appartiennent pas à cette région.

On pourra donc prendre le point x'_0, y'_0, z'_0 assez voisin du point x_0, y_0, z_0 pour que

$$\int_{\sigma'} \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| d\omega < \frac{\varepsilon}{3}$$

et par conséquent

$$\int_S \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right| d\omega < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On établirait de la même manière que

$$\lim \int \left| \frac{\cos\psi}{r^2} - \frac{\cos\psi'}{r'^2} \right| d\omega < 0.$$

On a donc :

$$\lim \int |H - H'| \, d\omega = 0, \qquad \lim |U_0 - U'_0| = 0,$$

ce qui signifie que la fonction U est continue à la surface du corps.

Cette démonstration ne montre toutefois qu'une chose, c'est que U'_0 tend vers U_0, quand le point x_0, y_0, z_0 appartient à la surface du corps et que le point x'_0, y'_0, z'_0 s'en rapproche en restant lui-même sur la surface du corps. Elle ne nous apprend rien sur ce qui arrive quand le point x'_0, y'_0, z'_0 est intérieur au corps et se rapproche de x_0, y_0, z_0 soit normalement, soit obliquement à la surface du corps. On pourrait observer toutefois que

$$\frac{dU}{dn} = hU$$

étant fini, U'_0 doit tendre vers U_0 quand la droite qui joint les deux points est normale à la surface et il serait aisé d'en conclure, par un petit raisonnement très simple, qu'il en est encore de même quand cette droite est oblique.

Mais cela ne saurait nous suffire, parce que nous avons besoin pour notre objet d'assigner une limite supérieure de $|U'_0 - U_0|$.

Si comme nous le supposons le point x_0, y_0, z_0 est sur la surface du corps et le point x'_0, y'_0, z'_0 à l'intérieur, on aura :

$$\int HU \, d\omega - 2\pi U_0 = -4\pi U_0,$$

$$\int H'U \, d\omega = -4\pi U'_0,$$

d'où

$$\int (H - H') U \, d\omega - 2\pi U_0 = -4\pi (U_0 - U'_0).$$

Nous avons donc :

$$4\pi (U_0 - U'_0) = h \int \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) U \, d\omega$$

$$+ \int (H_1 - H'_1) U \, d\omega + \int \left(\frac{\cos\psi'}{r'^2} - \frac{\cos\psi}{r^2} \right) U \, d\omega - 2\pi U_0.$$

Il nous faut démontrer que les trois intégrales du second membre tendent respectivement vers 0, 0 et $2\pi U_0$ quand le point x'_0, y'_0, z'_0 se rapproche indéfiniment du point x_0, y_0, z_0.

Or on a :

$$\left|\int (H_1 - H'_1)\, U\, d\omega\right| < A\int |H_1 - H'_1|\, d\omega$$

et on verrait comme plus haut que

$$\lim \int |H_1 - H'_1|\, d\omega = 0.$$

Il n'y aurait rien à changer à la démonstration que nous avons donnée dans le cas qui précède.

De même on a :

$$\left|\int \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) U\, d\omega\right| < A\int \left|\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right| d\omega$$

et

$$\lim \int \left|\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right| d\omega = 0.$$

Ici encore il n'y a rien à changer à la démonstration que nous avons donnée dans le cas précédent.

Il reste à établir que :

$$\lim \int \left(\frac{\cos\psi'}{r'^2} - \frac{\cos\psi}{r^2}\right) U\, d\omega = 2\pi U_0.$$

Décomposons la surface S du corps en deux régions σ et σ' et supposons encore que le point x_0, y_0, z_0 soit situé dans la région σ; il viendra :

$$(2)\quad \int \left(\frac{\cos\psi'}{r'^2} - \frac{\cos\psi}{r^2}\right) U\, d\omega = \int_{\sigma'} \left(\frac{\cos\psi'}{r'^2} - \frac{\cos\psi}{r^2}\right) U\, d\omega + \int_{\sigma} \left(\frac{\cos\psi'}{r'^2} - \frac{\cos\psi}{r^2}\right)(U - U_0)\, d\omega + \int_{\sigma} \left(\frac{\cos\psi'}{r'^2} - \frac{\cos\psi}{r^2}\right) U\, d\omega.$$

Je dis que je puis prendre le point x'_0, y'_0, z'_0 assez voisin de x_0, y_0, z_0 pour que la différence de $2\pi U_0$ et du premier membre de l'identité (2) soit plus petite en valeur absolue que ε.

En premier lieu, la fonction U étant continue à la surface du corps, nous pourrons prendre la région σ assez petite pour que sur cette région on ait :

$$|U - U_0| < \zeta,$$

ζ étant une quantité aussi petite que l'on veut. Il vient alors :

$$\left|\int_\sigma\left(\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right)(\text{U}-\text{U}_0)\,d\omega\right|<\zeta\int_\sigma\left|\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right|d\omega.$$

Or nous venons de trouver

$$\int\left|\frac{\cos\psi}{r^2}\right|d\omega<4(n-1)\pi,$$

n étant le nombre maximum des intersections d'une droite avec la surface du corps.

Il vient donc :

$$\left|\int_\sigma\left(\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right)(\text{U}-\text{U}_0)\,d\omega\right|<8(n-1)\pi\zeta<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Car, ζ étant aussi petit que je veux, je puis toujours prendre

$$\zeta<\frac{\varepsilon}{24(n-1)\pi}.$$

La région σ doit être regardée maintenant comme entièrement déterminée, mais je puis encore faire varier le point x'_0, y'_0, z'_0.

Nous voyons d'abord que le point x_0, y_0, z_0 ne faisant pas partie de la région σ', on a :

$$\lim\int_{\sigma'}\left|\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right|d\omega=0,$$

de sorte qu'on peut prendre le point x'_0, y'_0, z'_0 assez voisin du point x_0, y_0, z_0 pour que :

$$\int_{\sigma'}\left|\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right|d\omega<\frac{\varepsilon}{3\text{A}}$$

et par conséquent pour que :

$$\left|\int_{\sigma'}\left(\frac{\cos\psi'}{r'^2}-\frac{\cos\psi}{r^2}\right)d\omega\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, l'intégrale

$$\int_\sigma\frac{\cos\psi'}{r'^2}\,d\omega$$

représente l'angle solide sous lequel on voit le contour de la région σ du point x'_0, y'_0, z'_0, et l'intégrale

$$\int_\sigma\frac{\cos\psi}{r^2}\,d\omega$$

représente l'angle solide sous lequel on voit le même contour du point x_0, y_0, z_0.

Il en résulte que :

$$\lim \int_\sigma \frac{\cos\psi'}{r'^2}\, d\omega = \int_\sigma \frac{\cos\psi}{r^2}\, d\omega + 2\pi.$$

On peut donc prendre le point x'_0, y'_0, z'_0 assez voisin de x_0, y_0, z_0 pour que

$$\left| \int_\sigma \left(\frac{\cos\psi'}{r'^2} - \frac{\cos\psi}{r^2} \right) d\omega - 2\pi \right| < \frac{\varepsilon}{3\,A}$$

ou :

$$\left| \int_\sigma \left(\frac{\cos\psi'}{r'^2} - \frac{\cos\psi}{r^2} \right) U_0\, d\omega - 2\pi\, U_0 \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il vient alors

$$\left| \int_S \left(\frac{\cos\psi'}{r'^2} - \frac{\cos\psi}{r^2} \right) U\, d\omega - 2\pi\, U_0 \right| < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Voici le résumé de cette longue discussion.

Soient x_0, y_0, z_0 ; x'_0, y'_0, z'_0 deux points situés soit à l'intérieur du corps, soit à sa surface. Soient U_0 et U'_0 les valeurs de U en ces deux points ; on aura :

$$| U_0 - U'_0 | < A\,\theta,$$

A étant la plus grande valeur de $|U|$ à la surface du corps ; quant à θ ce sera une fonction de $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$ que l'on pourra déterminer complètement à l'aide des considérations qui précèdent quand on connaîtra la forme du corps. Ces considérations nous fournissent en effet une limite supérieure de $| U_0 - U'_0 |$ puisqu'elles nous montrent comment on doit choisir les deux points x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0 pour que $| U_0 - U'_0 |$ soit plus petit que ε.

Je n'attirerai l'attention que sur deux des propriétés de la fonction θ. Elle est essentiellement positive et elle tend uniformément vers o quand le point x'_0, y'_0, z'_0 se rapproche indéfiniment du point x_0, y_0, z_0.

Regardons d'abord le point x_0, y_0, z_0 comme fixe et situé sur la surface du corps et faisons varier le point x'_0, y'_0, z'_0. Nous pourrons diviser le volume du corps en deux régions que nous appellerons R et R' et que nous définirons comme il suit :

Quand le point x'_0, y'_0, z'_0 sera dans la région R on aura :

$$\theta < 1.$$

Quand ce point sera dans la région R' on aura :

$$\theta > 1.$$

La région R existe certainement et son volume ne peut être nul, puisque θ est très voisin de o quand le point x'_0, y'_0, z'_0 est très voisin de x_0, y_0, z_0.

Si nous supposons en particulier que le point x_0, y_0, z_0 soit celui des points de la surface du corps où $|U|$ atteint sa valeur maximum A, on aura :

$$|U'_0| > A(1-\theta)$$

tant que le point x'_0, y'_0, z'_0 restera à l'intérieur de la région R.

Soit $d\tau'$ l'élément de volume du corps dont le centre de gravité est x'_0, y'_0, z'_0.

On aura :

$$\int U_0'^2\, d\tau' = 1,$$

l'intégrale étant étendue au corps tout entier; et par conséquent

$$\int_R U_0'^2\, d\tau' \quad 1,$$

l'intégrale étant étendue seulement à la région R. On en déduit :

$$A^2 \int_R (1-\theta)^2\, d\tau' \quad 1.$$

Cette inégalité est vraie pourvu que l'on ait choisi pour le point x_0, y_0, z_0 celui des points de la surface du corps pour lequel

$$|U| = A.$$

Malheureusement nous ne savons pas quel est celui des points de la surface pour lequel cela a lieu. Mais nous pouvons tourner la difficulté de la façon suivante. L'intégrale

$$\int_R (1-\theta)^2\, d\tau'$$

peut être calculée dès que l'on connaît la forme du corps et le point x_0, y_0, z_0. C'est donc une fonction de x_0, y_0, z_0. Cette fonction ne peut jamais s'annuler. Elle aura donc un minimum M que l'on pourra déterminer dès qu'on connaîtra la forme du corps. Il vient ainsi

$$A^2 M < 1, \qquad \text{d'où} \qquad A < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Ainsi nous pouvons déterminer une limite supérieure du coefficient A et, par conséquent, une limite supérieure des dérivées d'ordre quelconque de U en un point quelconque de l'intérieur du corps.

5. — Retour à l'hypothèse moléculaire.

Dans les raisonnements qui remplissent les trois paragraphes précédents, il y a un point faible que j'ai déjà signalé plus haut.

Après avoir montré qu'une certaine intégrale ne pouvait pas s'annuler nous en avons conclu que cette intégrale devait avoir un minimum, et nous avons déterminé la fonction U qui correspond à ce minimum par le calcul des variations. Or cette application n'eût été légitime que si nous avions démontré d'avance la continuité de cette fonction U. C'est d'ailleurs la même objection qui empêche de regarder comme rigoureuse la démonstration du principe de Dirichlet par Riemann.

Il est vrai que dans le paragraphe précédent, nous avons trouvé une limite supérieure de la dérivée de cette fonction U; mais, si l'on voulait s'en servir pour justifier l'emploi du calcul des variations, on commettrait une pétition de principe; tout au plus ce résultat peut-il mettre sur la voie dans la recherche d'une démonstration satisfaisante.

Il faudrait donc, pour obtenir une théorie analytiquement rigoureuse, employer des procédés analogues à ceux qui permettent d'établir le principe de Dirichlet et peut-être des procédés plus compliqués encore.

Je ne l'ai pas fait; mais j'ai pensé qu'il était possible d'obtenir une démonstration rigoureuse au point de vue physique de la façon suivante. Au lieu de considérer l'équation différentielle de Fourier en elle-même, rappelons-nous qu'elle est sa signification physique et comment on l'a obtenue.

On considère un corps solide formé d'un très grand nombre de molécules. Soient

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_n$$

ces molécules, n est un très grand nombre. Soient

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_n$$

les températures de ces molécules.

La molécule M_i enverra à la molécule M_k une quantité de chaleur égale à

$$C_{ik}(V_i - V_k),$$

C_{ik} étant un coefficient indépendant des températures, ne dépendant que de la distance des deux molécules; ce coefficient est très petit dès que cette distance devient sensible.

En outre, cette molécule M_i rayonnera au dehors une quantité de chaleur égale à :

$$C_i V_i,$$

C_i étant un coefficient qui n'est sensible que pour les molécules superficielles.

Si nous choisissons l'unité de chaleur de façon que chacune de nos molécules, que nous supposons toutes pareilles entre elles ait pour chaleur spécifique l'unité, nous pourrons écrire :

$$(1) \qquad \frac{dV_i}{dt} + \sum_{k=1}^{k=n} C_{ik}(V_i - V_k) + C_i V_i = 0$$

et nous aurons n équations pareilles en faisant $i = 1, \ldots, n$.

C'est en transformant le système (1) que Fourier est arrivé aux équations qui nous ont occupés dans les paragraphes précédents. Pour cela il passe à la limite, de façon à passer des équations aux différences finies aux équations différentielles et en tenant compte de l'isotropie du corps. Mais si l'étude de ces équations différentielles nous conduit à une de ces difficultés qui tiennent à la considération de l'infini, nous ne devons pas oublier que cette difficulté est factice, puisque au point de vue purement physique, ces équations différentielles ne sont là que pour remplacer des équations aux différences finies qui en diffèrent très peu et pour lesquelles cette difficulté n'existe pas. Il y a donc intérêt à étudier le système (1) en lui-même.

Cette étude ne présente aucune difficulté puisqu'il s'agit d'un système d'équations linéaires à coefficients constants.

Posons donc :

$$V_i = U_i e^{-\alpha t},$$

les U_i et α étant des constantes ; les équations (1) deviendront :

$$(2) \qquad \alpha U_i = \Sigma_k C_{ik}(U_i - U_k) + C_i U_i.$$

En éliminant les n constantes U_i entre ces n équations (2), on arrive à une équation de degré n en α que j'écrirai :

$$(3) \qquad F(\alpha) = 0.$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n racines de l'équation (3) ; considérons une de ces racines que j'appelle α_p. Quand dans les équations (2) on fera $\alpha = \alpha_p$, ces équations deviendront compatibles et on en tirera :

$$U_1 = U_{p1}, \qquad U_2 = U_{p2}, \qquad \ldots, \qquad U_n = U_{pn}.$$

L'intégrale générale des équations (1) sera alors :

$$V_1 = A_1 e^{-\alpha_1 t} U_{11} + A_2 e^{-\alpha_2 t} U_{21} + \ldots + A_n e^{-\alpha_n t} U_{n1},$$
$$V_2 = A_1 e^{-\alpha_1 t} U_{12} + A_2 e^{-\alpha_2 t} U_{22} + \ldots + A_n e^{-\alpha_n t} U_{n2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$V_n = A_1 e^{-\alpha_1 t} U_{1n} + A_2 e^{-\alpha_2 t} U_{2n} + \ldots + A_n e^{-\alpha_n t} U_{nn},$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant n constantes arbitraires d'intégration.

On voit déjà par là que la véritable solution est bien de la forme à laquelle nous avions été conduits dans les paragraphes 2 et 3. Mais la forme symétrique des équations (2) va nous en apprendre davantage. La quantité de chaleur envoyée par M_i à M_k doit être égale à celle que reçoit M_k de M_i, on a donc :

$$C_{ik} = + C_{ki}.$$

Envisageons donc la forme quadratique positive :

$$\Phi(U_1, U_2, \ldots, U_n) = \Sigma C_{ik}(V_i - V_k)^2 + \Sigma C_i V_i^2$$

les équations (2) pourront s'écrire :

$$\text{(2 bis)} \qquad \alpha U_i = \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dU_i}$$

Si nous regardons $U_1, U_2, \ldots, U_n$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions, l'équation

$$\Phi = 1$$

représente un ellipsoïde puisque la forme Φ est positive.

Comment devrait-on procéder pour trouver les axes de cet ellipsoïde. Il faudrait précisément résoudre les équations (2 *bis*), éliminer les U_i entre ces équations, ce qui donnerait l'équation (3).

Il résulte de là que l'équation (3) a toutes ses racines réelles et positives. Ce résultat est connu de tous sous cette forme pour les ellipsoïdes dans l'espace ordinaire à 3 dimensions. Il est vrai encore dans le cas qui nous occupe, comme nous l'apprend la théorie des formes quadratiques.

En effet la forme Φ peut être décomposée en une somme de n carrés et nous écrirons cette décomposition sous la forme suivante :

$$\Phi = \alpha_1 \varphi_1^2 + \alpha_2 \varphi_2^2 + \ldots + \alpha_n \varphi_n^2,$$

où

$$\varphi_p = U_{p1} U_1 + U_{p2} U_2 + \ldots + U_{pn} U_n,$$

$U_{p1}, U_{p2}, \ldots,$ étant des constantes.

Soit maintenant :

$$\Theta = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2.$$

La théorie des formes quadratiques nous apprend que l'on peut choisir la décomposition de Φ de telle sorte que :

$$\Theta = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \ldots + \varphi_n^2,$$

ce qui entraîne les conditions :

(4) $$U_{p1}^2 + U_{p2}^2 + \ldots + U_{pn}^2 = 1,$$

(5) $$U_{p1} U_{q1} + U_{p2} U_{q2} + \ldots + U_{pn} U_{qn} = 0 \qquad (p \gtrless q).$$

Si donc on écrit les n équations simultanées :

(6) $$\varphi_p = 1, \qquad \varphi_q = 0 \qquad (p \gtrless q),$$

ces équations admettront pour solution :

(7) $$U_1 = U_{p1}, \qquad U_2 = U_{p2}, \qquad \ldots, \qquad U_n = U_{pn}.$$

Or ces équations (6) entraînent les suivantes :

$$\frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dU_i} = \alpha_p \varphi_p \frac{d\varphi_p}{dU_i} = \alpha_p \frac{d\varphi_p}{dU_i}, \qquad U_i = \frac{1}{2} \frac{d\Theta}{dU_i} = \varphi_p \frac{d\varphi_p}{dU_i} = \frac{d\varphi_p}{dU_i},$$

d'où :

$$\frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dU_i} = \alpha_p U_i.$$

Nous retrouvons les équations (2 *bis*). Les valeurs (7) des U et la valeur α_p de α nous représentent donc une solution de ces équations (2 *bis*).

Quelle est maintenant la signification de ces nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Supposons que ces nombres qui sont tous réels et positifs soient rangés par ordre de grandeur croissante.

Il est clair que α_1 sera le minimum du rapport :

$$\frac{\Phi}{\Theta} = \frac{\alpha_1 \varphi_1^2 + \alpha_2 \varphi_2^2 + \ldots + \alpha_n \varphi_n^2}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \ldots + \varphi_n^2}.$$

Si maintenant on suppose que les n variables U ne soient plus arbitraires, mais soient liées par la relation

(8) $$\varphi_1 = 0,$$

on verra que α_2 sera le minimum du rapport :

$$\frac{\Phi}{\Theta} = \frac{\alpha_2 \varphi_2^2 + \ldots + \alpha_n \varphi_n^2}{\varphi_2^2 + \ldots + \varphi_n^2}.$$

Si les U sont liées par les deux relations

(8 *bis*) $$\varphi_1 = \varphi_2 = 0,$$

α_3 sera le minimum du rapport :

$$\frac{\Phi}{\Theta} = \frac{\alpha_3 \varphi_3^2 + \ldots + \alpha_n \varphi_n^2}{\varphi_3^2 + \ldots + \varphi_n^2}$$

et ainsi de suite.

L'analogie avec l'analyse du paragraphe 2 est évidente; il suffit pour retrouver cette analyse de passer à la limite comme l'a fait Fourier.

Les équations (1) sont analogues aux équations de Fourier :

$$\frac{dV}{dt} = a^2 \Delta V, \qquad \frac{dV}{dn} + hV = 0.$$

Les équations (2) et (2 *bis*) sont analogues aux équations qui définissent les fonctions U et qui s'écrivent :

$$\Delta U + kU = 0, \qquad \frac{dU}{dn} + hU = 0.$$

Les nombres α sont analogues aux nombres k.

La forme Φ est analogue à l'intégrale que nous avons appelée B dans le paragraphe 2 et la forme Θ à l'intégrale que nous avons appelée A.

L'équation (4) est analogue à l'équation :

$$\int U_n^2 \, d\tau = 1$$

et l'équation (5) (qui exprime que les axes de notre ellipsoïde sont rectangulaires) à l'équation :

$$\int U_n U_p \, d\tau = 0 \qquad (n \gtrless p)$$

Il est inutile de pousser plus loin cette comparaison, on comprend suffisamment la parfaite identité des raisonnements, bien que ceux-ci soient parfaitement rigoureux dans le cas du présent paragraphe, où l'infini n'intervient pas, et qu'ils soient au contraire sujets à de graves objections dans le cas du paragraphe 2.

Ce n'est pas seulement dans l'étude du problème de Fourier qu'on est conduit à ces considérations; on obtiendrait des résultats tout à fait analogues en

envisageant au même point de vue les autres problèmes de Physique mathématique.

Dans tous ces problèmes on a à intégrer des équations linéaires aux dérivées partielles. Ces équations ont partout la même origine. Les lois du phénomène véritable sont exprimées par des équations linéaires aux différentielles ordinaires, où la seule variable indépendante est le temps et où les inconnues sont en très grand nombre; chacune de ces inconnues en effet, représente la valeur d'une certaine quantité relative à l'une des molécules du corps. Le nombre de ces inconnues est donc kn, n étant le nombre des molécules du corps, et k le nombre des quantités relatives à chaque molécule. C'est par un véritable passage de la limite qu'on passe ensuite de l'hypothèse moléculaire à celle de la matière continue et des équations différentielles ordinaires aux équations aux dérivées partielles.

Si donc on revient momentanément à l'hypothèse moléculaire, on n'a plus affaire qu'à des équations linéaires ordinaires à coefficients constants, et la seule difficulté provient du très grand nombre de ces équations. Mais il y a plus; ces équations présenteront presque toujours la symétrie que nous avons observée dans les équations (1) et on sera encore conduit à envisager une forme quadratique et tout sera ramené à la décomposition de cette forme en carrés.

Je n'en donnerai qu'un exemple; j'envisagerai les équations de l'élasticité. Soient x, y, z les coordonnées d'une molécule quelconque, dans l'état d'équilibre lorsque les forces extérieures appliquées au corps sont nulles; soient $x+u$, $y+v$, $z+w$ les coordonnées de cette même molécule lorsque le corps élastique est déformé sous l'action de forces extérieures; soit Φ la fonction des forces relative aux forces élastiques; soient X, Y, Z les trois composantes de la force extérieure appliquée à la molécule considérée. Les équations d'équilibre s'écriront alors :

$$(9) \qquad \frac{d\Phi}{du} = \mathrm{X}, \qquad \frac{d\Phi}{dv} = \mathrm{Y}, \qquad \frac{d\Phi}{dw} = \mathrm{Z}.$$

Comme u, v, w sont très petits, nous pouvons développer Φ suivant les puissances de ces quantités et négliger les puissances d'ordre supérieur à 2. Les termes du 1[er] degré doivent être nuls, puisque l'équilibre normal est atteint pour :

$$u = v = w = 0.$$

Je puis supposer que le terme tout connu est également nul; puisque Φ n'est déterminé qu'à une constante près.

En résumé Φ sera une forme quadratique par rapport aux u, v, w, et cette forme sera positive parce que l'équilibre normal doit être stable.

Les équations (9) seront donc linéaires en u, v, w. Le nombre de ces équations est le même que celui des inconnues u, v, w; il est égal à n, si le nombre des molécules est $\frac{n}{3}$. Afin de reprendre les mêmes notations que tout à l'heure, nous appellerons les n variables, $U_1, U_2, \ldots, U_n$; alors si les trois coordonnées d'une molécule que nous appelions tout à l'heure u, v, w, s'appellent maintenant U_p, U_{p+1}, U_{p+2}, nous appellerons de même X_p, X_{p+1} et X_{p+2} les composantes de la force extérieure appliquée à cette molécule, composantes que nous appelions tout à l'heure X, Y, Z et les équations (9) deviendront :

$$(9\ bis) \qquad \frac{d\Phi}{dU_p} = X_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous décomposerons la forme Φ en carrés comme nous l'avons fait tout à l'heure et nous retrouverons les formules :

$$\begin{aligned}
\Phi &= \alpha_1 \varphi_1^2 + \alpha_2 \varphi_2^2 + \ldots + \alpha_n \varphi_n^2,\\
\varphi_p &= U_{p1} U_1 + U_{p2} U_2 + \ldots + U_{pn} U_n,\\
\Theta &= \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \ldots + \varphi_n^2,\\
\Theta &= U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2.
\end{aligned}$$

Les équations (9 *bis*) deviennent alors :

$$(9\ ter) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \varphi_k U_{kp} = X_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Multiplions la première de ces équations par U_{i1}, la seconde par U_{i2}, ..., la $n^{\text{ième}}$ par U_{in} et ajoutons. En tenant compte des équations (4) et (5) il viendra :

$$(10) \qquad \alpha_i \varphi_i = U_{i1} X_1 + U_{i2} X_2 + \ldots + U_{in} X_n, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Multiplions maintenant la première des équations (10) par $\frac{U_{1k}}{\alpha_1}$, la seconde par $\frac{U_{2k}}{\alpha_2}$, ..., la $n^{\text{ième}}$ par $\frac{U_{nk}}{\alpha_n}$; en vertu des équations d'orthogonalité (4) et (5) ou plutôt des équations

$$\begin{aligned}
U_{1p}^2 + U_{2p}^2 + \ldots + U_{np}^2 &= 1,\\
U_{1p} U_{1q} + U_{2p} U_{2q} + \ldots + U_{np} U_{nq} &= 0,
\end{aligned}$$

qui comme on le sait leur sont équivalentes; il viendra :

$$U_k = \frac{U_{1k}}{\alpha_1}\theta_1 + \frac{U_{2k}}{\alpha_2}\theta_2 + \ldots + \frac{U_{nk}}{\alpha_n}\theta_n$$

où l'on a posé pour abréger :

$$\theta_i = U_{i1} X_1 + U_{i2} X_2 + \ldots + U_{in} X_n.$$

Les équations (9) sont donc ainsi résolues.

Il est clair qu'une pareille solution ne peut être que théorique, comme l'était déjà la solution du problème de Fourier par l'intégration des équations (1). Le nombre immense des équations (1) comme celui des équations (9) s'opposerait absolument aux calculs. Mais cette solution purement théorique peut mettre sur la voie de la solution véritable.

Passons à la limite et abandonnons l'hypothèse moléculaire pour celle de la matière continue. Nos équations (1) ou (9) deviendront des équations aux dérivées partielles; nos formes quadratiques Φ et Θ deviendront des intégrales analogues à celles que nous avons appelées A et B dans le paragraphe 2.

Notre procédé pourra s'appliquer sans autre changement; au lieu de décomposer les formes Φ et Θ en carrés, nous aurons à chercher les minima successifs de leur rapport ou plutôt ceux du rapport des intégrales A et B qui les remplacent. On passera ainsi d'une analyse analogue à celle de ce paragraphe à une analyse tout à fait semblable à celle du paragraphe 2.

6. — Existence des fonctions U_n.

L'existence des fonctions U_n peut être maintenant regardée comme démontrée au moins au point de vue physique. La fonction U_1 sera une fonction qui devra prendre les valeurs

$$U_{11}, \quad U_{12}, \quad \ldots, \quad U_{1n}$$

aux différents points occupés par les molécules

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_n.$$

La fonction U_2 devra prendre en ces mêmes points les valeurs

$$U_{21}, \quad U_{22}, \quad \ldots, \quad U_{2n}$$

et ainsi de suite.

Nous savons de plus que les valeurs de la fonction U_1 par exemple devront satisfaire aux équations (2 *bis*) du paragraphe précédent que j'écrirai

$$\frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dU_i} = \alpha_1 U_i. \tag{1}$$

La fonction U_1 n'est définie ainsi, il est vrai que pour n points de l'espace, à savoir les n points occupés par nos n molécules; mais comme ces molécules sont très nombreuses et très rapprochées les unes des autres, on pourra calculer par interpolation la fonction U_1 pour tous les autres points intérieurs au corps.

On pourra à la vérité trouver ainsi deux valeurs différentes pour la fonction U_1 si l'on adopte deux règles d'interpolation différentes; mais les différences seront du même ordre de grandeur que la distance qui sépare deux molécules et, par conséquent, négligeables au point de vue physique.

La fonction U_1 ainsi définie satisfera approximativement aux équations de Fourier :

$$(2) \qquad \Delta U_1 + k_1 U_1 = 0, \qquad \frac{dU_1}{dn} + h U_1 = 0$$

que l'on obtient en partant des équations (2 *bis*) et en passant à la limite. L'erreur commise en remplaçant les équations (1) par les équations (2) sera du même ordre de grandeur que la distance qui sépare deux molécules.

Il y a à cela toutefois une condition, c'est que les dérivées de la fonction U_1 soient finies; on n'aurait plus le droit de passer des équations (1) aux équations (2) si ces dérivées étaient du même ordre de grandeur que l'inverse de la distance qui sépare deux molécules.

Il nous resterait donc à établir que ces dérivées sont bien finies; c'est-à-dire :

1° Que la différence $U_{1i} - U_{1k}$ est du même ordre de grandeur que la distance des molécules M_i et M_k;

2° Plus généralement, soit M_α une molécule quelconque de coordonnées x, y, z, soient $M_\beta, M_\gamma, \ldots, M_\lambda$ un certain nombre de molécules très voisines de M_α et dont les coordonnées soient respectivement,

$$x + \xi_\beta, \quad y + \eta_\beta, \quad z + \zeta_\beta; \qquad x + \xi_\gamma, \quad y + \eta_\gamma, \quad z + \zeta_\gamma; \qquad \ldots;$$
$$x + \xi_\lambda, \quad y + \eta_\lambda, \quad z + \zeta_\lambda.$$

Soit $P(\xi, \eta, \zeta)$ un polynome quelconque de degré inférieur à m en ξ, η, ζ. Soient enfin $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ un certain nombre de coefficients relatifs aux diverses molécules $M_\alpha, M_\beta, \ldots, M_\lambda$; et supposons que ces coefficients satisfassent à la condition suivante :

$$\alpha P(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha) + \beta P(\xi_\beta, \eta_\beta, \zeta_\beta) + \gamma P(\xi_\gamma, \eta_\gamma, \zeta_\gamma) + \ldots + \lambda P(\xi_\lambda, \eta_\lambda, \zeta_\lambda) = 0$$

et cela quel que soit le polynome P pourvu que son degré soit inférieur à m [j'écris par symétrie $P(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha)$ au lieu de $P(0, 0, 0)$].

Si ces conditions sont remplies, nous aurions à établir que :

$$\alpha U_{1\alpha} + \beta U_{1\beta} + \ldots + \lambda U_{1\lambda}$$

est du même ordre de grandeur que les puissances $m^{\text{ièmes}}$ des quantités ξ, η, ζ.

Cela ne serait sans doute pas impossible; je n'aurais en effet pour établir ces divers points qu'à traduire dans le langage de l'hypothèse moléculaire l'analyse du paragraphe 4.

C'est ce que je me réserve de faire dans un Mémoire ultérieur qui pourra être regardé comme la suite de celui-ci.

Je pourrai dire alors que les conclusions des paragraphes 2, 3 et 4 sont démontrées d'une façon rigoureuse au point de vue physique. Peut-être même est-il permis d'espérer que, par une sorte de passage à la limite, on pourra fonder sur ces principes une démonstration rigoureuse même au point de vue analytique.

Paris, le 19 mars 1889.

SUR

CERTAINS DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES

QUE L'ON RENCONTRE

DANS LA

THÉORIE DE LA PROPAGATION DE LA CHALEUR

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 118, p. 383-387 (19 février 1894).

On sait que le problème du refroidissement d'un corps solide de forme quelconque peut être considéré comme résolu quand on sait :

1° Former les fonctions fondamentales U_n qui satisfont aux conditions suivantes :

$$\Delta U_n + k_n U_n = 0 \quad \text{à l'intérieur du corps.}$$

$$\frac{dU_n}{dn} + h U_n = 0 \quad \text{à la surface.}$$

Les lettres k_n et h désignent des constantes; la seconde constante h est la même pour toutes les fonctions fondamentales et dépend du pouvoir émissif du corps. Enfin, dn représente une longueur infiniment petite comptée sur la normale à la surface du corps.

2° Démontrer qu'une fonction arbitraire V peut être développée en série procédant suivant les fonctions fondamentales, sous la forme

$$V = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_n U_n + \ldots,$$

les coefficients A_i étant des constantes.

J'ai eu moi-même l'occasion d'insister sur ces points dans diverses Communications que j'ai eu l'honneur de faire à l'Académie, et dans un Mémoire inséré au tome XII de l'*American Journal of Mathematics* [1].

Dans le cas du cylindre de révolution, Fourier a montré que les fonctions fondamentales se ramènent aux fonctions de Bessel et il en est encore de même dans le cas de la sphère, à la condition d'introduire les fonctions de Bessel d'indice fractionnaire.

Considérons donc la fonction φ définie de la manière suivante :

$$\varphi(x) = \sum \frac{(-1)^\beta \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta+n+1)}.$$

Cette fonction n'est autre chose que la fonction de Bessel $J_n(x)$ multipliée par $\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}$. Elle satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2n+1}{x}\frac{d\varphi}{dx} + \varphi = 0. \tag{1}$$

Considérons d'abord le cas d'un cylindre de révolution, limité par la surface cylindrique

$$x^2 + y^2 = 1,$$

et par les deux plans

$$z = +a, \qquad z = -a.$$

Posons

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega.$$

On verrait que chaque fonction fondamentale est le produit de trois facteurs :

1° Le premier facteur est $r^n \cos n\omega$, ou $r^n \sin n\omega$, n étant un entier, le même qui figure dans l'équation (1).

2° Le second facteur est égal à

$$\sin\lambda z \quad \text{ou} \quad \cos\lambda' z,$$

λ et λ' étant définis par les équations transcendantes

$$h\,\mathrm{tg}\,\lambda a + \lambda = 0, \qquad h\,\mathrm{cotg}\,\lambda' a = \lambda'.$$

3° Le troisième facteur est la fonction $\varphi(\mu r)$, μ étant une des racines de l'équation transcendante

$$\mu\varphi'(\mu) + H\varphi(\mu) = 0, \tag{2}$$

où

$$H = n + h.$$

---

[1] Ce tome, p. 28.

Considérons maintenant le cas d'une sphère limitée par la surface

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

et posons

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Ici le nombre n qui figure dans l'équation (1) ne sera plus un entier, *mais* $2n$ *sera un entier impair;* je rappelle que dans ce cas l'équation (1) s'intègre aisément en termes finis.

Une fonction fondamentale quelconque sera alors le produit de $r^{n-\frac{1}{2}}$, d'une fonction sphérique d'ordre $n - \frac{1}{2}$ et de la fonction $\varphi(\mu r)$.

Le coefficient μ sera une des racines de l'équation transcendante (2) mais en prenant

$$\text{H} = n - \frac{1}{2} + h.$$

Les fonctions fondamentales sont donc faciles à former dans le cas de la sphère et du cylindre. Comme, d'autre part, Cauchy a démontré qu'une fonction arbitraire de z peut être développée en série procédant suivant les $\sin\lambda z$ et les $\cos\lambda z$, le problème du refroidissement de la sphère ou du cylindre pourra être regardé comme résolu si l'on parvient à développer une fonction arbitraire V de r pour

$$0 < r < 1,$$

en série procédant suivant les fonctions $\varphi(\mu r)$.

C'est là l'objet de la présente Note.

Je chercherai pour cela à généraliser la méthode de Cauchy.

Les fonctions $\varphi(\mu r)$ sont définies par les équations

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2n+1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \mu^2\varphi = 0 \qquad (\text{pour } r < 1),$$

$$\frac{d\varphi}{dr} + \text{H}\varphi = 0 \qquad (\text{pour } r = 1).$$

Je chercherai à former une fonction S restant finie pour $r = 0$, et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\frac{d^2 \text{S}}{dr^2} + \frac{2n+1}{r}\frac{d\text{S}}{dr} + \xi^2 \text{S} = \text{V} \qquad (\text{pour } r < 1).$$

$$\frac{d\text{S}}{dr} + \text{HS} = 0 \qquad (\text{pour } r = 1).$$

La lettre ξ représente une constante *réelle* ou *imaginaire*.

La fonction S est facile à former ; l'équation (1) étant du deuxième ordre admet une seconde intégrale ψ que je supposerai choisie de telle sorte que

$$\varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x) = \frac{1}{x^{2n+1}}. \tag{3}$$

Posons alors

$$\theta = \xi\varphi'(\xi) + \mathrm{H}\varphi(\xi),$$
$$\theta_1 = \xi\psi'(\xi) + \mathrm{H}\psi(\xi),$$
$$d\mathrm{B} = \mathrm{V}\varphi(r\xi)\zeta^{2n}r^{2n+1}\,dr,$$
$$d\mathrm{C} = \mathrm{V}\psi(r\xi)\xi^{2n}r^{2n+1}\,dr.$$

Il viendra

$$\mathrm{S} = \varphi(r\xi)\int_r^1 d\mathrm{C} + \psi(r\xi)\int_0^r d\mathrm{B} - \varphi(r\xi)\frac{\theta_1}{\theta}\int_0^1 d\mathrm{B}.$$

L'équation (3) ne suffit pas pour déterminer l'intégrale ψ, et elle ne cesse pas d'être satisfaite quand on change ψ en $\psi + k\varphi$. Mais alors, la fonction S ne change pas ; cette fonction S reste donc la même quelle que soit l'intégrale ψ que l'on choisisse parmi toutes celles qui remplissent la condition (3).

On voit aisément que S est une fonction méromorphe de ξ dans toute l'étendue du plan.

Il faut ensuite déterminer la valeur asymptotique de S pour ξ très grand ; je dis que quand le module de ξ est très grand, cette valeur asymptotique est égale à $\frac{\mathrm{V}}{\xi^2}$, quel que soit l'argument de ξ, pourvu que ξ ne soit pas réel. Je veux dire par là que le rapport de S à $\frac{\mathrm{V}}{\xi^2}$ tend vers l'unité, quand le module de ξ croît indéfiniment avec un argument constant, les arguments 0 et π étant seuls exceptés.

Pour le démontrer, on s'appuiera sur les valeurs asymptotiques bien connues des fonctions de Bessel ; en choisissant l'intégrale ψ de telle façon que la valeur asymptotique du produit $\varphi(r\xi)\psi(r\xi)$ soit égal à

$$\frac{\pi i}{2(r\xi)^{2n+1}},$$

ce choix est toujours possible, mais il y a lieu d'observer qu'on ne devra pas faire le même choix si la partie imaginaire de ξ est positive, ou si elle est négative.

L'équation (2) a toutes ses racines réelles et deux à deux, égales et de signe contraire. Soient μ_1, μ_2, ..., les racines positives rangées par ordre de gran-

deur. Soient $C_1, C_2, \ldots$ des cercles ayant pour centre l'origine et pour rayons

$$\frac{\mu_1+\mu_2}{2}, \quad \frac{\mu_2+\mu_3}{2}, \quad \ldots$$

On peut demontrer que, sur ces cercles, le rapport de S à $\frac{V}{\xi^2}$ reste limité. La demonstration exige des calculs longs mais sans difficulté.

Il en resulte que, si je désigne par J_p l'intégrale

$$\int S\xi\, d\xi,$$

prise le long du cercle C_p, on aura

$$\lim J_p = 2i\pi V \qquad (\text{pour } p = \infty).$$

Cela montre que V est égal à la somme des résidus de la fonction $S\xi$.

Or, les pôles de la fonction S sont les racines de l'équation $\theta = 0$, c'est-à-dire que, pour un pôle, $\xi = \mu$, μ étant défini par l'équation (2).

Le résidu correspondant de $S\xi$ est égal à

$$-\varphi(r\mu)\frac{\mu\theta_1(\mu)}{\theta'(\mu)}\int_0^1 dB.$$

Dans B bien entendu, ξ est remplacé par μ. Ce résidu est donc égal à $\varphi(\mu r)$ multiplié par une constante indépendante de r.

La fonction V se trouve ainsi développée sous la forme voulue.

Une dernière remarque. Le raisonnement précédent pourrait se trouver en défaut si V devenait infini pour $r = 0$. Or voyons comment nous formons la fonction V dans le cas du refroidissement de la sphère par exemple. Soit W la température initiale, qui sera une fonction arbitraire de x, y et z, ou, ce qui revient au même, de r, θ et ω en posant

$$x = r\sin\theta\cos\omega, \qquad y = r\sin\theta\sin\omega, \qquad z = r\cos\theta,$$

W pourra se développer par la formule de Laplace en une série de la forme

$$W = \Sigma V r^{n-\frac{1}{2}} X,$$

X étant une fonction sphérique d'ordre $n - \frac{1}{2}$. On pourrait craindre que V ne devienne infini pour $r = 0$, mais cela ne se présentera pas si je suppose que W est holomorphe en x, y, z dans le voisinage immédiat du centre de la sphère, cette fonction demeurant d'ailleurs arbitraire dans le reste de la sphère.

La même observation s'applique au cas du cylindre.

SUR L'ÉQUATION

DES

VIBRATIONS D'UNE MEMBRANE

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 118, p. 447-451 (26 février 1894).

On sait quelle est l'importance de l'équation

$$\Delta u + ku = 0$$

(où k est une constante) dans un grand nombre de questions de Physique mathématique. Le pas le plus important qui ait été fait dans l'étude de cette équation est dû à M. Schwarz (*Festschrift zum Jubelgeburtstage des Herrn Weierstrass*). Ses résultats ont été complétés par notre Confrère, M. Picard, dans une Note insérée aux *Comptes rendus* du 16 octobre 1893. J'ai eu moi-même l'occasion de m'en occuper dans un Mémoire publié dans le tome XII de l'*American Journal of Mathematics* (¹). Il me semble qu'une lumière nouvelle peut sortir du rapprochement des résultats obtenus ainsi dans des voies différentes : c'est ce que je vais chercher à expliquer brièvement.

Soit, dans l'espace, un domaine quelconque D dont la frontière sera constituée par une certaine surface Σ. Soit $d\tau$ un élément de volume de ce domaine. Soient f une fonction quelconque définie à l'intérieur de ce domaine et ξ une constante arbitraire. Cherchons à former une fonction v satisfaisant à l'équation

$$(1) \qquad \Delta v + \xi v + f = 0$$

à l'intérieur de S et s'annulant à la frontière.

Cherchons, à l'exemple de M. Schwarz, à développer v suivant les puissances de ξ et posons

$$(2) \qquad v = v_0 + v_1\xi + v_2\xi^2 + \ldots.$$

(¹) Ce tome, p. 28.

Nous aurons, pour déterminer les v_i (qui doivent s'annuler à la frontière), la suite d'équations

$$\Delta v_0 + f = 0, \qquad \Delta v_{i+1} + v_i = 0. \tag{3}$$

Formons les intégrales de M. Schwarz,

$$W_{m,n} = \int v_m v_n \, d\tau, \qquad V_{m,n} = \int \left(\frac{dv_m}{dx}\frac{dv_n}{dx} + \frac{dv_m}{dy}\frac{dv_n}{dy} + \frac{dv_m}{dz}\frac{dv_n}{dz} \right) d\tau,$$

étendues à tous les éléments $d\tau$ du domaine D.

Bien que les fonctions v_n ne soient pas toujours positives, les propriétés de ces intégrales subsistent, et l'on a

$$W_{m,n} = V_{m+1,n} = W_{0,m+n} = W_{m+n},$$

en écrivant, pour abréger, W_{m+n} au lieu de $W_{0,m+n}$.

De plus, ces intégrales sont toutes positives, et l'on a

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \ldots. \tag{4}$$

Enfin, on peut trouver un nombre Q ne dépendant que du domaine D et tel que l'on ait

$$|v_n| < Q\sqrt{W_{2n-2}}.$$

Il résulte de là que, si

$$\lim \frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{1}{g},$$

la série (2) convergera *uniformément* pour

$$|\xi| < g$$

et satisfera à la question.

Pour aller plus loin, j'invoquerai un théorème que j'ai démontré dans l'*American Journal of Mathematics* (t. XII, p. 253-259) ([1]).

Soit

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_p\varphi_p,$$

$$A = \int \varphi^2 \, d\tau, \qquad B = \int \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 \right] d\tau.$$

On peut toujours (quelles que soient les fonctions φ_i) choisir les coefficients α de telle façon que le rapport $\frac{B}{A}$ soit plus grand qu'un nombre positif l_p qui ne dépend que du domaine D et du nombre entier p et qui croît définitivement avec p.

([1]) Ce tome, p. 71-77.

Faisons alors

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p;$$

d'où

$$v_n = \alpha_1 v_{n,1} + \alpha_2 v_{n,2} + \ldots + \alpha_p v_{n,p}.$$

Nous pourrons alors choisir les α de telle façon que

$$\frac{V_{n,n}}{W_{n,n}} = \frac{W_{2n-1}}{W_{2n}} > l_p.$$

Considérons les coefficients α comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à $p-1$ dimensions; nous pouvons choisir ce point de telle sorte que

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \ldots < \frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} < \frac{1}{l_p}.$$

Si ce point satisfait à cette condition, il appartiendra à un certain domaine S_n; le domaine S_{n+1} sera intérieur à S_n; donc *tous les domaines* S_n *auront au moins un point commun;* on pourra donc choisir les α de telle façon que

$$\lim \frac{W_{n-1}}{W_n} < \frac{1}{l_p},$$

et, par conséquent, pour que la série (2) converge uniformément pour

$$|\xi| < l_p.$$

Nous allons supposer maintenant que

$$f_2 = \Delta f_1, \qquad f_3 = \Delta f_2, \qquad \ldots, \qquad f_p = \Delta f_{p-1},$$

et que f_1 *ait été choisi de telle sorte que* $f_1, f_2, \ldots, f_{p-1}$ *s'annulent à la frontière.*

Soit ensuite u_i une fonction s'annulant à la frontière et telle que

$$\Delta u_i + \xi u_i + f_i = 0.$$

On aura alors

$$u_i = \Delta u_{i-1},$$

ce qui donne, pour déterminer les u_i, les équations linéaires

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p &= v, \\ u_2 + \xi u_1 &= -f_1, \\ u_3 + \xi u_2 &= -f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_p + \xi u_{p-1} &= -f_{p-1}. \end{aligned} \right.$$

On en tire

$$(6) \qquad u_i = \frac{P_i}{\Pi},$$

P_i étant une fonction de ξ qui est holomorphe comme v pour $|\xi| < l_p$ et Π un polynome en ξ à coefficients constants. La fonction u_i est donc méromorphe pour $|\xi| < l_p$.

La fonction f_1 est soumise à une condition restrictive écrite plus haut en *italiques*; mais la fonction f_p est quelconque.

Il en résulte que la fonction u_p sera encore méromorphe pour $|\xi| < l_p$, quoique f_p soit choisi arbitrairement; et comme le nombre l_p croît indéfiniment avec p, elle sera méromorphe dans toute l'étendue du plan.

Nous voyons d'abord que (pour $|\xi| < l_p$) P_i et ΔP_i sont développables suivant les puissances de ξ en séries uniformément convergentes et que l'on a

$$\Delta P_i + \xi P_i + \Pi f_i = 0.$$

D'ailleurs P_i s'annule à la frontière. Soit k un pôle de u_i, c'est-à-dire un zéro du polynome Π. Si nous faisons $\xi = k$, il restera

$$\Delta P_i + k P_i = 0.$$

L'existence de fonctions satisfaisant à l'équation

$$\Delta u + k u = 0$$

se trouve donc démontrée.

Ces résultats s'appliquent évidemment au cas d'un domaine à deux dimensions, c'est-à-dire au problème des vibrations d'une membrane. On peut, en ce qui concerne ce problème, les énoncer ainsi; M. Schwarz a démontré l'existence du son fondamental d'une membrane; M. Picard celle de la première harmonique; je démontre celle des harmoniques supérieures.

Ces résultats s'étendraient encore au cas où la condition à la limite n'est pas la même et où, au lieu de s'écrire

$$u = 0,$$

elle s'écrirait

$$\frac{du}{dn} + hu = 0,$$

c'est-à-dire au problème du refroidissement d'un corps solide.

SUR LES ÉQUATIONS

DE LA

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 8, p. 57-155 (1894).

TABLE DES MATIÈRES.

Première Partie.

Deuxième Partie.

Troisième Partie.

Introduction.

On connaît l'équation des vibrations transversales d'une membrane tendue. Si $d\omega$ désigne un élément de surface de la membrane, p sa tension, ρ sa densité superficielle, w la quantité dont le point x, y s'écarte de sa position d'équilibre (dans le sens transversal, c'est-à-dire perpendiculairement à la membrane ou parallèlement à l'axe des z), si T représente l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle, on aura :

$$T = \frac{\rho}{2}\int\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 d\omega, \qquad V = \frac{p}{2}\int\left[\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dy}\right)^2\right] d\omega;$$

d'où l'on tire l'équation :

$$\frac{\rho}{p}\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} = \Delta w.$$

Si le mouvement est périodique, on aura :

$$w = u \sin\frac{t - t_0}{\tau},$$

t_0 et τ étant des constantes et u une fonction de x et de y seulement ; et il viendra :

$$(1) \qquad \Delta u + \frac{\rho}{p\tau^2} u = 0.$$

D'autre part, sur le contour de la membrane on devra avoir $u = 0$.

La même équation se rencontre dans l'étude des petites vibrations d'une masse gazeuse enfermée dans un vase solide. Si Φ est le potentiel des vitesses, on devra avoir :

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = a^2\,\Delta\Phi = a^2\left[\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2}\right].$$

La condition à la limite n'est pas alors $\Phi = 0$, mais

$$\frac{d\Phi}{dn} = 0.$$

On rencontre encore la même équation avec d'autres conditions aux limites dans les problèmes relatifs à l'élasticité des corps solides et dans beaucoup d'autres problèmes de Physique mathématique.

J'insisterai seulement ici sur les problèmes relatifs à la théorie de la chaleur. Si V désigne la température, on aura :

(2) $$\frac{dV}{dt} = K\,\Delta V,$$

K étant le coefficient de conductibilité ; et à la surface du corps :

$$\frac{dV}{dn} + hV = 0,$$

h étant une constante positive proportionnelle au pouvoir émissif. Si on veut que l'on ait :

$$V = ue^{-\alpha t},$$

u ne dépendant que de x et de y, il viendra :

(3) $$\Delta u + \frac{\alpha}{K} u = 0.$$

Cela supposé qu'il n'y ait à l'intérieur du corps aucune source de chaleur. Supposons que dans l'élément de volume $d\tau$ du corps il y ait une source de chaleur qui produise, dans le temps dt, une quantité de chaleur $q\,dt\,d\tau$.

Soit ρ la densité du corps, μ sa chaleur spécifique ; l'équation (2) deviendra :

$$\frac{dV}{dt} = K\,\Delta V + \frac{q}{\rho\mu}$$

et l'équation (3) :

$$\Delta u + \frac{\alpha}{K} u + \frac{qe^{\alpha t}}{\rho\mu K} = 0.$$

En posant enfin :

$$\frac{\alpha}{K} = \xi, \qquad \frac{qe^{\alpha t}}{\rho\mu K} = f,$$

on trouvera :

(4) $$\Delta u + \xi u + f = 0.$$

Pour que u soit indépendant de t, il faut supposer qu'il en est de même de f et, par conséquent, que q varie proportionnellement à l'exponentielle $e^{-\alpha t}$. Je regarderai f comme donnée.

Le cas le plus intéressant est celui où α et ξ sont nuls et où V et q sont indépendants du temps. L'équation (4) devient alors :

$$\Delta u + f = 0,$$

avec la condition aux limites :

$$\frac{du}{dn} + hu = 0.$$

C'est le problème des *températures stationnaires*.

Si le pouvoir émissif devient nul, la condition se réduit à

$$\frac{du}{dn} = 0,$$

Si h est infini, elle se réduit à

$$u = 0.$$

Nous nous poserons donc le problème suivant :

Soit D un domaine situé dans le plan ou dans l'espace à trois dimensions; soit F sa frontière qui sera une ligne dans le premier cas ou une surface dans le second. Je supposerai que F se compose d'un nombre fini de portions de surfaces ou d'arcs de courbes analytiques.

Je désignerai par $d\tau$ un élément de D et par $d\omega$ un élément de F; si D a trois dimensions, $d\tau$ sera un volume et $d\omega$ une surface; si D n'a que deux dimensions, $d\tau$ sera une surface et $d\omega$ une longueur. Je désignerai par $\frac{du}{dn}$ le rapport à dn de l'accroissement du que subit la fonction u quand on parcourt une longueur infiniment petite dn sur la normale à F en allant vers l'extérieur de D.

J'aurai trois coordonnées x, y, z ou deux seulement x, y selon le nombre des dimensions de D.

Je me propose de déterminer une fonction v satisfaisant, à l'intérieur de D, à la condition :

$$\Delta v + \xi v + f = 0,$$

et sur la frontière F à la condition :

$$\frac{dv}{dn} + hv = 0,$$

et qui de plus à l'intérieur de D est continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres.

Les constantes ξ et h sont données ainsi que la fonction f.

Dans certains cas je supposerai $f = 0$, $u \neq 0$, et je ne supposerai plus que ξ soit donné.

Les cas de $\xi = 0$, $f = 0$, $h = 0$, $h = \infty$ méritent d'attirer particulièrement l'attention.

Pour des raisons qu'on comprendra plus tard, je me réserve de donner à ξ des valeurs positives, négatives, ou même imaginaires.

Le problème ainsi posé a déjà fait l'objet de travaux nombreux.

Le plus important est celui de M. Schwarz (*Festschrift zum Jubelgeburtstage des Herrn Weierstrass*), dont les résultats ont été complétés par une Note de M. Picard insérée aux *Comptes rendus* du 16 octobre 1893.

D'autre part, M. Picard a traité, dans un Mémoire inséré au tome VI, 4e série, du *Journal de Liouville*, des questions qui se rapportent à des équations aux dérivées partielles, dans lesquelles celle qui nous occupe rentre comme cas particulier.

On pourra consulter avec fruit de nombreuses Notes du même auteur dans divers volumes des *Comptes rendus* depuis 1889.

J'ai eu moi-même l'occasion de m'occuper de ces équations dans un Mémoire que j'ai publié dans le tome XII de l'*American Journal of Mathematics* (1).

Je ferai à tous ces ouvrages de nombreux emprunts, ainsi que je l'expliquerai dans la suite.

I. — Fonctions de Green.

L'étude de l'équation qui nous occupe se rattache directement à celle de l'équation de Laplace :

$$\Delta u = 0,$$

qui est, comme on sait, beaucoup plus avancée.

Le problème dit de Dirichlet consiste à trouver une fonction u qui, à l'intérieur du domaine D satisfasse à l'équation de Laplace et qui prennent des valeurs données sur la frontière de ce domaine. Grâce aux travaux de Schwarz et de Neumann, on sait résoudre ce problème dans un très grand nombre de cas.

On pourra aussi trouver une fonction u qui satisfera aux conditions suivantes. A l'intérieur de D on aura :

$$\Delta u = f$$

et sur la frontière

$$u = \varphi,$$

f et φ étant deux fonctions données.

Une fonction, connue sous le nom de Green, joue dans la solution de ces

(1) Ce tome, p. 78.

divers problèmes un rôle très important. Je vais rappeler sa définition et celles de ses propriétés qui me seront utiles dans la suite.

Soit m un point mobile dont les coordonnées seront les coordonnées courantes x, y, z; μ un point fixe dont les coordonnées seront ξ, η, ζ; r la distance $m\mu$; ces deux points sont supposés intérieurs à D.

La fonction de Green G satisfera aux conditions suivantes :

1° A l'intérieur de D, on aura :

$$\Delta G = 0.$$

2° A la frontière, on aura :

$$G = 0.$$

3° A l'intérieur de D, G sera finie et continue ainsi que ses dérivées, sauf pour $r = 0$, c'est-à-dire quand le point m viendra en μ.

4° Si D a trois dimensions, la différence

$$G - \frac{1}{4\pi r}$$

restera finie et continue pour $r = 0$. Si D a deux dimensions, la différence

$$G + \frac{1}{2\pi}\log r$$

restera finie et continue pour $r = 0$.

Ces conditions suffisent pour déterminer la fonction G; il n'y a qu'une fonction de Green qui corresponde à un domaine D donné et à un point μ donné. De plus, il y en a toujours une et on sait la former quand le domaine D est limité, comme nous le supposons, par un nombre fini de lignes ou de surfaces analytiques.

Si une fonction u satisfait à l'intérieur de D à l'équation

$$\Delta u = f$$

et s'annule à la frontière, on aura

$$(1) \qquad u(x, y, z) = \int G f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta;$$

G dépend, en effet, à la fois de x, y, z et de ξ, η, ζ. Il va sans dire que si le domaine D n'avait que deux dimensions, u dépendrait seulement de x et y, f de ξ et η, G de x, y, ξ et η; et l'intégrale triple portant sur les différentielles

$d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ devrait être remplacée par une intégrale double portant sur les différentielles $d\xi$, $d\eta$.

Il est aisé de trouver des inégalités auxquelles doit satisfaire la fonction de Green. Si le domaine D a trois dimensions, on aura :

$$0 < G < \frac{1}{4\pi r}.$$

D'autre part, si r_0 et r_1 sont la plus petite et la plus grande distance du point μ à la frontière de D, on aura :

$$\frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi r_0} < G < \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi r_1}.$$

Cela tient à ce que la fonction G ne peut avoir de minimum à l'intérieur de D et qu'elle s'annule à la frontière. D'autre part, la différence $G - \frac{1}{4\pi r}$ ne peut avoir à l'intérieur de D ni maximum, ni minimum, et sur la frontière de D elle varie entre les limites

$$-\frac{1}{4\pi r_0} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{4\pi r_1}.$$

Si le domaine D n'a que deux dimensions, ces inégalités doivent être remplacées par les suivantes :

$$G > 0, \qquad \log\frac{r_0}{r} < 2\pi G < \log\frac{r_1}{r}.$$

De tout cela on déduit immédiatement, si D a trois dimensions :

$$\int G\,d\tau = \int |G|\,d\tau < \frac{r_1^2}{2} < \frac{l^2}{2}; \qquad \int G^2\,d\tau < \frac{r_1}{4\pi} < \frac{l}{4\pi},$$

l étant la plus grande dimension de D, c'est-à-dire la plus grande distance de deux points de la frontière de D.

Si D n'a que deux dimensions, ces inégalités doivent être remplacées par les suivantes :

$$\int |G|\,d\tau < \frac{r_1^2}{4} < \frac{l^2}{4}; \qquad \int G^2\,d\tau < \frac{r_1^2}{4\pi} < \frac{l^2}{4\pi}.$$

On peut également assigner une limite supérieure N à

$$\int \left|\frac{dG}{dx}\right| d\tau, \quad \int \left|\frac{dG}{dy}\right| d\tau.$$

On peut déduire de là des conséquences importantes comme l'a montré M. Picard dans son Mémoire cité plus haut du *Journal de Liouville*.

Revenons à la relation (1). Soit F le maximum de $|f|$, $M = \frac{l^2}{2}$ ou $\frac{l^2}{4}$, une limite supérieure de $\int G\, d\tau$. On aura :

$$|u| < MF, \qquad \left|\frac{du}{dx}\right| < NF, \qquad \left|\frac{du}{dy}\right| < NF.$$

Si maintenant la fonction f a ses dérivées du premier ordre finies, et que F_1 soit une limite supérieure du module de ces dérivées, les dérivées secondes de u seront plus petites en valeur absolue que

$$PF + P_1 F_1,$$

P et P_1 étant deux constantes positives ne dépendant comme M et N que du domaine D.

II. — **Intégrales de Schwarz.**

Soit f une fonction donnée et ξ une constante donnée et proposons-nous de trouver une fonction v qui à l'intérieur de D satisfasse à l'équation :

$$\Delta v + \xi v + f = 0 \tag{1}$$

et qui s'annule sur la frontière. Je désignerai cette fonction, si elle existe, par la notation :

$$v = [f, \xi].$$

A l'exemple de M. Schwarz, je me propose de développer v suivant les puissances croissantes de ξ en écrivant :

$$v = v_0 + v_1 \xi + v_2 \xi^2 + \ldots. \tag{2}$$

Je suis ainsi conduit à la suite d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta v_0 + f \quad = 0, \\ \Delta v_1 + v_0 \quad = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta v_n + v_{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{3}$$

qui déterminent complètement les fonctions v_n si l'on adjoint la condition, à laquelle ces fonctions sont astreintes, de s'annuler sur la frontière de D. Si nous désignons par $d\tau'$ le produit des trois différentielles $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, par f' et v'_n ce que deviennent f et v_n quand on y remplace x, y, z par ξ, η, ζ,

nous trouverons :

$$v_0 = \int G f' \, d\tau', \qquad v_1 = \int G v'_0 \, d\tau', \qquad \dots \qquad v_n = \int G v'_{n-1} \, d\tau', \qquad \dots$$

Si f est toujours positif, il en est de même de toutes les fonctions v_n. C'est ce qui arrive dans l'hypothèse de $f = 1$ envisagée particulièrement par M. Schwarz. Mais, si comme je le suppose, f peut avoir un signe quelconque, il en est de même de v_n, mais cela ne changera rien aux résultats essentiels.

Formons maintenant les intégrales considérées par M. Schwarz dans son Mémoire cité :

$$W_{m.n} = \int v_m v_n \, d\tau, \qquad V_{m.n} = \int \left(\frac{dv_m}{dx} \frac{dv_n}{dx} + \frac{dv_m}{dy} \frac{dv_n}{dy} + \frac{dv_m}{dz} \frac{dv_n}{dz} \right) d\tau.$$

M. Schwarz a démontré les théorèmes suivants :

1° *On a*

$$W_{m.n} = W_{m-1.n} = W_{m+1.n-1} = W_{0.m+n}$$

de sorte que nous pouvons simplifier la notation et écrire W_{m+n} *au lieu de* $W_{m.n}$.

2° *Les intégrales* $W_{m.n}$ *et* $V_{m.n}$ *sont toujours positives.*

3° *Enfin on a :*

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \dots$$

Ces résultats subsistent quelle que soit la fonction f et je n'ai rien à changer à la démonstration de M. Schwarz; le seul point, en effet, où le fait que v_n est positif semble jouer un rôle est le suivant :

« Weil dass Doppelintegral $W_{0.n-1}$, dit M. Schwarz, nur positive Elemente enthält so hat jedes Doppelintegral $\int v_0 v_{n-1} \, d\tau$ bei welchem die Integration über ein Theil des Gebietes D erstreckt wird einen endlichen Werth, welcher kleiner als $W_{0.n-1}$ ist. »

Il est clair que si v_{n-1} n'est pas toujours positif, on pourra encore assigner à cette intégrale double une limite supérieure qui ne sera plus $W_{0.n-1}$, mais :

$$\int | v_0 v_{n-1} | \, d\tau.$$

Le reste de la démonstration n'en serait pas changé.

En tenant compte de la relation

$$v_n = \int G v'_{n-1}\, d\tau',$$

on trouve ensuite, comme dans le Mémoire de M. Schwarz :

$$v_n^2 < \int (v'_{n-1})^2\, d\tau' \int G^2\, d\tau'$$

ou

$$v_n^2 < Q^2 W_{2n-2}, \qquad |v_n| < Q\sqrt{W_{2n-2}},$$

Q^2 étant égal à $\frac{l}{4\pi}$ ou à $\frac{l^2}{4\pi}$ suivant que D a trois ou deux dimensions.

Il en résulte que, si T désigne le volume ou la surface de D, il vient :

$$W_{2n} < Q^2 T W_{2n-2}.$$

Cette formule est toujours homogène; $Q^2 T$ est en effet toujours la quatrième puissance d'une longueur, que D ait trois ou deux dimensions.

Il en résulte encore que :

$$\frac{W_{2n-1}}{W_{2n-2}} < Q\sqrt{T};$$

ou bien que :

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \ldots < Q\sqrt{T}.$$

Donc le rapport $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ tend vers une limite finie et déterminée, positive et plus petite que $Q\sqrt{T}$. Il en est de même du rapport $\sqrt{\frac{W_{2n+2}}{W_{2n}}}$.

Donc la série :

(4) $$Q\sqrt{W_0} + \xi Q\sqrt{W_2} + \xi^2 Q\sqrt{W_4} + \ldots + \xi^n Q\sqrt{W_{2n}} + \ldots$$

converge absolument, pourvu que

$$|\xi| < \frac{1}{Q\sqrt{T}}.$$

Or les termes de la série (4) sont indépendants de x, y, z et plus grands en valeur absolue que ceux de la série :

(5) $$v_1 + \xi v_2 + \xi^2 v_3 + \ldots.$$

Donc la série (5) converge absolument et uniformément (par rapport à x, y et z), pourvu que

$$|\xi| < \frac{1}{Q\sqrt{T}};$$

il en est donc de même de la série (2).

Je dis maintenant que la série (2) satisfait à l'équation (1).

En effet, la série

$$(6)\qquad \varphi = f + \xi v_0 + \xi^2 v_1 + \xi^3 v_2 + \ldots$$

converge aussi absolument et uniformément, et on aura :

$$\varphi = f + \xi v.$$

D'autre part, chacun des termes de la série uniformément convergente (2) s'annulant à la frontière, il en est de même de v. Je dis maintenant que

$$\varphi = -\Delta v.$$

Il est évident d'abord que la série :

$$\frac{dv_0}{dx} + \xi \frac{dv_1}{dx} + \xi^2 \frac{dv_2}{dx} + \ldots$$

converge aussi absolument et uniformément. On a, en effet,

$$\left|\frac{dv_n}{dx}\right| < N v_{n-1}^0 < QN \sqrt{W_{2n-1}},$$

N étant la quantité positive définie au paragraphe précédent et v_{n-1}^0 la plus grande valeur de $|v_{n-1}|$.

On a donc

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{\xi dv_0}{dx} + \xi^2 \frac{dv_1}{dx} + \xi^3 \frac{dv_2}{dx} + \ldots,$$

de sorte que, si l'on peut assigner une limite supérieure à $\frac{df}{dx}$, ce que je suppose, on pourra en assigner une à $\frac{d\varphi}{dx}$. Il en est de même en ce qui concerne $\frac{d\varphi}{dy}$ et $\frac{d\varphi}{dz}$.

La série (6) étant uniformément convergente, je puis écrire :

$$\int G\varphi' \, d\tau' = \int Gf' \, d\tau' + \xi \int G v'_0 \, d\tau' + \xi^2 \int G v'_1 \, d\tau' + \ldots$$

ou bien :

$$(7)\qquad \int G\varphi' \, d\tau' = v_0 + \xi v_1 + \xi^2 v_2 + \ldots = v.$$

Comme on peut assigner à φ et à ses dérivées une limite supérieure, la relation (7) prouve, d'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent, que v a des dérivées secondes et que

$$\Delta v = -\varphi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le problème est donc résolu quelle que soit la fonction f, pourvu que

$$|\xi| < \frac{1}{Q\sqrt{T}}.$$

Pour aller plus loin, il faut que j'aie recours à un théorème que j'ai démontré dans le tome XII de l' « American Journal » et dont je vais reproduire ici la démonstration afin d'y introduire certaines simplifications.

III. — **Lemme préliminaire.**

Soit V une fonction quelconque de x, y, z; posons :

$$A = \int V^2 \, d\tau, \qquad B = \int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right] d\tau.$$

J'écrirai, pour abréger

$$B = \int \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau.$$

Je suppose d'abord que V satisfasse à la condition :

$$\int V \, d\tau = 0$$

et je me propose d'évaluer une limite inférieure du rapport $\frac{B}{A}$.

Soient $d\tau$ et $d\tau'$ deux éléments de volume du corps, ayant respectivement pour coordonnées x, y, z et x', y', z'; et soient V et V′ les valeurs de la fonction V au centre de ces deux éléments. On aura :

$$T = \int d\tau = \int d\tau'$$

et

$$BT = \int \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau \, d\tau',$$

$$AT = \int V^2 \, d\tau d\tau' = \int V'^2 \, d\tau \, d\tau',$$

$$0 = \int V \, d\tau \int V' \, d\tau' = \int VV' \, d\tau \, d\tau';$$

d'où enfin :

$$2\,AT = \int (V - V')^2 \, d\tau \, d\tau'.$$

Les intégrations doivent être étendues à tous les couples $d\tau$, $d\tau'$ d'éléments

de volume du corps. Un couple formé de deux éléments de volume ε et ε_1 figurera deux fois; la première fois de telle façon que ε joue le rôle de $d\tau$ et ε_1 celui de $d\tau'$; la seconde fois de telle façon que ε_1 joue le rôle de $d\tau$ et ε celui de $d\tau'$.

Changeons maintenant de coordonnées en posant :

$$\begin{aligned} x &= \xi + \rho \sin\theta \cos\varphi, & x' &= \xi + \rho' \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= \eta + \rho \sin\theta \sin\varphi, & y' &= \eta + \rho' \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= \rho \cos\theta, & z' &= \rho' \cos\theta. \end{aligned}$$

Pour transformer une intégrale sextuple $\int F\, d\tau\, d\tau'$, il faut appliquer la règle de transformation des intégrales multiples. On trouve ainsi :

$$\int F\, d\tau\, d\tau' = \int F(\rho - \rho')^2 \sin\theta \cos\theta\, d\rho\, d\rho'\, d\xi\, d\eta\, d\theta\, d\varphi.$$

J'écrirai pour abréger :

$$\int F\, d\tau\, d\tau' = \int F(\rho - \rho')^2\, d\rho\, d\rho'\, d\Omega,$$

en posant :

$$d\Omega = \sin\theta \cos\theta\, d\xi\, d\eta\, d\theta\, d\varphi.$$

Nous trouvons donc :

$$BT = \int \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 (\rho - \rho')^2\, d\rho\, d\rho'\, d\Omega$$

et

$$2\,AT = \int (V - V')^2 (\rho - \rho')^2\, d\rho\, d\rho'\, d\Omega.$$

Voici quelles doivent être les limites d'intégration. Soit M le point x, y, z; M' le point x', y', z'; la droite MM' est définie par les quatre variables ξ, η, θ, et φ; les deux autres variables ρ et ρ' définissent la position des points M et M' sur cette droite.

Supposons que le domaine D soit convexe ; la droite MM' rencontrera la frontière en deux points que j'appellerai M_0 et M_1 et qui correspondront aux valeurs ρ_0 et ρ_1 de la variable ρ; les points M et M' étant situés alors entre les points M_0 et M_1, on aura :

$$\rho_0 < \rho < \rho_1; \qquad \rho_0 < \rho' < \rho_1.$$

Par conséquent, regardant d'abord ξ, η, θ, φ comme des constantes, nous intégrerons par rapport à ρ et par rapport à ρ' entre les limites ρ_0 et ρ_1.

Regardant ensuite θ et φ comme des constantes, nous intégrerons par rapport à ξ et η en donnant à ces variables toutes les valeurs telles que la droite MM' rencontre D.

Nous intégrerons enfin par rapport à θ depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$ et par rapport à φ depuis zéro jusqu'à 2π.

Si donc nous posons :

$$b = \int \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 (\rho - \rho')^2 \, d\rho \, d\rho',$$

$$2a = \int (V - V')^2 (\rho - \rho')^2 \, d\rho \, d\rho',$$

il viendra :

$$BT = \int b \, d\Omega, \qquad AT = \int a \, d\Omega.$$

Il importe de remarquer que tous les éléments de toutes ces intégrales sont positifs.

Nous avons maintenant :

$$\left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 = \left(\frac{dV}{dx} \sin\theta \cos\varphi + \frac{dV}{dy} \sin\theta \sin\varphi + \frac{dV}{dz} \cos\theta\right)^2 < \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2,$$

d'où

$$(1) \qquad b > \int \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 (\rho - \rho')^2 \, d\rho \, d\rho'.$$

Pour aller plus loin je vais employer une inégalité dont M. Schwarz a fait aussi un fréquent usage; on a, quelles que soient les fonctions φ et ψ,

$$\left[\int \varphi\psi \, dx\right]^2 < \int \varphi^2 \, dx \int \psi^2 \, dx.$$

Si donc $\rho' > \rho$, on aura :

$$(2) \qquad (V' - V)^2 = \left[\int_\rho^{\rho'} \frac{dV}{d\sigma} d\sigma\right]^2 < (\rho' - \rho) \int_\rho^{\rho'} \left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Les éléments de l'intégrale $2a$ peuvent se répartir en deux groupes, ceux pour lesquels $\rho' > \rho$ et ceux pour lesquels $\rho > \rho'$; comme la quantité sous le signe $\int$ ne change pas quand on permute ρ et ρ', l'intégrale étendue aux éléments du premier groupe est égale à l'intégrale étendue aux éléments du second groupe, de sorte qu'on aura :

$$a = \int (V - V')^2 (\rho - \rho')^2 \, d\rho \, d\rho'$$

en bornant l'intégration aux éléments du premier groupe, c'est-à-dire que les inégalités qui définissent les limites d'intégration s'écriront :

$$\rho_0 < \rho < \rho' < \rho_1.$$

Il vient alors, en vertu de l'inégalité (2) :

$$a < \int \left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 (\rho' - \rho)^3\, d\rho\, d\rho'\, d\sigma, \tag{3}$$

les limites de l'intégration étant définies par les inégalités :

$$\rho_0 < \rho < \sigma < \rho' < \rho_1. \tag{4}$$

Nous allons maintenant transformer l'intégrale du second membre de (1). Considérons d'abord l'intégrale étendue à tous les éléments du premier groupe ; j'aurai alors :

$$\rho_0 < \rho < \rho' < \rho_1$$

et si je change ρ en σ, l'intégrale s'écrira :

$$\int \left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 (\rho' - \sigma)^2\, d\rho'\, d\sigma \qquad (\rho_0 < \sigma < \rho' < \rho_1).$$

Envisageons maintenant l'intégrale étendue à tous les éléments du second groupe ; on a

$$\rho_0 < \rho' < \rho < \rho_1.$$

Si on change ρ' en ρ, et ρ en σ, l'intégrale devient :

$$\int \left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 (\sigma - \rho)^2\, d\rho\, d\sigma \qquad (\rho_0 < \rho < \sigma < \rho_1).$$

Ainsi l'inégalité (1) devient :

$$b > \int \left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 (\rho' - \sigma)^2\, d\rho'\, d\sigma + \int \left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 (\sigma - \rho)^2\, d\rho\, d\sigma \qquad (\rho_0 < \rho < \sigma < \rho' < \rho_1).$$

Si alors nous posons :

$$\alpha = \int (\rho' - \rho)^3\, d\rho\, d\rho',$$

$$\beta = \int (\rho' - \sigma)^2\, d\rho' + \int (\sigma - \rho)^2\, d\rho,$$

il viendra :

$$a < \int \alpha \left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 d\sigma, \qquad b > \int \beta \left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Les limites de l'intégration sont définies par les inégalités (4).

On trouve aisément :

$$\alpha = \frac{(\rho_1 - \rho_0)^5 - (\rho_1 - \sigma)^5 - (\sigma - \rho_0)^5}{20},$$

$$\beta = \frac{(\rho_1 - \sigma)^3 + (\sigma - \rho_0)^3}{3}.$$

Quand σ varie de ρ_0 à ρ_1, on voit aisément que α atteint son maximum et β son minimum pour

$$\sigma = \frac{\rho_1 + \rho_0}{2}.$$

On a donc :

$$\alpha < (\rho_1 - \rho_0)^5 \frac{3}{64},$$

$$\beta > \frac{(\rho_1 - \rho_0)^3}{12},$$

d'où

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{16}{9} \frac{1}{(\rho_1 - \rho_0)^2} > \frac{16}{9 l^2},$$

l désignant comme plus haut la plus grande dimension du domaine D.

Il en résulte :

$$\frac{b}{a} > \frac{\int \beta \left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 d\sigma}{\int \alpha \left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 d\sigma} > \frac{16}{9 l^2}$$

et

$$\frac{B}{A} > \frac{\int b \, d\Omega}{\int a \, d\Omega} > \frac{16}{9 l^2}.$$

C'est la limite cherchée.

Dans le mémoire de l'*American Journal*, j'avais trouvé une limite différente :

$$\frac{B}{A} > \frac{3T}{2 l^5}.$$

Celle que j'adopte ici est plus maniable.

Si D n'a que deux dimensions, le même calcul donnerait :

$$\frac{B}{A} > \frac{24}{7 l^2}.$$

Je suppose maintenant que l'on ait :

$$V = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_p \varphi_p,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ étant p fonctions données de x, y, z, et les α étant p coefficients arbitraires, et je me propose de chercher si l'on peut choisir les α de façon que le rapport B : A soit plus grand qu'un nombre donné convenablement choisi.

Je dis d'abord que si l'on peut décomposer le domaine D en $p - 1$ solides partiels convexes de telle façon que la plus grande dimension de chacun de ces solides soit plus petite que l, on pourra choisir les α de telle façon que le rapport B : A soit plus grand que $\frac{16}{9l^2}$.

Soient, en effet, $R_1, R_2, \ldots, R_{p-1}$ ces $p - 1$ solides partiels dont l'ensemble forme le domaine D.

Soit B_i l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau$$

étendue au solide R_i; soit A_i l'intégrale

$$\int V^2 \, d\tau$$

étendue au solide R_i; soit enfin C_i l'intégrale

$$\int V \, d\tau$$

étendue au solide R_i. On aura :

$$B = B_1 + B_2 + \ldots + B_{p-1},$$
$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_{p-1}.$$

B_i, A_i et C_i dépendront des coefficients α; B_i et A_i seront des polynomes homogènes du second degré par rapport à ces coefficients, pendant que les C_i seront des polynomes homogènes du premier degré. Je pourrai donc choisir les p coefficients α de façon à satisfaire aux $p - 1$ relations linéaires :

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_{p-1} = 0.$$

On aura alors, puisque C_i est nul et que la plus grande dimension de R_i est plus petite que l :

$$\frac{B_i}{A_i} > \frac{16}{9l^2};$$

et, par conséquent,

$$\frac{B}{A} > \frac{16}{9l^2}.$$

C. Q. F. D.

Si le domaine D est convexe et contenu tout entier dans un cube dont le côté soit égal à Λ, nous pourrons partager ce cube en q^3 cubes égaux dont le côté sera égal à $\frac{\Lambda}{q}$. Le solide commun à l'un de ces petits cubes et à D sera convexe et sa plus grande dimension sera plus petite que $\frac{\Lambda\sqrt{3}}{q}$.

Si p est égal au nombre de ces solides plus un, on pourra choisir les α de façon que

$$\frac{B}{A} > \frac{16q^2}{27\Lambda^2}.$$

On le pourra encore *a fortiori* si p est plus grand que ce nombre.

Or le nombre de ces solides est au plus égal à q^3; il suffit donc que

$$p \geqq q^3 + 1.$$

Nous pourrons donc choisir les α de telle façon que

$$\frac{B}{A} > L_p$$

si nous posons :

$$L_p = \frac{16q^2}{27\Lambda^2},$$

q^3 étant le plus grand cube parfait contenu dans $p - 1$.

Si le domaine D n'est pas convexe, on pourra toujours le décomposer en m solides convexes; si chacun de ces solides convexes est contenu à l'intérieur d'un cube de côté égal à Λ, nous pourrons décomposer chacun de ces cubes en q^3 cubes de côté égal à $\frac{\Lambda}{q}$; les plans des faces de ces petits cubes partageront chacun de nos m solides convexes en solides partiels dont le nombre sera au plus égal à q^3; nous devrons donc choisir q de telle façon que

$$p \geqq mq^3 + 1;$$

et nous aurons encore :

$$\frac{B}{A} > L_p, \qquad L_p = \frac{16q^2}{27\Lambda^2},$$

q^3 étant le plus grand cube parfait contenu dans $\frac{p-1}{m}$.

Si D n'avait que deux dimensions et se décomposait en m domaines convexes, contenus chacun dans un carré de côté A, on trouverait :

$$\frac{B}{A} > L_p, \qquad L_p = \frac{7A^2}{12q^2},$$

q^2 étant le plus grand carré parfait contenu dans $\frac{p-1}{m}\cdot$

Dans tous les cas on peut choisir les α de telle façon que

$$\frac{B}{A} > L_p,$$

L_p étant un nombre qui ne dépend que du domaine D *et du nombre p et qui croît indéfiniment avec p.*

Le nombre L_p est du même ordre de grandeur que $p^{\frac{2}{3}}$, si D a trois dimensions; et du même ordre de grandeur que p, si D n'a que deux dimensions.

IV. — Théorème fondamental.

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_p$, p fonctions quelconques de x, y et z; soient, en reprenant les notations du paragraphe II :

$$w_1 = [f_1, \xi],$$
$$w_2 = [f_2, \xi],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$w_p = [f_p, \xi].$$

Soient maintenant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, p coefficients arbitraires; posons :

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p$$

et

$$v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_p w_p;$$

d'où :

$$(1) \qquad v = [f, \xi] = v_0 + v_1\xi + v_2\xi^2 + \ldots + v_n\xi^n + \ldots.$$

Nous pourrons, à l'aide des fonctions v_i, construire les intégrales de Schwarz W_n. D'après ce que nous avons vu, le rapport $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ sera constamment croissant; mais comme il ne pourra pas croître au delà de toute limite, il tendra vers une certaine limite λ quand n croîtra indéfiniment.

Je dis qu'on peut toujours, quelles que soient les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_p$,

choisir les coefficients arbitraires α de telle façon que :

$$\lambda < \frac{1}{L_p}.$$

En effet, d'après le lemme qui précède, on pourra toujours choisir les α de telle façon que :

$$\frac{V_{n,n}}{W_{n,n}} < L_p$$

ou

$$\frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} < \frac{1}{L_p}$$

ou, enfin,

$$(2) \qquad \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_1} < \ldots < \frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} < \frac{1}{L_p}.$$

Je considère un instant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ comme les coordonnées homogènes d'un point M dans l'espace à $p-1$ dimensions; on peut choisir ce point M de façon à satisfaire aux inégalités (2). Il y aura donc dans l'espace à p dimensions un domaine δ_n tel que, quand le point M est dans ce domaine, les inégalités (2) soient satisfaites.

En changeant n en $n+1$, je vois qu'il existe un domaine δ_{n+1} tel que, quand M est dans ce domaine, les inégalités

$$(2\ bis) \qquad \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \ldots < \frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} < \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} < \frac{W_{2n+2}}{W_{2n+1}} < \frac{1}{L_p}$$

soient satisfaites.

Mais les inégalités (2 *bis*) entraînent les inégalités (2). *Donc le domaine* δ_{n+1} *est tout entier contenu dans le domaine* δ_n.

J'aurai donc une série de domaines

$$\delta_1, \quad \delta_2, \quad \ldots, \quad \delta_n, \quad \delta_{n+1}, \quad \ldots$$

tels que chacun d'eux soit tout entier contenu dans le précédent. *Tous ces domaines auront donc une partie commune* δ qui pourra se réduire à un point.

Si alors les coefficients α sont choisis de telle sorte que le point M appartienne à δ, on aura, quelque grand que soit n :

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} < \frac{1}{L_p}$$

et, par conséquent,

$$\lambda \leqq \frac{1}{L_p}.$$

Il en résulte, en raisonnant comme au paragraphe II, que la série

$$\sqrt{W_0} + \xi \sqrt{W_2} + \xi^2 \sqrt{W_4} + \ldots$$

converge, pourvu que

$$|\xi| < L_p$$

et, par conséquent, que la série (1) converge absolument et uniformément toutes les fois que

$$|\xi| < L_p.$$

Le rayon de convergence de la série (1) n'est donc plus égal à $\frac{1}{\rho\sqrt{T}}$ comme dans le paragraphe II, mais à L_p.

Soit maintenant f, une fonction quelconque et

$$v = [f, \xi] = v_0 + \xi v_1 + \xi^2 v_2 + \ldots.$$

Soit

$$u_2 = [v_0, \xi] = v_1 + \xi v_2 + \xi^2 v_3 + \ldots.$$

$$u_3 = [v_1, \xi] = v_2 + \xi v_3 + \xi^2 v_4 + \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_p = [v_{p-2}, \xi] = v_{p-1} + \xi v_p + \xi^2 v_{p+1} + \ldots.$$

Soient

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_p$$

p coefficients arbitraires, et

$$w = \alpha_1 v + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_p u_p;$$

je puis écrire aussi :

$$w = [\alpha_1 f + \alpha_2 v_0 + \alpha_3 v_1 + \ldots + \alpha_p v_{p-2}, \xi];$$

ou bien, en développant w suivant les puissances de ξ :

(3) $$w = w_0 + w_1 \xi + w_2 \xi^2 + \ldots,$$

avec

$$w_n = \alpha_1 v_n + \alpha_2 v_{n+1} + \alpha_3 v_{n+2} + \ldots + \alpha_p v_{n+p-1}.$$

On aura donc les p équations linéaires :

(4) $$\begin{cases} \alpha_1 v + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_p u_p = w, \\ v - u_2 \xi = v_0, \\ u_2 - u_3 \xi = v_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{p-1} - u_p \xi = v_{p-2}. \end{cases}$$

D'après ce que nous venons de voir, nous pourrons choisir les α de telle façon que le rayon de convergence de la série (3) soit plus grand que L_p.

Des équations linéaires (4) nous pourrons tirer v et nous trouverons :

$$v = \frac{P}{D},$$

où :

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & -\xi & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\xi & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\xi \end{vmatrix} = \alpha_p - \xi\alpha_{p-1} + \xi^2\alpha_{p-2} - \dots + (-\xi)^{p-1}\alpha_1.$$

Ainsi D est un polynome entier en ξ à coefficients constants. D'autre part :

$$P = \begin{vmatrix} w & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ v_0 & -\xi & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & -\xi & \dots & 0 & 0 \\ .. & . & \dots & \dots & . & . \\ v_{p-2} & 0 & 0 & \dots & 1 & -\xi \end{vmatrix}.$$

Pour rendre cela plus clair, j'écris l'expression complète des déterminants D et P en supposant $p = 4$:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 1 & -\xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\xi \end{vmatrix}, \qquad P = \begin{vmatrix} w & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ v_0 & -\xi & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & -\xi & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -\xi \end{vmatrix}.$$

Comme $v_0, v_1, \dots, v_{p-2}$ ne dépendent pas de ξ; et que w est holomorphe en ξ pour

$$|\xi| < L_p,$$

il en sera de même de P.

Donc la fonction

$$v = \frac{P}{D}$$

sera méromorphe en ξ pour

$$|\xi| < L_p,$$

et comme je puis prendre p aussi grand que je veux, *la fonction v sera méromorphe dans tout le plan.*

Étudions les propriétés de la fonction P; je vois d'abord, en développant w

par la formule (3), que P peut se développer en série procédant suivant les puissances croissantes de ξ

$$P = P_0 + P_1 \xi + P_2 \xi^2 + \ldots \tag{5}$$

et que cette série converge absolument et uniformément, pourvu que

$$\xi \quad L_p.$$

A la frontière w, v_0, v_1, ..., v_{p-2} s'annulent, il en est donc de même du déterminant P.

On a d'ailleurs, en supposant encore $p = 4$:

$$\frac{dP}{dx} = \begin{vmatrix} \frac{dw}{dx} & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \frac{dv_0}{dx} & -\xi & 0 & 0 \\ \frac{dv_1}{dx} & 1 & -\xi & 0 \\ \frac{dv_2}{dx} & 0 & 1 & -\xi \end{vmatrix}$$

et comme les dérivées des deux premiers ordres de w, v_0, v_1, ..., v_{p-2} sont finies, on en conclut qu'il en est de même de celles de P.

Enfin on a

$$\Delta w + \xi w + \alpha_1 f + \alpha_2 v_0 + \alpha_3 v_1 + \ldots + \alpha_p v_{p-2} = 0,$$
$$\Delta v_0 + f = \Delta v_1 + v_0 = \ldots = \Delta v_{p-2} + v_{p-1} = 0,$$

d'où, en supposant toujours $p = 4$:

$$\Delta P + \xi P = \begin{vmatrix} -\alpha_1 f \quad \alpha_2 v_0 - \alpha_3 v_1 \quad \alpha_4 v_2 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \xi v_0 - f & -\xi & 0 & 0 \\ \xi v_1 - v_0 & 1 & -\xi & 0 \\ \xi v_2 - v_1 & 0 & 1 & -\xi \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta P + \xi P = \begin{vmatrix} -\alpha_1 f & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ -f & -\xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\xi \end{vmatrix},$$

ce qui donne enfin l'équation :

$$\Delta P + \xi P + f D = 0. \tag{6}$$

La série (5) est uniformément convergente pour

$$|\xi| < L_p$$

et il est aisé de vérifier qu'il en est de même de la série :

$$\Delta P = \Delta P_0 + \xi \Delta P_1 + \xi^2 \Delta P_2 + \ldots.$$

Si je désigne par P', P'', ...; D', D'', ... les dérivées successives de P et de D par rapport à ξ, il est aisé de vérifier que :

$$P', \quad \Delta P', \quad \frac{d\Delta P}{d\xi}$$

sont développables en séries uniformément convergentes :

$$P' = P_1 + 2\xi P_2 + 3\xi^2 P_3 + \ldots.$$
$$\Delta P' = \Delta P_1 + 2\xi \Delta P_2 + 3\xi^2 \Delta P_3 + \ldots,$$
$$\frac{d\Delta P}{d\xi} = \Delta P_1 + 2\xi \Delta P_2 + \ldots$$

et, par conséquent, que

$$\Delta P' = \frac{d\Delta P}{d\xi}.$$

On peut alors par différentiation tirer de l'équation (6) les suivantes :

(6 *bis*)
$$\left\{\begin{array}{l} \Delta P' + \xi P'' + P + f D' = 0, \\ \Delta P'' + \xi P'' + 2P' + f D'' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

V. — Existence des harmoniques.

Les pôles de la fonction méromorphe v dont le module sera plus petit que L_p seront les racines de l'équation

$$D = 0.$$

Soit k une racine de cette équation ; et soient P_k, P'_k, P''_k ce que deviennent P, P', P'' quand on y fait $\xi = k$.

Supposons d'abord que k soit une racine simple.

Si alors dans l'équation (6) je fais $\xi = k$, D s'annule et on voit que P_k satisfait à l'équation :

(1) $$\Delta P_k + k P_k = 0.$$

De plus P_k s'annule à la frontière. J'appellerai *fonction harmonique* toute fonction qui satisfera à ces deux conditions. Le nombre k sera le *nombre caractéristique* de cette fonction.

Il pourrait se faire, il est vrai, que P_k soit identiquement nulle; mais dans ce cas la valeur $\xi = k$ serait un zéro pour P et pour D, et un zéro simple pour D; ce ne serait donc pas un pôle pour v.

Supposons maintenant que k soit une racine multiple, une racine triple par exemple. Alors D, D′ et D″ s'annulent pour $\xi = k$. Si nous faisons $\xi = k$ dans les équations (6) et (6 *bis*) elles deviendront :

$$(1\ bis)\qquad \begin{cases} \Delta P_k + k P_k = 0, \\ \Delta P'_k + k P'_k + P_k = 0, \\ \Delta P''_k + k P''_k + 2 P'_k = 0. \end{cases}$$

De plus P_k, P'_k et P''_k s'annulent à la frontière, de sorte que le théorème de Green nous donne :

$$\int (P'_k \Delta P_k - P_k \Delta P'_k)\, d\tau = \int (P''_k \Delta P'_k - P'_k \Delta P''_k)\, d\tau = 0,$$

ou, en tenant compte des équations (1 *bis*) :

$$\int P_k^2\, d\tau = 2 \int P'^2_k\, d\tau = 0,$$

ce qui montre que P_k et P'_k sont identiquement nulles.

Si P''_k n'est pas identiquement nulle, c'est une fonction harmonique et $\xi = k$ est un pôle simple pour v.

Si P''_k est identiquement nulle, $\xi = k$ n'est plus un pôle pour v.

Ainsi la fonction méromorphe v n'admet que des pôles simples et les résidus sont des fonctions harmoniques.

Voici pour quelle raison j'appelle ces fonctions harmoniques.

Les divers sons simples que peut émettre une membrane sont caractérisés par des équations de la forme :

$$\Delta u + k u = 0,$$

la fonction u étant assujettie à s'annuler à la frontière. On sait que ces sons simples ont reçu le nom d'harmoniques.

A chaque pôle de v correspond une fonction harmonique. L'existence de ces fonctions sera donc établie dès qu'on pourra montrer que la fonction v ne peut être holomorphe dans tout le plan. Or cela est presque évident.

Reprenons, en effet, les inégalités

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \ldots < \frac{W_{n+1}}{W_n} < \ldots.$$

Soit λ la limite du rapport $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ pour n infini. Je dis que le rayon de convergence de la série :

$$(2) \qquad v = v_0 + v_1\xi + v_2\xi^2 + \ldots$$

est égal à $\frac{1}{\lambda}\cdot$ En effet, nous avons vu déjà qu'il est au moins égal à $\frac{1}{\lambda}\cdot$ Il me reste à montrer qu'il ne peut pas arriver que la série converge, quelles que soient les valeurs de x, y et z, pour une valeur de $|\xi|$ plus grande que $\frac{1}{\lambda}\cdot$ En effet, la série

$$\int v_0 v_0\, d\tau + \xi \int v_0 v_1\, d\tau + \xi^2 \int v_0 v_2\, d\tau + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$W_0 + \xi W_1 + \xi^2 W_2 + \ldots$$

convergerait également, ce qui n'a pas lieu.

Or,

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{W_0}{W_1}.$$

Donc le rayon de convergence de la série (2) est plus petit que $\frac{W_0}{W_1}$; donc la fonction v ne peut pas être holomorphe dans tout le plan. C. Q. F. D.

Il ne peut pas y avoir plus de $p-1$ fonctions harmoniques linéairement indépendantes dont le nombre caractéristique soit plus petit que L_p.

Supposons, en effet, qu'il y en ait p, et soient

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_p$$

ces p fonctions.

On aura :

$$\Delta U_i + k_i U_i = 0 \qquad (k_i < L_p).$$

On en déduit :

$$[U_i, \xi] = \frac{U_i}{\xi - k_i}.$$

Si les fonctions U_i étaient linéairement indépendantes, la fonction :

$$[\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_p U_p, \xi] = \sum \frac{\alpha_i U_i}{\xi - k_i}$$

admettrait au moins un pôle plus petit que L_p et cela *quels que soient les coefficients arbitraires* α, ce qui est contraire au théorème fondamental.

Il résulte de là qu'à un même nombre caractéristique ne peuvent convenir qu'un nombre fini de fonctions harmoniques linéairement indépendantes.

Observons que, d'après un théorème bien connu, le nombre caractéristique d'une fonction harmonique ne peut être que réel positif. Tous les pôles de v sont donc réels et positifs.

Je particulariserai une fonction harmonique U_i en ajoutant aux conditions qui la définissent :

$$\Delta U_i + k_i U_i = 0 \quad \text{à l'intérieur de D,}$$
$$U_i = 0 \quad \text{à la frontière,}$$

la condition suivante :

$$\int U_i^2 \, d\tau = 1,$$

ce que je puis faire sans restreindre la généralité d'une manière essentielle.

Soit alors k_i un pôle de v, et R_i le résidu correspondant. On aura alors :

$$R_i = U_i A_i,$$

A_i étant un coefficient constant. Il est aisé de vérifier que ce coefficient est égal à

$$\int f U_i \, d\tau.$$

On a alors :

$$v = \sum \frac{U_i \int f U_i \, d\tau}{\xi - k_i} + g(\xi),$$

la sommation indiquée par le signe $\sum$ s'étendant à tous les pôles k_i de v plus petits que L_p, et $g(\xi)$ étant holomorphe pour

$$|\xi| < L_p.$$

VI. — Inégalités diverses.

Une fonction u peut atteindre sa plus grande (ou sa plus petite) valeur soit à l'intérieur de D, soit sur la frontière de ce domaine.

Si le maximum est atteint à l'intérieur de D, Δu devra être négatif au point

où il est atteint; si le maximum est atteint sur la frontière de D, $\frac{du}{dn}$ devra être positif au point où il est atteint.

S'il s'agit d'un minimum, c'est le contraire; Δu devra être positif et $\frac{du}{dn}$ négatif.

Si l'on a :

$$\frac{du}{dn} + hu = 0 \quad \text{sur la frontière de D},$$

$$\Delta u = f \quad \text{à l'interieur de D},$$

$$f > 0, \qquad h > 0,$$

la fonction u sera négative dans tout le domaine. Si, en effet, elle devenait positive, elle devrait avoir un maximum positif, ce qui ne peut avoir lieu, ni à l'intérieur de D parce que Δu est positif, ni sur la frontière de D parce que $\frac{du}{dn}$ est de signe contraire à u.

Si l'on a :

$$\frac{du}{dn} + hu = 0, \qquad \Delta u = \xi u \qquad (h > 0,\ \xi > 0),$$

on voit qu'à l'intérieur de D, Δu et u sont toujours de même signe, et qu'à la frontière $\frac{du}{dn}$ et u sont toujours de signe contraire. La fonction u ne peut donc avoir ni maximum positif, ni minimum négatif. Elle ne peut donc devenir ni positive, ni négative; elle est donc identiquement nulle.

C'est ce qu'on savait déjà d'autre part.

Soit maintenant :

$$\frac{du}{dn} + hu = \varphi, \qquad \Delta u + f = 0 \qquad (h > 0,\ \varphi > 0,\ f > 0).$$

Je dis que la fonction u est toujours positive.

Je dis en effet qu'elle ne peut avoir de minimum négatif. Elle ne peut en avoir à l'intérieur de D parce que Δu est négatif et elle n'en peut avoir non plus à la frontière parce qu'on aurait :

$$u < 0, \qquad \frac{du}{dn} = \varphi - hu > 0.$$

Donc on a, dans tout le domaine :

$$u > 0.$$

C. Q. F. D.

Supposons maintenant que le domaine D soit contenu tout entier dans une sphère S de centre O et de rayon ρ.

Soient h_1 et h_2 deux nombres positifs tels que

$$h_1 > h_2 > 0.$$

Soient u_1 et u_2 deux fonctions définies de la manière suivante; on devra avoir :

A l'intérieur de D

$$\Delta u_1 + 1 = 0;$$

A la frontière de D

$$\frac{du_1}{dn} + h_1 u_1 = 0;$$

A l'intérieur de S

$$\Delta u_2 + 1 = 0;$$

A la frontière de S

$$\frac{du_2}{dn} + h_2 u_2 = 0.$$

Je dis que :

$$u_2 - u_1 > 0.$$

Déterminons d'abord la fonction u_2.

Si je désigne par r la distance du point x, y, z au point O, u_2 ne dépendra que de r et il viendra :

$$\frac{d^2 u_2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du_2}{dr} + 1 = 0,$$

d'où :

$$u_2 = -\frac{r^2}{6} + \frac{A}{r} + B;$$

A et B étant deux constantes d'intégration; A doit être nulle pour que u_2 reste finie au point O. La condition à la frontière de S déterminera B.

On trouve :

$$B = \frac{\rho^2}{6} + \frac{\rho}{3h_2}.$$

D'où :

$$u_2 = \frac{\rho^2 - r^2}{6} + \frac{\rho}{3h_2}.$$

Comme r est plus petit que ρ, on voit que u_2 est positif, ce que le théorème que nous venons de démontrer permettait de prévoir. Le même théorème montre que u_1 est positif.

Il reste à montrer que

$$u_2 > u_1.$$

En effet, on a, pour $r > \rho$,

$$\frac{du_2}{dr} + h_2 u_2 = \frac{\rho - r}{3} + h_2 \frac{\rho^2 - r^2}{6} > 0.$$

D'autre part, à l'intérieur de D on a :

(1) $$\Delta(u_2 - u_1) = 0.$$

A la surface de D on a :

$$\frac{du_2}{dn} = \frac{du_2}{dr} \cos\psi,$$

ψ étant l'angle que fait la normale à cette surface avec le rayon vecteur mené au point O.

Je dis d'autre part que :

(2) $$\frac{d(u_2 - u_1)}{dn} + h_1(u_2 - u_1) > 0.$$

En effet, en tenant compte des relations :

$$\frac{du_1}{dn} + h_1 u_1 = 0, \qquad \frac{du_2}{dn} = \frac{du_2}{dr} \cos\psi,$$

cette inégalité devient :

$$\frac{du_2}{dr} \cos\psi + h_1 u_2 > 0.$$

Or, si nous posons :

$$\frac{du_2}{dr} = -\lambda u_2,$$

il vient :

$$\lambda = \frac{2 r h_2}{h_2(\rho^2 - r^2) + 2\rho} > 0.$$

Quand r croît de zéro à ρ, le numérateur croît et le dénominateur décroît; donc λ croît de zéro à h_2.

Donc :

$$0 < \lambda < h_2.$$

Or l'inégalité à démontrer devient ainsi :

$$u_2(h_1 - \lambda \cos\psi) > 0$$

ou, puisque u_2 est positif :

$$h_1 - \lambda \cos\psi > 0.$$

Or il est clair que :

$$\lambda \cos\psi < \lambda < h_2 < h_1.$$

L'inégalité (2) est donc démontrée.

Les relations (1) et (2) montrent alors que $u_2 - u_1$ doit être positif. Donc :

$$u_2 > u_1.$$

C. Q. F. D.

Or on a :

$$u_2 < \frac{l^2}{6} + \frac{l}{3h_2};$$

on aura donc *a fortiori* :

$$u_1 < \frac{l^2}{6} + \frac{l}{3h_2}$$

(l étant la plus grande dimension du domaine D), et comme h_2 peut être pris égal à h_1 :

$$u_1 < \frac{l^2}{6} + \frac{l}{3h_1}.$$

Soit maintenant une fonction u définie par les conditions :

$$\frac{du_1}{dn} + hu = 0, \qquad \Delta u + f = 0.$$

Supposons toujours h positif, et soit g le maximum de $|f|$. Introduisons une fonction auxiliaire u_1 définie par les conditions :

$$\frac{du}{dn} + hu_1 = 0, \qquad \Delta u_1 + 1 = 0.$$

D'après ce que nous venons de voir, on aura :

$$0 < u_1 < \lambda,$$

en posant :

$$\lambda = \frac{l^2}{6} + \frac{l}{3h}.$$

Il viendra alors :

$$\frac{d(gu_1 - u)}{dn} + h(gu_1 - u) = 0, \qquad \Delta(gu_1 - u) = f - g < 0;$$

$$\frac{d(gu_1 + u)}{dn} + h(gu_1 + u) = 0, \qquad \Delta(gu_1 + u) = -f - g < 0;$$

et par conséquent :

$$gu_1 - u > 0, \qquad gu_1 + u > 0;$$

ou bien encore :

$$|u| < gu_1,$$

ou enfin :

$$u < g\lambda ;$$

ce qui donne une limite supérieure du module de u.

Supposons une fonction u satisfaisant à l'équation

$$\Delta u + \xi u = 0$$

à l'intérieur de D.

Nous avons toujours jusqu'ici regardé la constante ξ comme réelle. Il y a lieu également d'examiner ce qui se passe quand cette constante est imaginaire.

Je dis que, *si la partie réelle de ξ est négative*, le module de u ne pourra pas avoir de maximum à l'intérieur de D.

Supposons en effet que ce maximum existe ; soit m ce maximum, ω la valeur correspondante de l'argument de u, de telle façon qu'au point P où ce maximum est atteint on ait :

$$u = m\, e^{i\omega}.$$

Posons :

$$v = u\, e^{-i\omega}.$$

Le module de v sera égal à celui de u, et au point P on trouvera :

$$v = m.$$

Soit

$$v = v' + iv'', \qquad \xi = \xi' + i\xi''.$$

Au point P on aura :

$$v' = m, \qquad v'' = 0.$$

Je dis que la partie réelle v' atteint son maximum au point P. En un autre point, en effet, on aura :

$$v' < |v|, \qquad v' < |u|, \qquad v' < m.$$

D'autre part, ξ' est négatif par hypothèse ; d'ailleurs v satisfait comme u à l'équation :

$$\Delta v + \xi v = 0,$$

ce qui donne, en égalant les parties réelles,

$$\Delta v' + \xi' v' - \xi'' v'' = 0.$$

On aura donc au point P :

$$\Delta v' = -\xi' v' + \xi'' v'' = -\xi' m > 0.$$

Cela est absurde, car v' ne peut atteindre son maximum au point P si $\Delta v'$ est positif.

Le module de u ne peut donc avoir de maximum. C. Q. F. D.

Soit maintenant :

$$\frac{du}{dn} + hu = \varphi, \qquad \Delta u = 0$$

et

$$|\varphi| < g,$$

g étant une constante positive.

On aura :

$$\frac{d\left(u - \frac{g}{h}\right)}{dn} + h\left(u - \frac{g}{h}\right) = \varphi - g < 0, \qquad \Delta\left(u - \frac{g}{h}\right) = 0,$$

$$\frac{d\left(u + \frac{g}{h}\right)}{dn} + h\left(u + \frac{g}{h}\right) = \varphi + g > 0, \qquad \Delta\left(u + \frac{g}{h}\right) = 0,$$

et, par conséquent,

$$u - \frac{g}{h} < 0, \qquad u + \frac{g}{h} > 0,$$

où

$$|u| < \frac{g}{h}.$$

Si l'on connaît une limite supérieure de $|\varphi|$, on aura donc aussi une limite supérieure de $|u|$ et cette limite sera d'autant plus faible que h sera plus grand.

Soit une fonction u satisfaisant aux conditions suivantes :

(3) $$\frac{du}{dn} + hu = \varphi,$$

(4) $$\Delta u + f = 0.$$

Soit maintenant une fonction v quelconque, que je suppose seulement continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre. On aura :

$$\int\left(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn}\right)d\omega = \int (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,d\tau,$$

d'où

(5) $$\int vf\,d\tau + \int u\,\Delta v\,d\tau + \int v\varphi\,d\omega = \int u\left(hv + \frac{dv}{dn}\right)d\omega.$$

La condition (5) est donc une conséquence de la condition (3).

Réciproquement, si la condition (5) est satisfaite quelle que soit la fonction v, la condition (3) devra l'être également, *pourvu que u et $\frac{du}{dn}$ soient des fonctions finies, déterminées et continues.*

Mais il pourra arriver dans certains cas que nous ne sachions pas si $\frac{du}{dn}$ est une fonction déterminée et continue; nous ne pouvons pas alors affirmer que la condition (5) entraîne la condition (3) et même il est possible que cette condition (3) n'ait aucun sens.

Supposons donc que la fonction u soit finie et continue, mais que nous ne sachions rien de $\frac{du}{dn}$. Je suppose, de plus, que la condition (5) (que j'appellerai pour abréger *condition modifiée*) soit remplie quelle que soit la fonction v.

On peut se demander si, quand la condition (3) a été ainsi remplacée par la condition modifiée, les conclusions de ce paragraphe subsistent encore.

Ces conclusions reposent, on se le rappelle, sur le lemme suivant :

Si φ est positif ainsi que f, u ne peut avoir de minimum négatif.

D'abord ce minimum ne peut avoir lieu à l'intérieur de D, puisque Δu est négatif : supposons donc que ce minimum ait lieu en un point M de la frontière.

Soit u_0 ce minimum. Soient ε, ε', ε'', ε''' quatre quantités positives très petites rangées par ordre de grandeur croissante. Les surfaces :

$$u = u_0 + \varepsilon, \qquad u = u_0 + \varepsilon', \qquad u = u_0 + \varepsilon'', \qquad u = u_0 + \varepsilon'''$$

s'enveloppent mutuellement et enveloppent le point M, dont elles sont très voisines.

Nous partagerons le domaine D en cinq régions R_i caractérisées par les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&R_1, \quad u < u_0 + \varepsilon;\\
&R_2, \quad u_0 + \varepsilon < u < u_0 + \varepsilon';\\
&R_3, \quad u_0 + \varepsilon' < u < u_0 + \varepsilon'';\\
&R_4, \quad u_0 + \varepsilon'' < u < u_0 + \varepsilon''';\\
&R_5, \quad u_0 + \varepsilon''' < u.
\end{aligned}$$

Je pourrai choisir la fonction v de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

1° A l'intérieur de D,

$$v \geqq 0;$$

2° A la frontière,

$$\frac{dv}{dn} = 0;$$

3° Dans R_1,

$$v = 1;$$

4° Dans R_2,

$$\Delta v < 0;$$

5° Dans R_3,

$$\Delta v = 0;$$

6° Dans R_4,

$$\Delta v > 0;$$

7° Dans R_5,

$$v = 0.$$

Il résulte de là que l'on doit avoir :

$$\int \Delta v \, d\tau = 0,$$

l'intégrale étant étendue au domaine D, c'est-à-dire que l'intégrale étendue à R_2 est négative et égale en valeur absolue à la même intégrale étendue à R_4 qui est positive.

Cela posé, reprenons la condition (5) et examinons les intégrales du premier membre.

La première est essentiellement positive.

La seconde a tous ses éléments nuls sauf ceux qui correspondent aux régions R_2 et R_4; car partout ailleurs Δv s'annule.

L'intégrale étendue à R_2 est positive; car u et Δv sont négatifs.

L'intégrale étendue à R_4 est négative; car u et Δv sont de signes contraires. Mais je dis que

$$\left| \int_{R_2} u \, \Delta v \, d\tau \right| > \left| \int_{R_4} u \, \Delta v \, d\tau \right|.$$

Nous avons, en effet,

$$\left| \int_{R_2} \Delta v \, d\tau \right| = \left| \int_{R_4} \Delta v \, d\tau \right|$$

et u est plus grand *en valeur absolue* dans la région R_2 que dans la région R_4.

La seconde intégrale étendue au domaine D tout entier est donc positive.

La troisième intégrale est positive, puisque v et φ sont positifs.

Passons au second membre.

Dans les régions R_1, R_2, R_3, R_4 on a :

$$u < 0, \qquad v > 0, \qquad \frac{dv}{dn} = 0,$$

et l'intégrale est négative.

Dans la région R_5, on a $v = 0$ et l'intégrale est nulle.

Le premier membre devrait donc être positif et le second membre négatif.

Il est donc absurde de supposer que la fonction u ait un minimum négatif.

Il résulte de là que toutes les conclusions du présent paragraphe subsistent encore quand on remplace la condition (3) par la condition modifiée.

VII. — Généralisation de la fonction de Green.

Soient h et ξ deux constantes.

J'appellerai *fonction de Green généralisée* une fonction G qui satisfera aux conditions suivantes :

1° Elle sera finie et continue ainsi que ses dérivées à l'intérieur du domaine D, sauf dans le voisinage d'un certain point fixe P qui aura pour coordonnées x', y' et z'.

2° Dans le voisinage du point P, la différence

$$G - \frac{1}{4\pi r}$$

sera finie et continue ainsi que ses dérivées. La quantité

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

est la distance du point x, y, z au point P ;

3° A l'intérieur de D, on aura :

$$\Delta G + \xi G = 0 ;$$

4° A la frontière de D, on aura :

$$\frac{dG}{dn} + hG = 0.$$

En général, la constante h sera supposée positive ; si l'on suppose $h = \infty$, la 4e condition se réduit à

$$G = 0.$$

Si l'on suppose de plus $\xi = 0$, on retombe sur la fonction de Green ordinaire.

Il importe de remarquer qu'on ne peut pas avoir à la fois $\xi = h = 0$; si en effet on suppose

$$\Delta G = 0,$$

et que $G - \frac{1}{4\pi r}$ soit fini, l'intégrale

$$\int \frac{dG}{dn} d\omega$$

étendue à la frontière de D devra être égale à 1, de sorte que $\frac{dG}{dn}$ ne peut pas être nulle.

Je désignerai la fonction G ainsi définie avec des constantes ξ et h quelconques sous le nom de fonction de Green *généralisée*. La fonction de Green *ordinaire* sera celle dont j'ai parlé au paragraphe I. Mais je supprimerai ces qualifications de généralisée et d'ordinaire quand je pourrai le faire sans obscurité. C'est ainsi que dans tout ce paragraphe, quand je parlerai de la fonction de Green, il faudra entendre la fonction généralisée.

La propriété fondamentale de la fonction de Green est la suivante.

Soit u une fonction continue dans tout le domaine D et satisfaisant à l'intérieur de ce domaine à la condition

$$\Delta u - \xi u = f,$$

et sur la frontière à la condition

$$\frac{du}{dn} + hu = \varphi,$$

f et φ étant des fonctions données de x, y et z.

Soit u' la valeur de u au point x', y', z'; on aura :

$$u' = \int G\varphi\, d\omega - \int G f\, d\tau;$$

G est la fonction de Green; la première intégrale est étendue à tous les éléments $d\omega$ de la frontière, et la seconde à tous les éléments de volume $d\tau$ du domaine.

Cherchons des limites entre lesquelles la fonction G doit être comprise.

Supposons d'abord que ξ soit négatif et réel, et soit

$$\xi = -\alpha^2,$$

α étant réel et positif; je supposerai h positif.

Je dis d'abord que la fonction G est essentiellement positive. En effet, elle devient positive et très grande pour $r = 0$, c'est-à-dire au point x', y', z'. Elle a donc en ce point un maximum qui est infini ; mais en dehors de ce point elle ne peut avoir ni maximum positif, ni minimum négatif, à cause de l'équation

$$\Delta G = \alpha^2 G$$

et d'un théorème démontré dans le paragraphe précédent. Elle ne peut avoir non plus sur la frontière de D ni maximum positif, ni minimum négatif, à cause de l'équation

$$\frac{dG}{dn} + hG = 0$$

(qui se réduit à $G = 0$ pour $h = \infty$). Elle ne peut donc devenir négative, sans quoi elle aurait un minimum négatif.

La fonction $\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}$ satisfait à l'intérieur de D à la même équation que G, c'est-à-dire que l'on a :

$$\Delta \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} = \alpha^2 \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}.$$

De plus, la différence

$$\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi r}$$

ne devient pas infinie pour $r = 0$.

Si donc je pose :

$$G = \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} - u,$$

la fonction u restera finie et continue pour $r = 0$ et elle satisfera à l'équation :

$$\Delta u = \alpha^2 u.$$

Il en résulte que u ne peut avoir à l'intérieur de D ni maximum positif, ni minimum négatif.

Voyons ce qui se passe à la frontière de D.

On a alors :

$$\frac{du}{dn} + hu = \frac{d}{dn}\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} + h\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}.$$

Soient hA et hB le maximum et le minimum du second membre

$$\frac{d}{dn}\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} + h\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}.$$

Ce maximum et ce minimum ne peuvent être infinis et peuvent être facilement calculés, car, quand le point x, y, z est sur la frontière de D, la distance r est comprise entre r_0 et r_1, si l'on appelle, comme au paragraphe I, r_0 et r_1, la plus petite et la plus grande distance du point x', y', z' à la surface qui limite D.

Si h est infini, on a tout simplement :

$$A = \frac{e^{-\alpha r_1}}{4\pi r_0}, \qquad B = \frac{e^{-\alpha r_1}}{4\pi r_1}.$$

A et B sont alors positifs.

De même, si le domaine D est convexe, on a :

$$\frac{d}{dn}\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} = \cos\psi \frac{d}{dr}\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} = \frac{-\cos\psi}{4\pi} e^{-\alpha r}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\alpha}{r}\right) \leqq 0.$$

Je désigne par $\cos\psi$ le cosinus de l'angle que fait la normale à la frontière de D avec le rayon vecteur; ce cosinus est positif si D est convexe.

On a donc :

$$A = \frac{e^{-\alpha r_1}}{4\pi r_0}.$$

Si u a sur la frontière un maximum positif, $\frac{du}{dn}$ sera positif, et l'on aura :

$$u < A.$$

Si u a sur la frontière un minimum négatif, $\frac{du}{dn}$ sera négatif, et l'on aura :

$$u > B.$$

On devra donc avoir à l'intérieur de D :

$$\begin{array}{lll} u < A & \text{si} & A > 0, \\ u < 0 & \text{si} & A < 0, \\ u > B & \text{si} & B < 0, \\ u > 0 & \text{si} & B > 0. \end{array}$$

Ces inégalités nous donnent une limite supérieure et une limite inférieure de G.

Ces résultats peuvent s'étendre au cas où ξ est imaginaire, pourvu que sa partie réelle soit négative.

Posons encore :

$$\xi = -\alpha^2, \qquad \alpha = \beta + i\gamma;$$

nous supposerons ξ positif. Soit encore :

$$G = \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} + u.$$

La fonction u satisfera à l'équation :

$$\Delta u + \xi u = 0.$$

Donc le module $|u|$ ne pourra, d'après le paragraphe précédent, atteindre son maximum à l'intérieur de D.

A la frontière de D on a encore :

$$\frac{du}{dn} + hu = \Phi,$$

en posant

$$\Phi = \frac{d}{dn}\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} + h\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}.$$

Supposons que $|u|$ atteigne son maximum m en un point Q de la frontière. On aura en ce point :

$$u = m\, e^{i\omega}.$$

Posons :

$$v = u\, e^{-i\omega},$$

d'où

$$|v| = |u|;$$

de sorte que l'on aura au point Q :

$$v = m.$$

Soient :

$$v = v' + iv'',$$

$$\Phi\, e^{-i\omega} = \Phi' + i\Phi'';$$

on aura :

$$\frac{dv'}{dn} + hv' = \Phi'.$$

Au point P, v' est égal à m et atteint par conséquent son maximum ; donc $\frac{dv'}{dn}$ est positif et

$$hm < \Phi'.$$

Si donc hA est le maximum du module de Φ, on aura :

$$\Phi' < hA;$$

d'où

$$|u| < m < A.$$

On aura donc encore à l'intérieur de D :

$$|u| < A;$$

d'où

$$G < \left|\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}\right| + A.$$

La valeur de A est facile à calculer; elle ne peut être infinie.

VIII. — Application de la méthode de Neumann.

La méthode de Neumann ne s'applique qu'à un domaine D *convexe*.

Rappelons succinctement en quoi elle consiste.

Soit $d\omega$ un élément de la surface frontière ayant pour coordonnées x', y', z'. Soit V une fonction de x', y', z' que j'appellerai « densité de la double couche ». Soit $d\delta$ l'angle solide sous lequel on voit l'élément $d\omega$ du point x, y, z; cet angle solide sera regardé comme positif si l'élément $d\omega$ est vu par le côté interne, et comme négatif dans le cas contraire.

L'intégrale :

$$2\pi W = \int V\, d\delta$$

s'appellera le « potentiel de la double couche ». Ce potentiel jouit de la propriété suivante : c'est une fonction continue de x, y, z à l'intérieur de D et à l'extérieur de ce domaine; mais elle présente une discontinuité sur la frontière même.

Soit M_0 un point de la frontière; M_1 et M_2 deux points infiniment voisins de M_0, mais situés, le premier à l'intérieur de D, le second à l'extérieur. Soient W_0, W_1 et W_2 les valeurs de W aux points M_0, M_1 et M_2; ces trois valeurs ne seront pas infiniment voisines l'une de l'autre, mais on aura :

$$W_1 - W_0 = W_0 - W_2 = V_0,$$

V_0 étant la valeur de V au point M_0.

Cela posé, j'adopterai les notations suivantes :

Soit V une fonction quelconque; j'écrirai

$$V', \quad V^0, \quad V^i, \quad V^e$$

pour les valeurs de cette fonction aux points (x', y', z'), M_0, M_1 et M_2.

Soit alors V_0 une fonction tout à fait quelconque. Je poserai :

$$V_1 = \int \frac{V'_0\, d\omega}{2\pi};$$

ce qui donne :

$$V_1^i - V_1^0 = V_1^0 - V_1^e = V_0^0.$$

Je poserai ensuite :

$$V_2 = \int \frac{V'_1\, d\omega}{2\pi},$$

d'où

$$V_2^i - V_2^0 = V_2^0 - V_2^e = V_1^0;$$

et ainsi de suite. J'aurai en général :

$$V_n = \int \frac{V'_{n-1}\, d\omega}{2\pi},$$

d'où

$$V_n^i - V_n^0 = V_n^0 - V_n^e = V_{n-1}^0.$$

Cela posé, j'appelle G_n et H_n la plus grande et la plus petite valeur de V_n^0. Neumann a montré, non seulement que :

$$G_{n+1} < G_n, \qquad H_{n+1} > H_n,$$

mais, de plus, que :

$$G_{n+1} - H_{n+1} < \lambda(G_n - H_n),$$

λ étant une constante inférieure à 1 qui ne dépend que du domaine D, et que j'appellerai pour abréger *constante de Neumann*.

Il résulte de là que, quand n croît indéfiniment, V_n^0 tend vers une limite constante et déterminée C. Je supposerai que la fonction V_0 ait été choisie de telle sorte que cette constante soit nulle.

La série

$$V'_0 + V'_1 + V'_2 + \dots$$

est alors uniformément convergente ; soit :

$$\Phi = \int \frac{d\omega}{2\pi}(V'_0 + V'_1 + V'_2 + \dots),$$

d'où

$$\Phi^e = V_1^e + V_2^e + V_3^e + \dots,$$

$$\Phi^e = (V_1^0 - V_0^0) + (V_2^0 - V_1^0) + \dots = -V_0^0.$$

La fonction Φ satisfait donc à l'équation $\Delta\Phi = 0$ à l'extérieur de D et elle se réduit sur la frontière de D à une fonction donnée $-V_0$.

A l'intérieur de D, la fonction Φ satisfait à la même équation; mais elle n'est pas continue sur la frontière de D; de sorte qu'on n'a pas :

$$\Phi^i = \Phi^e;$$

on a, au contraire,

$$\Phi^i = V_0'' + 2V_1'' + 2V_2'' + \ldots.$$

En revanche, et c'est là un point fort important pour l'application que j'ai en vue, on aura :

$$\frac{d\Phi^i}{dn} = \frac{d\Phi^e}{dn}.$$

Cela posé, proposons-nous de trouver une fonction W qui, à l'intérieur de D, satisfasse à l'équation $\Delta W = 0$, et telle que l'on ait à la frontière de D :

$$\frac{dW}{dn} = u,$$

u étant une fonction donnée. On sait que le problème n'est possible que si

$$\int u' \, d\omega = 0.$$

Voici comment Neumann le résout :

Formons le potentiel :

$$P = \int \frac{u' \, d\omega}{4\pi r},$$

r étant la distance des points x, y, z et x', y', z'.

On aura :

$$P^i = P^e = P^0$$

et

$$\frac{dP^i}{dn} = \frac{dP^e}{dn} + u.$$

Formons maintenant la suite des fonctions :

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_n, \quad \ldots; \quad \Phi$$

en prenant :

$$V_0'' = P_0.$$

La constante C est nulle si la condition

$$\int u' \, d\omega = 0$$

est remplie, et l'on trouve :

$$W^e = P^e + \Phi^e = P^0 - V_0^0 = 0.$$

Donc W est nul identiquement à l'extérieur de D, et l'on a :

$$\frac{dW^e}{dn} = 0.$$

Or,

$$\frac{dW^i}{dn} = \frac{dW^e}{dn} + u = u.$$

La fonction W satisfait donc bien aux conditions du problème.

La solution n'est pas unique, puisqu'on peut ajouter une constante quelconque à W, sans que cette fonction cesse de satisfaire aux conditions du problème ; mais, parmi toutes les solutions possibles, nous distinguerons, sous le nom de solution de Neumann, la fonction W que nous venons de définir.

Soit alors μ la plus grande valeur absolue que puisse atteindre u ; je me propose de déterminer la plus grande valeur absolue que puisse atteindre W.

On peut trouver d'abord une limite de la valeur absolue de P. En effet, l'intégrale $\int \frac{d\omega}{r}$ ne peut devenir infinie, quelle que soit la position du point x, y, z. Si L est sa limite supérieure, nous aurons :

$$|P| < L\mu;$$

et, par conséquent,

$$|V_0^0| < L\mu, \qquad G_0 - H_0 < 2L\mu.$$

On en déduit :

$$|V_1^0| < G_1 - H_1 < 2L\lambda\mu,$$

$$|V_n^0| < 2L\lambda^n\mu;$$

et comme λ est plus petit que un :

$$|\Phi^i| < \frac{1+\lambda}{1-\lambda} 2L\mu.$$

Φ restera donc à l'intérieur de D plus petit que cette quantité, de sorte qu'il nous reste finalement :

$$|W| < \frac{L(3+\lambda)}{1-\lambda}\mu.$$

Il existe donc une constante H telle que :

$$|W| < H\mu.$$

Cette constante H ne dépendra que du domaine D.

Si W et W_1 sont deux valeurs de la fonction W en deux points situés à l'intérieur de D, on aura :

$$|W - W_1| < 2H\mu.$$

Si donc U est une fonction satisfaisant aux conditions :

$$\Delta U = 0, \qquad \frac{dU}{dn} = u,$$

et s'annulant, soit en un point de D, soit sur sa frontière, on devra avoir :

$$U = W + K,$$

K étant une constante; cette constante devra donc être égale à $-W_1$, W_1 étant la valeur de W au point où la fonction U s'annule. On aura donc :

$$|U| = |W - W_1| < 2H\mu.$$

Si l'on a l'une des deux conditions :

$$\int U\, d\tau = 0, \qquad \int U\, d\omega = 0,$$

il faut bien que U change de signe et par conséquent qu'il s'annule, soit à l'intérieur de D, soit sur sa frontière. On aura donc :

$$|U| < 2H\mu.$$

Il peut y avoir avantage à introduire certaines fonctions analogues à celle de Green.

Soit x', y', z' un point intérieur à D; r la distance du point x, y, z au point x', y', z'.

Soit maintenant G' une fonction satisfaisant aux conditions suivantes :

1° A l'intérieur de D, $\Delta G'$ est nul;

2° A la frontière, $\frac{dG'}{dn}$ est nul;

3° La différence

$$G' - \frac{d}{dx}\frac{1}{4\pi r}$$

est finie.

Soit de même G'' une fonction telle que :

1° A l'intérieur de D, $\Delta G''$ soit nul;

2° Sur la frontière, $\frac{dG''}{dn}$ soit nul;

3° La différence

$$G'' - \frac{d^2}{dx'^2} \frac{1}{4\pi r}$$

soit finie.

L'existence de ces fonctions résulte de ce qui précède. Les fonctions G' et G'' existeront et leurs valeurs sur la frontière de D resteront limitées, pourvu que le point x', y', z' reste dans un domaine intérieur à D et ne puisse, par conséquent, se rapprocher de la frontière de D.

Si alors W est une fonction qui satisfait à l'équation :

$$\Delta W = 0,$$

et telle que $\frac{dW}{dn}$ prenne des valeurs données sur la frontière de D; si W' est la valeur de W au point x', y', z', on aura :

$$\frac{dW'}{dx'} = -\int G' \frac{dW}{dn} d\omega,$$

$$\frac{d^2 W'}{dx'^2} = \int G'' \frac{dW}{dn} d\omega.$$

Les intégrales du second membre sont étendues aux éléments $d\omega$ de la frontière de D.

IX. — Températures stationnaires.

Proposons-nous de résoudre le problème suivant :

Trouver une fonction v telle que l'on ait à l'intérieur de D :

$$\Delta v + f = 0$$

et à la frontière :

$$\frac{dv}{dn} + hv = 0.$$

La fonction f est supposée donnée, et je supposerai d'abord :

$$\int f\, d\tau = 0.$$

C'est le problème qui consiste à chercher la température finale d'un corps solide qui perd de la chaleur par rayonnement par sa surface, mais à l'intérieur duquel certaines causes constantes produisent incessamment de la chaleur.

Le pouvoir émissif est proportionnel à h, et la chaleur produite en chaque point, dans l'unité de temps, est proportionnelle à f.

Cherchons à développer v suivant les puissances croissantes de h, et soit :

$$v = v_0 + hv_1 + h^2 v_2 + \ldots.$$

On aura successivement :

A l'intérieur de D.	A la frontière.
$\Delta v_0 + f = 0$	$\dfrac{dv_0}{dn} = 0$
$\Delta v_1 = 0$	$\dfrac{dv_1}{dn} + v_0 = 0$
$\Delta v_2 = 0$	$\dfrac{dv_2}{dn} + v_1 = 0$
....	....

Nous allons voir que, *si le domaine* D *est convexe*, la méthode de Neumann permet de calculer successivement v_0, v_1, v_2, ...

En effet, nous pouvons d'abord trouver une fonction u satisfaisant à l'équation :

$$\Delta u + f = 0.$$

Il suffit, par exemple, de prendre u égal au potentiel d'une matière attirante fictive, dont la densité serait égale à $\frac{f}{4\pi}$. On a alors :

$$\int \frac{du}{dn} d\omega = 0,$$

si l'on a, comme je l'ai supposé,

$$\int f d\tau = 0.$$

Nous déterminerons ensuite la fonction $v_0 - u$ par les conditions :

$$\Delta(v_0 - u) = 0, \qquad \frac{d(v_0 - u)}{dn} = -\frac{du}{dn}.$$

La condition

$$\int \frac{du}{dn} d\omega = 0$$

étant remplie, la méthode de Neumann nous fera connaître $v_0 - u$ et par conséquent v_0.

Nous pouvons d'ailleurs ajouter à la solution de Neumann une constante

arbitraire; nous choisirons cette constante de telle façon que :

$$\int v_0 \, d\omega = 0.$$

Nous pourrons alors déterminer v_1 par la méthode de Neumann à l'aide des conditions :

$$\Delta v_1 = 0, \qquad \frac{dv_1}{dn} + v_0 = 0.$$

Nous ajouterons à la solution de Neumann une constante arbitraire, choisie de telle sorte que :

$$\int v_1 \, d\omega = 0 ;$$

et ainsi de suite.

Je dis maintenant que la série :

(1) $$v = v_0 + h v_1 + h^2 v_2 + \dots$$

est uniformément convergente si h est assez petit.

Soit en effet μ le maximum de $|v_0|$; nous aurons, d'après le théorème du paragraphe précédent :

$$|v_1| < 2H\mu, \qquad |v_2| < 4H^2\mu, \qquad \dots, \qquad |v_n| < (2H)^n\mu, \qquad \dots$$

La série converge donc uniformément, pourvu que :

$$h < \frac{1}{2H}.$$

Il résulte de là que la somme de la série, c'est-à-dire la fonction v, est continue dans tout le domaine D et sur sa frontière.

Étudions maintenant les dérivées

$$\frac{dv}{dx}, \quad \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad \dots$$

et pour cela reprenons les fonctions G', G'', introduites à la fin du paragraphe précédent. Nous trouverons, en appelant v'_i la valeur de v_0 au point x', y', z' :

$$\frac{dv'_i}{dx'} = \int G' v_{i-1} \, d\omega, \qquad \frac{d^2 v'_i}{dx'^2} = -\int G'' v_{i-1} \, d\omega.$$

Comme les fonctions G' et G'' sont limitées, on voit que les séries :

(2) $$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dv_0}{dx} + h \dfrac{dv_1}{dx} + h^2 \dfrac{dv_2}{dx} + \dots, \\[2ex] \dfrac{d^2 v_0}{dx^2} + h \dfrac{d^2 v_1}{dx^2} + h^2 \dfrac{d^2 v_2}{dx^2} + \dots \end{array} \right.$$

sont uniformément convergentes. Il en serait de même d'ailleurs des séries qui procéderaient suivant d'autres dérivées des fonctions v_i.

Il résulte de là que les deux séries (2) représentent les dérivées

$$\frac{dv}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v}{dx^2},$$

et l'on en conclut aisément l'équation :

$$\Delta v + f = 0.$$

Mais il y a entre les séries (1) et (2) une différence essentielle : la série (1) est uniformément convergente dans le domaine D; les séries (2) sont uniformément convergentes, non pas dans le domaine D, mais dans tout domaine intérieur à D (ou plutôt je n'ai pas démontré qu'elles le soient dans le domaine D).

Il résulte de là que les dérivées de v sont continues à l'intérieur de D, mais que nous ne pouvons pas affirmer qu'elles le soient encore sur la frontière.

Nous ne sommes donc pas certains que l'expression $\frac{dv}{dn}$ ait un sens et encore moins que la condition à la limite :

(3) $$\frac{dv}{dn} + hv = 0$$

soit remplie.

En revanche, nous pouvons affirmer que u étant une fonction quelconque continue ainsi que ses dérivées du premier ordre, on aura :

(4) $$\int uf\,d\tau + \int v\,\Delta u\,d\tau = \int v\left(hu + \frac{du}{dn}\right)d\omega.$$

C'est ce que j'ai appelé à la fin du paragraphe VI la *condition modifiée*. Elle est évidemment équivalente à la condition (3) au point de vue physique.

Si donc on remplace dans les données du problème la condition (3) par la condition modifiée, ce problème peut être regardé comme résolu, pourvu que

$$h < \frac{1}{2H}.$$

Supposons maintenant

$$h \quad \frac{1}{2H}.$$

Soit h_0 un nombre positif, plus petit que $\frac{1}{2H}$, et soit :

$$h = h_0 + \eta.$$

Cherchons à développer v suivant les puissances de η et soit :

$$(5) \qquad v = v_0 + \eta v_1 + \eta^2 v_2 + \dots.$$

On devra avoir :

$$(6) \qquad \Delta v_0 - f = 0, \qquad \Delta v_1 = \Delta v_2 = \dots = 0$$

et

$$(7) \qquad \frac{dv_0}{dn} + h_0 v_0 = 0, \qquad \frac{dv_1}{dn} + h_0 v_1 + v_0 = 0, \qquad \frac{dv_2}{dn} + h_0 v_2 + v_1 = 0, \qquad \dots.$$

Les conditions (7) pourront être remplacées par les conditions modifiées correspondantes.

Comme h_0 est plus petit que $\frac{1}{2H}$, les équations (6) et (7) détermineront les fonctions v_0, v_1, ...

Supposons que

$$|v_0| < g;$$

on aura, d'après un théorème démontré au paragraphe VI :

$$|v_1| < \frac{g}{h_0}, \qquad |v_2| < \frac{g}{h_0^2}, \qquad \dots, \qquad |v_n| < \frac{g}{h_0^n}, \qquad \dots.$$

Ces inégalités seront encore vraies quand on substituera aux conditions (7) les conditions modifiées correspondantes, puisque nous avons vu que cette substitution n'empêche pas les théorèmes du paragraphe VI de s'appliquer.

La série (5) converge donc uniformément, pourvu que

$$\eta < h_0.$$

On en déduirait comme plus haut que le problème peut être regardé comme résolu, pourvu que

$$\eta < h_0,$$

ou que

$$h < 2h_0$$

ou que

$$h < \frac{1}{H}.$$

Si h est plus grand que $\frac{1}{H}$, on prendra h_0 plus petit que $\frac{1}{H}$, mais aussi voisin qu'on voudra de $\frac{1}{H}$; on posera :

$$h = h_0 + \eta,$$

on développera v suivant les puissances de η et l'on déterminera les coefficients par les équations (6) et (7).

Cette détermination sera possible, puisque h_0 est plus petit que $\frac{1}{H}$ et la série convergera, pourvu que

$$\eta < h_0.$$

Le problème sera donc résolu, pourvu que

$$h < \frac{2}{H};$$

et ainsi de suite.

On voit qu'en continuant de la sorte on résoudra le problème quelle que soit la valeur positive de h.

Ce procédé n'est autre chose que celui de la continuation analytique.

Considérant v comme fonction de h, nous avons fait voir que cette fonction est holomorphe dans un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon $\frac{1}{2H}$. Prenant, sur l'axe des quantités réelles positives, un point h_0 situé à l'intérieur de ce cercle, nous avons vu que la fonction v est encore holomorphe à l'intérieur d'un cercle ayant ce point pour centre et passant par l'origine, et ainsi de suite.

Nous avons supposé au début que

$$\int f\,d\tau = 0.$$

Cette restriction n'a rien d'essentiel.

Soit en effet à trouver une fonction v satisfaisant aux conditions :

$$\frac{dv}{dn} + hv = 0, \qquad \Delta v - f = 0,$$

la fonction f étant quelconque ; soit :

$$\int f\,d\tau = A, \qquad A \neq 0.$$

Soit ensuite v' une fonction telle que

$$\frac{dv'}{dn} + hv' = 0$$

et d'ailleurs quelconque ; je suppose seulement que

$$\int \Delta v'\,d\tau = bA$$

ne soit pas nul. On aura alors :

$$\int (\Delta v' - bf)\, d\tau = 0.$$

On pourra donc trouver une fonction v'' telle que

$$\frac{dv'}{dn} + hv'' = 0, \qquad \Delta v'' + \left(f - \frac{1}{b}\Delta v'\right) = 0;$$

et alors, en posant :

$$v = v'' - \frac{v'}{b},$$

on aura :

$$\frac{dv}{dn} + hv = 0, \qquad \Delta v + f = 0,$$

et le problème sera résolu.

X. — Refroidissement des corps.

Soit maintenant à trouver une fonction v satisfaisant à la double condition :

(1) $$\Delta v + \xi v + f = 0,$$

(2) $$\frac{dv}{dn} + hv = 0.$$

Proposons-nous de développer v suivant les puissances de ξ, et soit :

(3) $$v = v_0 + v_1 \xi + v_2 \xi^2 + \dots.$$

Les fonctions v_m devront être déterminées par les conditions :

(4) $$\Delta v_0 + f = 0, \qquad \Delta v_1 + v_0 = 0, \qquad \Delta v_2 + v_1 = 0, \qquad \dots$$

jointes aux conditions aux limites :

(5) $$\frac{dv_0}{dn} + hv_0 = 0, \qquad \frac{dv_1}{dn} + hv_1 = 0, \qquad \dots.$$

La détermination d'une fonction v_m par des conditions de la forme :

$$\Delta v_m + v_{m-1} = 0, \qquad \frac{dv_m}{dn} + hv_m = 0,$$

où v_{m-1} est déjà connue, est précisément le problème qui a été traité dans le paragraphe précédent.

Il s'agit maintenant de reconnaître si la série (3) est convergente, et pour cela je vais employer la méthode de Schwarz et former les intégrales suivantes :

$$W_{m,n} = \int v_m v_n \, d\tau,$$

$$V_{m,n} = h \int v_m v_n \, d\omega + \int \left(\frac{dv_m}{dx} \frac{dv_n}{dx} + \frac{dv_m}{dy} \frac{dv_n}{dy} + \frac{dv_m}{dz} \frac{dv_n}{dz} \right) d\tau.$$

Ces intégrales jouissent des propriétés caractéristiques des intégrales de Schwarz, c'est-à-dire que l'on a :

$$W_{m,n} = W_{m+1,n} = W_{m+1,n-1} = W_{m+n,0} = W_{m+n},$$

$$W_m > 0,$$

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \dots.$$

Toutes ces propriétés seraient presque immédiatement évidentes si l'on avait démontré que les fonctions v_m satisfont effectivement aux conditions (5). Malheureusement, il n'en est pas ainsi; tout ce que nous savons, c'est que ces fonctions satisfont à la « condition modifiée » correspondante. Il y a là une difficulté dont je n'ai pas réussi à triompher complètement. Il n'est même pas établi rigoureusement que l'intégrale $V_{m,n}$ a un sens.

Quoi qu'il en soit, je me contenterai de l'aperçu suivant :

La fonction v_m satisfait à la condition modifiée; je dis qu'on peut en déduire la conséquence suivante :

Soit S une surface intérieure à D, mais très voisine de la frontière de D.

Soit u une fonction quelconque, finie et continue ainsi que ses dérivées du premier ordre, tant à l'intérieur de D que sur sa frontière.

L'intégrale

$$(6) \qquad \int u \frac{dv_m}{dn} \, d\omega$$

étendue à S a un sens; je dis qu'elle tend vers

$$(7) \qquad -\int u v_m \, d\omega$$

étendue à la frontière de D quand S se rapproche indéfiniment de cette frontière.

En effet, l'intégrale (6) est égale à l'intégrale

$$(8) \qquad \int v_m \frac{du}{dn} \, d\omega + \int (u \,\Delta v_m - v_m \,\Delta u) \, d\tau$$

étendue aux éléments $d\omega$ de la surface S et aux éléments $d\tau$ du volume limité par cette surface. D'autre part, en vertu de la condition modifiée, l'intégrale (7) est égale à cette même intégrale (8) étendue à la frontière de D et au domaine D tout entier.

Si nous faisons $u = v_n$, nous aurons :

(9) $$\lim \int_S v_n \frac{dv_m}{dn} d\omega = -h \int v_n v_m \, d\omega.$$

Il est vrai qu'on n'a pas le droit de faire $u = v_n$, puisque nous ne savons pas si les dérivées de v_n sont continues sur la frontière de D. Mais on peut observer que v_n peut être développé en une série uniformément convergente, dont tous les termes auraient leurs dérivées du premier ordre continues.

L'équation (9) est donc vraisemblablement satisfaite, bien que l'on puisse encore chicaner sur ce point.

De l'équation (9) on déduira sans peine les propriétés des intégrales W et V énoncées plus haut.

Il en résulte que, si $|\xi|$ est assez petit, la série

(10) $$\sqrt{W_0} + \xi \sqrt{W_1} + \xi^2 \sqrt{W_2} + \ldots$$

convergera.

D'autre part, si g désigne le maximum de $|f|$, g_0 celui de $|v_0|$, ..., g_n celui de $|v_n|$; si l'on pose, comme au paragraphe VI,

$$\lambda = \frac{l^2}{6} + \frac{l}{3h};$$

on aura :

$$g_n < \lambda^{n+1} g.$$

D'où il suit que la série (3) converge uniformément dans tout le domaine D, pourvu que

$$\xi < \frac{1}{\lambda}.$$

Mais cela ne nous suffit pas; il nous faudrait établir que la série (3) convergera toutes les fois que la série (10) converge elle-même.

L'inégalité de Schwarz

$$v_n^2 < W_{2n} \int G^2 d\tau$$

subsiste en désignant par G la fonction de Green généralisée que l'on formerait en donnant aux constantes ξ et h les valeurs zéro et h.

Tant que le point x', y', z' ne se rapproche pas indéfiniment de la frontière de D, l'intégrale $\int G^2\, d\tau$ reste limitée, ce qui nous permet d'affirmer ce qui suit.

Toutes les fois que la série (10) converge, il en est de même de la série (3); et la convergence est uniforme, sinon dans tout le domaine D, au moins dans tout domaine intérieur à D.

Il est probable que l'intégrale $\int G^2\, d\tau$ ne devient pas infinie quand le point x', y', z' se rapproche de la frontière; car il est aisé de constater que cela est vrai pour la sphère. S'il en est ainsi, la convergence de la série (3) est uniforme dans tout le domaine D.

Cela posé, soit V une fonction quelconque, telle que

$$\int V\, d\tau = 0.$$

On aura évidemment :

$$\frac{h\int V^2\, d\omega + \int \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau}{\int V^2\, d\tau} > \frac{\int \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau}{\int V^2\, d\tau} > \frac{16}{9 l^2}.$$

On en conclurait, comme dans le cas de $h = \infty$, que, si l'on a :

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p,$$

on pourra disposer des coefficients arbitraires α de telle façon que le rayon de convergence de la série (3) soit plus grand que L_p, L_p étant un nombre qui croît indéfiniment avec p.

Les autres résultats de la première partie de ce travail s'en déduiraient immédiatement; on verrait que la fonction v est méromorphe dans tout le plan, qu'elle n'a que des pôles simples et que ses résidus satisfont à des conditions de la forme :

$$\Delta u + ku = 0, \qquad \frac{du}{dn} + hu = 0;$$

ce qui démontre l'existence des fonctions harmoniques.

On voit que je n'ai pu parvenir dans le cas général à des résultats aussi satisfaisants que dans le cas $h=\infty$; on voit combien de lacunes subsistent encore. Je ne m'efforcerai pas davantage de les combler; la première chose à faire, en effet, serait de faire une étude plus approfondie de la méthode de Neumann, encore imparfaite sous bien des rapports.

Cela m'entraînerait trop loin.

Neumann a dit, en effet, dans son Ouvrage sur le potentiel (p. 153) : « Für die vierte Eigenschaft bin ich einen Beweis von hinlänglicher Strenge mitzutheilen, vorläufig nicht im Stande ».

J'ai cru cependant que ces résultats, si incomplets qu'ils soient, n'étaient pas absolument dénués d'intérêt, et je me suis décidé à les publier. Je serais heureux si cette publication pouvait provoquer de nouvelles recherches sur ce sujet.

XI. — **Méthode de Cauchy.**

Dans les deux premières parties de ce travail, j'ai démontré l'existence des fonctions harmoniques; mais, si dans la première partie (§ I-V), où je me suis occupé du cas de $h=\infty$, je suis arrivé à une démonstration parfaitement satisfaisante, il n'en a pas été de même dans la seconde partie (§ VI-X), où je me suis occupé du cas de h quelconque.

Aussi, pour ce qui me reste à dire, je me bornerai au cas de $h=\infty$, bien que les résultats soient probablement vrais dans tous les cas.

Une fonction harmonique U_i est alors définie par les conditions suivantes :

$$\Delta U_i + k_i U_i = 0 \quad \text{à l'intérieur de D,}$$
$$U_i = 0 \quad \text{à la frontière,}$$
$$\int U_i^2 \, d\tau = 1.$$

On peut se proposer de développer une fonction arbitraire f en une série procédant suivant les fonctions harmoniques, de telle sorte que l'on ait :

$$f = \sum A_i U_i.$$

Si le développement est possible, il est aisé de démontrer qu'on aura :

$$A_i = \int U_i f \, d\tau.$$

De nombreuses analogies nous donnent lieu de penser que le développement est toujours possible, mais une démonstration complète et rigoureuse n'a pu encore être donnée; je voudrais terminer ce Mémoire par quelques résultats relatifs à cette question.

L'idée qui se présente le plus naturellement à l'esprit, c'est d'employer une méthode dont Cauchy a fait souvent usage, en l'appropriant bien entendu au problème particulier que l'on a en vue.

Reprenons la fonction méromorphe dont il a été question dans les paragraphes I-V :

$$v = [f, \xi] = v_0 + v_1 \xi + v_2 \xi^2 + \ldots.$$

Nous avons vu que cette fonction admet une infinité de pôles simples

$$\xi = k_i$$

et que le résidu correspondant est $-A_i U_i$.

Supposons maintenant que $|\xi|$ croisse indéfiniment. L'argument de ξ étant constant et *différent de zéro*, tout nous porte à croire que la valeur asymptotique de v sera égale à $\frac{f}{\xi}$; je veux dire par là que le rapport $-\frac{v\xi}{f}$ tendra vers l'unité.

Je le démontrerai plus loin pour tous les arguments compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$; mais cela est probablement vrai pour tous les arguments, sauf pour l'argument zéro.

Il est clair d'ailleurs que ce rapport ne peut pas tendre vers 1 quand l'argument de ξ demeure constant et égal à zéro; car la fonction v devient alors infinie une infinité de fois.

Construisons maintenant une infinité de cercles $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots$. Ces cercles auront pour centre l'origine et leurs rayons iront en croissant indéfiniment avec l'indice i; ils ne devront passer par aucun des pôles de la fonction v; nous pourrons, par exemple, prendre pour rayon du cercle C_i :

$$\frac{k_i + k_{i+1}}{2}.$$

Tout nous porte à croire que, si les rayons de ces cercles sont convenablement choisis, on pourra assigner une limite supérieure au module de toutes les valeurs que peut prendre le produit $v\xi$ aux différents points de ces différents

cercles; de telle façon qu'on aura sur un quelconque des cercles C_i :

$$|v\xi| < M,$$

M étant une constante ne dépendant pas de l'indice i.

Ce point serait sans doute le plus délicat à établir.

Supposons donc que l'on ait démontré les deux propositions que je viens d'énoncer comme probables; voici ce qui arrivera :

Soit J_i l'intégrale :

$$J_i = \frac{1}{2i\pi}\int v\,d\xi$$

prise le long du cercle C_i. On aura :

$$\lim J_i = -f,$$

quand l'indice i, et par conséquent le rayon du cercle C_i, croîtront indéfiniment.

D'autre part, en vertu du théorème de Cauchy :

$$-J_i = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_i U_i,$$

car les pôles de v intérieurs à C_i sont les pôles $k_1, k_2, \ldots, k_i$.

On en conclut que la fonction f est égale à la somme de la série

$$A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots \textit{ ad inf.}$$

La démonstration de la possibilité du développement est ainsi ramenée à celle des deux propositions suivantes :

1° La valeur asymptotique de v est égale à $\frac{f}{\xi}$ quand le module de ξ croît indéfiniment, son argument demeurant constant et différent de zéro;

2° On peut choisir les rayons des cercles C_i de telle façon que l'on ait toujours :

$$|v\xi| < M.$$

Je n'ai pu arriver à établir ces deux propositions; j'ai donc dû modifier beaucoup la méthode de Cauchy, mais je n'ai pu parvenir à démontrer la possibilité du développement que dans certains cas particuliers. C'est sans doute à la méthode de Cauchy qu'il faudra revenir quand on voudra étendre ce résultat au cas général.

XII. — Valeur asymptotique de v.

Je suppose donc que ξ conserve un argument constant compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ et que son module croisse indéfiniment et je me propose de rechercher comment se comporte la fonction

$$v = [f, \xi].$$

La constante ξ, ayant son argument compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, aura sa partie réelle négative. Posons :

$$\xi = -\alpha^2, \qquad \alpha = \beta + i\gamma;$$

et choisissons le signe de α de façon que sa partie réelle β soit positive.

Soit G la fonction de Green généralisée en donnant aux constantes ξ et h les valeurs ξ et ∞. L'existence de cette fonction résulte des considérations développées dans les paragraphes I-V.

Soit v' la valeur de v au point x', y', z'; r la distance du point x, y, z au point x', y', z'; soit A le maximum du module de $\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}$ quand le point x, y, z est sur la frontière de D. D'après ce que nous avons vu au paragraphe VII, on aura :

$$v' = -\int G f \, d\tau,$$

$$\left| G - \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} \right| < A.$$

Or, r étant réel, on a :

$$\left| \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} \right| = \frac{e^{-\beta r}}{4\pi r};$$

et, comme β est positif, ce module décroît quand r augmente.

On aura donc :

$$A = \frac{e^{-\beta r_0}}{4\pi r_0},$$

r_0 étant la plus courte distance du point x', y', z' à la frontière de D.

On aura donc :

$$G = \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} + \theta \frac{e^{-\beta r_0}}{4\pi r_0},$$

θ étant une quantité dont le module est plus petit que 1. On aura donc :

$$v = \int f \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} d\tau + \frac{e^{-\beta r_0}}{4\pi r_0} \int \theta f d\tau.$$

La seconde intégrale a son module plus petit que gT, g étant la plus grande valeur de $|f|$ et T le volume de D. J'aurai donc :

$$v' = \int f \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} d\tau + \frac{e^{-\beta r_0}}{4\pi r_0} \theta' g \mathrm{T},$$

le module de θ' étant inférieur à 1.

Considérons une sphère de rayon r ayant son centre en x', y', z'; soit $r^2\, d\mathcal{C}$ un élément de la surface de cette sphère ayant pour coordonnées x, y, z : de sorte que $d\mathcal{C}$ soit l'angle solide sous lequel cet élément est vu du point x', y', z'; nous pourrons écrire :

$$v' = \int \frac{fr}{4\pi} e^{-\alpha r}\, dr\, d\mathcal{C} + e^{-\beta r_0} \theta' \mathrm{M},$$

en posant pour abréger :

$$\mathrm{M} = \frac{g\mathrm{T}}{4\pi r_0}$$

L'intégration devra être étendue à tous les éléments de volume $r^2\, dr\, d\mathcal{C}$ qui sont à l'intérieur de D; si l'on préfère, on peut l'étendre à l'espace tout entier, mais en convenant, puisque la fonction f est arbitraire et n'a encore été définie qu'à l'intérieur de D, en convenant, dis-je, de faire $f = 0$ à l'extérieur de D.

Si alors nous posons :

$$\varphi(r) = \int \frac{fr\, d\mathcal{C}}{4\pi},$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments de la sphère de rayon r, nous aurons :

$$v' = \int_0^{\infty} \varphi(r) e^{-\alpha r}\, dr + e^{-\beta r_0} \theta' \mathrm{M}.$$

Il importe de remarquer que $\varphi(r)$ (de même que M) ne dépend nullement de la constante ξ.

Supposons que la fonction f soit analytique dans le voisinage du point x', y', z'; il arrivera que φ sera aussi une fonction analytique quand r sera voisin de zéro. Nous aurons alors, pour r inférieur à une certaine limite r_1 :

$$\varphi(r) = \mathrm{A}_1 r + \mathrm{A}_2 r^2 + \ldots$$

et il est manifeste que A_1 n'est autre chose que f', valeur de f au point x', y', z'.

Nous pourrons alors trouver une quantité positive B, telle que

$$|\varphi(r) - A_1 r| < B r^2.$$

Il vient alors :

$$v' = \int_0^\infty A_1 r e^{-\alpha r} dr + \int_0^\infty B \theta'' r^2 e^{-\alpha r} dr + e^{-\beta r_0} \theta' M,$$

le module de θ'' étant plus petit que 1 ; ou bien :

$$v' = \frac{A_1}{\alpha^2} + \frac{2\theta_1 B}{\alpha^3} + e^{-\alpha r_0} \theta_2 M,$$

θ_1 et θ_2 ayant leurs modules plus petits que 1 ; et en effet $e^{-\beta r_0}$ a même module que $e^{-\alpha r_0}$.

Il résulte de là que, pour $|\xi| = \infty$,

$$\lim v'\xi = \lim(-v'\alpha^2) = -A_1 = -f' ;$$

d'où

$$\lim v\xi = -f.$$

C. Q. F. D.

J'ai supposé plus haut que la fonction f était analytique dans le voisinage de x', y', z' ; mais cette restriction n'a rien d'essentiel ; il suffit que $\varphi(r)$ satisfasse aux conditions de Dirichlet.

Le même résultat peut s'étendre au cas où le domaine D n'a que deux dimensions.

Soit en effet dans ce cas r la distance du point x, y, au point x', y' ; et soit :

$$J(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha\sqrt{r^2+z^2}}}{4\pi\sqrt{r^2+z^2}} dz.$$

La fonction J ainsi définie est étroitement apparentée aux fonctions de Bessel ; elle satisfait à l'équation $\Delta J + \xi J = 0$, et sa différence avec $\frac{-\log r}{2\pi}$ demeure finie. Appelons alors G la fonction de Green généralisée, c'est-à-dire une fonction qui, à l'intérieur de D, satisfait à l'équation :

$$\Delta G + \xi G = 0,$$

s'annule à la frontière, et est telle que la différence :

$$G + \frac{\log r}{2\pi}$$

reste finie. Alors le maximum de $|G - J|$ sera égal à $|J(r_0)|$.

On en conclut :

$$v = \int G f \, d\tau = \int J(r) f \, d\tau + \int \theta g \, J(r_0) \, d\tau \qquad (|\theta| < 1)$$

ou

$$v' = \iint \frac{e^{-\alpha\rho}}{4\pi\rho} f \, d\tau \, dz + \theta' g \, T \int \frac{e^{-\alpha\rho_0} \, dz}{4\pi\rho_0} \qquad (|\theta'| < 1)$$

en posant pour abréger :

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \qquad \rho_0 = \sqrt{r_0^2 + z^2}$$

ou enfin :

$$v' = \iint \frac{e^{-\alpha\rho}}{4\pi\rho} f \, d\tau \, dz + \theta' M \, e^{-\alpha r_0},$$

M étant une constante indépendante de ξ. Cette équation étant tout à fait de même forme que l'équation (1), on en tirera la même conclusion, c'est-à-dire que :

$$\lim v\xi = -f.$$

Cela suppose toujours que la partie réelle de ξ est négative et tend vers $-\infty$.

XIII. — Application du théorème de Mittag-Leffler.

Cherchons une limite supérieure de $|U_i|$ et de A_i. Nous avons :

$$\Delta U_i + k_i U_i = 0,$$

et par conséquent, en désignant par U'_i la valeur de U_i au point x', y', z' et par G la fonction de Green ordinaire, nous pourrons écrire :

$$U_i = k_i \int G U'_i \, d\tau;$$

ou en vertu de l'inégalité de Schwarz :

$$\left[\int G U'_i \, d\tau\right]^2 < \int U_i'^2 \, d\tau \int G^2 \, d\tau.$$

Or,

$$\int U_i'^2 \, d\tau = 1.$$

Il vient donc :

$$U_i < k_i \sqrt{\int G^2 \, d\tau}.$$

Or cette quantité

$$\sqrt{\int G^2 \, d\tau}$$

est elle-même, comme nous l'avons vu dans les paragraphes I et II, plus petite qu'un certain nombre Q qui ne dépend que de la plus grande dimension l du domaine D. On a ainsi :

$$U_i < k_i Q.$$

D'autre part, nous avons :

$$A_i = \int f U_i \, d\tau ;$$

d'où, en vertu de l'inégalité de Schwarz :

$$A_i^2 < \int f^2 \, d\tau \int U_i^2 \, d\tau.$$

Si nous posons :

$$\int f^2 \, d\tau = M^2,$$

cette inégalité peut s'écrire :

$$|A_i| < M.$$

D'autre part :

$$\int v_n U_i \, d\tau = k_i^{-n} \int f U_i \, d\tau,$$

d'où

$$\left| \int v_n U_i \, d\tau \right| < k_i^{-n} M.$$

Si donc il existe une fonction, f^*, telle que :

$$v^* = [f^*, \xi] = v_0^* + v_1^* \xi + v_2^* \xi^2 + \ldots$$

et que

$$v_n^* = f,$$

on pourra trouver une constante M^*, telle que :

$$|A_i| < k_i^{-n} M^*.$$

C'est ce que nous exprimerons en disant que A_i est au plus de l'ordre de grandeur de k_i^{-n}.

Or la fonction f^* existera, pourvu que deux conditions soient remplies :

1° La première c'est que f ait des dérivées d'ordre $2n + 2$;

2° La seconde c'est que f s'annule à la frontière ainsi que Δf, $\Delta^2 f = \Delta\Delta f$, $\Delta^3 f = \Delta\Delta^2 f$, ... jusqu'à $\Delta^n f$.

Il suffit en effet de prendre :

$$v_{n-1}^* = -\Delta f, \qquad v_{n-2}^* = -\Delta v_{n-1}^* = \Delta^2 f, \qquad \ldots, \qquad v_0^* = (-1)^n \Delta^n f ;$$
$$f^* = -\Delta v_0^*.$$

Si ces deux conditions sont remplies, A_i est au plus de l'ordre de k_i^{-n} et $A_i U_i$ de l'ordre de k_i^{1-n}.

Or k_i est au moins de l'ordre de grandeur de $i^{\frac{2}{3}}$ si D a trois dimensions et au moins de l'ordre de i si D a deux dimensions.

Je conclus que $A_i U_i$ est au plus de l'ordre de i^μ; μ étant un nombre donné par le tableau suivant :

Dans la première colonne du tableau j'écris les conditions qui sont remplies à la frontière par la fonction f que je suppose d'ailleurs analytique.

Dans la seconde colonne je porte la valeur de μ, en supposant que D ait trois dimensions, et dans la troisième colonne j'écris la valeur de μ en supposant que D n'ait que deux dimensions :

Aucune condition....................	$\frac{2}{3}$	1
$f = 0$....................	0	0
$f = \Delta f = 0$....................	$-\frac{2}{3}$	-1
$f = \Delta f = \Delta\Delta f = 0$....................	$-\frac{4}{3}$	-2

Il résulte de là que la série

$$\sum A_i U_i$$

est absolument convergente si à la frontière f, Δf et $\Delta^2 f$ s'annulent.

La série

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i}$$

est absolument convergente si f et Δf s'annulent.

La série

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i^2}$$

est absolument convergente si f s'annule à la frontière.

Enfin la série

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i^3}$$

converge dans tous les cas.

Il importe d'observer que ces conditions de convergence sont suffisantes, mais qu'elles sont loin d'être nécessaires. En réalité A_i et U_i décroissent sans

aucun doute beaucoup plus rapidement que ne l'indiquerait le tableau précédent; mais je n'ai pu le démontrer.

Appliquons alors à la fonction v le théorème de Mittag-Leffler. Nous voyons d'abord que la série :

$$\sum \frac{A_i U_i \xi^2}{k_i^2(\xi - k_i)}$$

converge dans tous les cas; que la série :

$$\sum \frac{A_i U_i \xi}{k_i(\xi - k_i)}$$

converge si f s'annule à la frontière; et enfin que la série :

$$\sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}$$

converge si f et Δf s'annulent.

Nous pouvons donc poser :

1° Dans tous les cas :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i \xi^2}{k_i^2(\xi - k_i)} + E(\xi);$$

2° Si f s'annule à la frontière :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i \xi}{k_i(\xi - k_i)} + E(\xi);$$

3° Si f et Δf s'annulent :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i} + E(\xi);$$

la notation $E(\xi)$ désignant une fonction entière de ξ.

Plaçons nous donc dans le troisième cas; supposons que f et Δf sont nuls à la frontière et cherchons à déterminer la fonction entière $E(\xi)$.

Soit :

$$E(\xi) = e_0 + e_1 \xi + e_2 \xi^2 + \ldots.$$

Soit encore :

$$f^{(k)} = f - A_1 U_1 - A_2 U_2 - \ldots - A_k U_k,$$

$$v^{(k)} = [f^{(k)}, \xi] = v + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}$$

et

$$v^{(k)} = v_0^{(k)} + v_1^{(k)} \xi + v_2^{(k)} \xi^2 + \ldots.$$

Posons de plus :

$$W_{m,n}^{(k)} = \int v_m^{(k)} v_n^{(k)}\, d\tau, \qquad E_{m,n} = \int e_m e_n\, d\tau.$$

On aura :

$$e_m = \lim v_m^{(k)} \qquad (k = \infty)$$

et, par conséquent,

$$E_{m,n} = \lim W_{m,n}^{(k)} \qquad (k = \infty).$$

D'autre part, les théorèmes de Schwarz sont vrais de $W_{m,n}^{(k)}$, c'est-à-dire que :

$$W_{m,n}^{(k)} = W_{m+1,n-1}^{(k)},$$

ce qui permet de poser

$$W_{m,n}^{(k)} = W_{m+n}^{(k)}.$$

On aura donc aussi

$$E_{m,n} = E_{m+1,n-1},$$

ce qui permettra de poser :

$$E_{m,n} = E_{m+n}.$$

On aura d'ailleurs :

$$W_n^{(k)} > 0,$$

$$\frac{W_1^{(k)}}{W_0^{(k)}} < \frac{W_2^{(k)}}{W_1^{(k)}} < \frac{W_3^{(k)}}{W_2^{(k)}} < \cdots.$$

On aura donc de même :

$$E_n > 0,$$

$$\frac{E_1}{E_0} < \frac{E_2}{E_1} < \frac{E_3}{E_2} < \cdots.$$

D'autre part, la fonction $E(\xi)$ étant entière, la série

$$e_0 + e_1\xi + e_2\xi^2 + \ldots$$

convergera quel que soit ξ, mais comme e_m dépend de x, y, z on peut se demander si la convergence est uniforme.

Soit L_p le nombre défini au paragraphe III ; on aura, d'après le paragraphe IV :

$$v = \frac{P}{D},$$

D étant un polynome de degré $p-1$ en ξ, dont les coefficients sont constants et qui admet comme racines tous les nombres k_i plus petits que L_p.

Quant à P, c'est une série ordonnée suivant les puissances de ξ dont les coefficients dépendent de x, y et z et qui converge uniformément pourvu que $|\xi| < L_p$.

Considérons maintenant la somme

$$-\sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}$$

et partageons-la en deux :

$$\eta^{(K)} = -\sum_{i=1}^{i=K} \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}$$

et

$$\zeta^{(K)} = -\sum_{i=K+1}^{i=\infty} \frac{A_i U_i}{\xi - k_i},$$

le nombre K étant choisi de telle sorte que les K premiers nombres k_i soient précisément ceux qui sont plus petits que L_p.

Alors $\eta^{(K)}D$ est un polynome entier.

Quant à $\zeta^{(K)}$, c'est une fonction de ξ qui peut être développée suivant les puissances de ξ; la série ainsi obtenue converge uniformément pourvu que $|\xi| < L_p$.

En effet, le coefficient de ξ^q est égal à

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i^q},$$

qui est plus petit en valeur absolue que

$$\sum \left| \frac{A_i U_i}{k_i} \right| L_p^{1-q},$$

puisque

$$k_i > L_p \quad \text{pour} \quad i > K.$$

Or,

$$E(\xi) D = P + \eta^{(K)} D + \zeta^{(K)} D$$

sera développable en une série ordonnée suivant les puissances de ξ et dont la convergence sera uniforme pourvu que $|\xi| < L_p$.

Or cette série est divisible par D puisque $E(\xi)$ est une fonction entière. Donc la série $E(\xi)$ converge aussi uniformément pour $|\xi| < L_p$, c'est-à-dire que la convergence est toujours uniforme puisque L_p peut être pris aussi grand que l'on veut.

Donc la série

$$\int e_0 e_0 \, d\tau + \xi \int e_0 e_1 \, d\tau + \xi^2 \int e_0 e_2 \, d\tau + \ldots$$

ou

$$E_0 + \xi E_1 + \xi^2 E_2 + \ldots$$

convergera toujours, quelque grand que soit ξ.

Donc $\frac{E_{n+1}}{E_n}$ doit tendre vers zéro quand n croît indéfiniment. Mais ce rapport va toujours en croissant, d'après les inégalités démontrées plus haut; il faut donc que l'on ait :

$$e_1 = e_2 = \ldots = 0, \qquad E(\xi) = e_0.$$

Il en résulte

$$v_1 = \sum \frac{A_i U_i}{k_i^2}, \qquad v_0 = \sum \frac{A_i U_i}{k_i} + e_0.$$

La série :

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i}$$

étant uniformément convergente d'après les hypothèses faites, on aura :

$$\int (v_0 - e_0) G \, d\tau = \sum \int \frac{A_i U_i}{k_i} G \, d\tau,$$

G étant la fonction de Green ordinaire; et par conséquent, puisque

$$\Delta \frac{A_i U_i}{k_i^2} = -\frac{A_i U_i}{k_i},$$

on aura aussi :

$$\Delta v_1 = \Delta \sum \frac{A_i U_i}{k_i^2} = e_0 - v_0.$$

Mais on sait que

$$\Delta v_1 + v_0 = 0.$$

On a donc :

$$e_0 = E(\xi) = 0,$$

et enfin :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}.$$

Supposons maintenant que Δf ne s'annule plus, mais que f s'annule à la frontière; on aura :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i \xi}{k_i(\xi - k_i)} + E(\xi),$$

$$E(\xi) = e_0 + e_1 \xi + e_2 \xi^2 + \ldots.$$

La comparaison des développements des deux membres nous apprend tout de suite que :

$$e_0 = v_0.$$

Cela posé, considérons la fonction :

$$[v_0, \xi] = v_1 + v_2 \xi + v_3 \xi^2 + \ldots.$$

On pourra lui appliquer le théorème précédent, puisque v_0 et $\Delta v_0 = -f$ s'annulent à la frontière. On aura donc :

$$[v_0, \xi] = -\sum \frac{A_i U_i}{k_i(\xi - k_i)}.$$

On a donc :

$$v = \xi[v_0, \xi] + E(\xi).$$

La comparaison des développements des deux membres suivant les puissances de ξ donne tout de suite :

$$E(\xi) = v_0.$$

Supposons enfin que f ne s'annule pas à la frontière; on aura :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i \xi^2}{k_i^2(\xi - k_i)} + E(\xi).$$

Considérons la fonction :

$$[v_1, \xi] = v_2 + v_3\xi + v_4\xi^2 + \ldots.$$

On voit que v_1 et $\Delta v_1 = -v_0$ s'annulent à la frontière. On aura donc :

$$[v_1, \xi] = -\sum \frac{A_i U_i}{k_i^2(\xi - k_i)},$$

d'où

$$v = \xi^2[v_1, \xi] + E(\xi).$$

La comparaison des développements des deux membres montre que

$$E(\xi) = v_0 + v_1\xi.$$

Pour nous résumer, on aura, dans tous les cas :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i \xi^2}{k_i^2(\xi - k_i)} + v_0 + v_1\xi.$$

On aura, si f s'annule à la frontière :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i \xi}{k_i(\xi - k_i)} + v_0,$$

et si f et Δf s'annulent à la frontière :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}.$$

XIV. — Possibilité du développement.

Supposons que la série :

$$\sum A_i U_i$$

soit absolument convergente ou semi-convergente, et que la série :

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i}$$

converge absolument ; on aura alors, d'après ce qui précède :

$$(1) \qquad v = -\sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}.$$

Je dis que la somme de la série :

$$\sum A_i U_i$$

sera égale à f.

En effet, reprenons l'égalité (1), multiplions-la par ξ et faisons tendre ξ vers $-\infty$. D'après ce que nous avons vu au paragraphe XII, le premier membre tendra vers $-f$.

Pour voir ce qui arrive du second membre, je vais appliquer le théorème d'Abel. Je rappelle d'abord l'énoncé de ce théorème. Soit

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

une série absolument convergente ou semi-convergente.

Soit :

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Soit ρ_n la plus grande de toutes les quantités

$$|S_{n+1} - S_n|, \quad |S_{n+2} - S_n|, \quad |S_{n+3} - S_n|, \quad ad\ inf.$$

Le nombre ρ_n tendra vers zéro quand n croîtra indéfiniment, puisque la série S converge. Soit maintenant :

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots$$

une suite de nombres positifs, constamment et indéfiniment décroissants.

Le théorème d'Abel nous apprend que la série :

$$u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \ldots + u_n\alpha_n + \ldots$$

est convergente et que le reste de cette série,

$$u_{n+1}\alpha_{n+1} + u_{n+2}\alpha_{n+2} + \ldots$$

est plus petit en valeur absolue que $\rho_n\alpha_n$.

Si ξ est négatif, les nombres $\frac{-\xi}{k_i - \xi}$ seront positifs, constamment et indéfiniment décroissants; de plus ils seront plus petits que 1.

Si donc nous posons :

$$S_n = A_1U_1 + A_2U_2 + \ldots + A_nU_n$$

et que ρ_n soit, comme plus haut, la plus grande des quantités

$$|S_{n+p} - S_n|,$$

le reste de la série

$$\sum \frac{-A_iU_i\xi}{k_i - \xi}$$

sera plus petit en valeur absolue que $\frac{-\rho_n\xi}{k_n - \xi}$ et par conséquent que ρ_n.

Nous aurons donc :

$$v\xi = \frac{A_1U_1\xi}{\xi - k_1} + \frac{A_2U_2\xi}{\xi - k_2} + \ldots + \frac{A_nU_n\xi}{\xi - k_n} + \theta\rho_n, \tag{2}$$

θ étant plus petit que 1 en valeur absolue.

Je dis qu'on peut prendre n assez grand pour que

$$S_n = A_1U_1 + A_2U_2 + \ldots + A_nU_n$$

diffère aussi peu que l'on veut de f, et, par exemple, pour que

$$|f - S_n|$$

soit plus petit que ε.

En effet, nous choisirons d'abord n assez grand pour que :

$$\rho_n < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le nombre n une fois choisi, nous choisirons $-\xi$ assez grand :

1° Pour que la différence

$$|v\xi + f| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ce qui est possible, puisque

$$\lim v\xi = -f, \qquad \text{pour} \quad \xi = -\infty;$$

2° Pour que la différence

$$\left| \frac{A_1 U_1 \xi}{\xi - k_1} + \frac{A_2 U_2 \xi}{\xi - k_2} + \ldots + \frac{A_n U_n \xi}{\xi - k_n} - A_1 U_1 - A_2 U_2 - \ldots - A_n U_n \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

c'est-à-dire pour que

$$\left| \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i U_i k_i}{\xi - k_i} \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ce qui est évidemment possible puisque le premier membre de cette inégalité tend vers zéro quand le module de ξ croît indéfiniment.

Il vient donc, en vertu de (2) :

$$|f - S_n| < |v\xi + f| + \left| \sum \frac{A_i U_i \xi}{\xi - k_i} + \sum A_i U_i \right| + \theta \rho_n < \varepsilon.$$

C. Q. F. D.

Supposons maintenant que la série

$$\sum A_i U_i$$

soit convergente; la série :

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i}$$

sera aussi convergente, en vertu du théorème d'Abel; mais nous ne savons pas si la convergence sera absolue. Au contraire, la série :

$$\sum \left| \frac{A_i U_i}{k_i^2} \right|$$

convergera certainement, car $A_i U_i$ tend vers zéro et k_i est au moins de l'ordre $i^{\frac{2}{3}}$; et par conséquent nous pouvons trouver un nombre positif M, tel que

$$\left| \frac{A_i U_i}{k_i^2} \right| < \frac{M}{i^{\frac{4}{3}}}.$$

Nous en concluons :

1° Que l'on a, par le théorème de Mittag-Leffler :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i \xi}{k_i (\xi - k_i)} + v_0;$$

2° Qu'en appliquant le théorème précédent à $[v_0, \xi]$ on a :

$$v_0 = \sum \frac{A_i U_i}{k_i}.$$

Il vient donc :

$$(1\ bis) \qquad v = -\sum \left(\frac{A_i U_i \xi}{k_i(\xi - k_i)} - \frac{A_i U_i}{k_i} \right) = -\sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}.$$

L'équation (1 *bis*), étant la même que l'équation (1), conduira au même résultat, c'est-à-dire que

$$f = \sum A_i U_i.$$

Ainsi :

1° *La série*

$$\sum A_i U_i$$

représentera la fonction f toutes les fois qu'elle sera convergente.

Or la série converge si la fonction f est analytique (il suffit même que les dérivées des six premiers ordres soient finies) et si de plus f s'annule à la frontière ainsi que Δf et $\Delta\Delta f$; par conséquent :

2° *La fonction f est développable en série procédant suivant les fonctions harmoniques, si elle est analytique et si elle s'annule à la frontière, ainsi que Δf et $\Delta\Delta f$.*

Je ne veux pas dire que le développement n'est possible que dans ce cas, je crois au contraire qu'il est possible dans tous les cas, mais je n'ai pu le démontrer.

Ce résultat d'ailleurs suffit pour les applications physiques; car si l'on veut développer une fonction empirique f, on pourra toujours trouver une fonction f' qui différera de f d'aussi peu qu'on voudra dans tout domaine intérieur à D et qui satisfera à la condition d'être analytique et de s'annuler à la frontière ainsi que $\Delta f'$ et $\Delta\Delta f'$.

J'aurai pu dire aussi :

Supposons que la série

$$\sum A_i U_i$$

soit uniformément convergente, sans que nous sachions si elle l'est absolument.

Soit G la fonction de Green ordinaire, et U'_i la valeur de U_i au point x', y', z'. La série :

$$\sum \int A_i U_i G \, d\tau = \sum \frac{A_i U'_i}{k_i}$$

sera aussi uniformément convergente; on a donc :

$$\sum A_i U_i = -\Delta \sum \frac{A_i U_i}{k_i};$$

et de même :

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i} = -\Delta \sum \frac{A_i U_i}{k_i^2},$$

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i^2} = -\Delta \sum \frac{A_i U_i}{k_i^3}.$$

Or on a vu plus haut que :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i \xi^2}{k_i^2(\xi - k_i)} + v_0 + v_1 \xi.$$

On a donc :

$$v_2 = \sum \frac{A_i U_i}{k_i^3};$$

d'où :

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i^2} = -\Delta v_2 = v_1,$$

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i} = -\Delta v_1 = v_0,$$

$$\sum A_i U_i = -\Delta v_0 = f.$$

C. Q. F. D.

J'ai préféré suivre une marche un peu plus détournée, ce qui m'a dispensé de supposer que la convergence est uniforme.

Paris, mars 1894.

SUR LA MÉTHODE DE NEUMANN

ET

LE PROBLÈME DE DIRICHLET

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 120, p. 347-352 (18 février 1895).

On sait en quoi consiste la méthode de C. Neumann pour la solution du problème de Dirichlet. Soit S une certaine surface sur laquelle on suppose répandue une *double couche* de matière attirante ; soit W le potentiel de cette double couche, V la limite vers laquelle tend W quand on se rapproche indéfiniment de S *par l'intérieur*, V′ la limite de W quand on se rapproche de S par l'extérieur ; et enfin $U = \frac{V+V'}{2}$ la valeur de W sur la surface S elle-même. Soient λ une constante arbitraire et Φ une fonction donnée définie en tous les points de la surface S.

On peut se proposer de déterminer la double couche de telle façon que

$$(1)\qquad V - V' = \lambda(V + V') + 2\Phi.$$

Nous chercherons à développer W suivant les puissances croissantes de λ en posant

$$(2)\qquad W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots.$$

et nous poserons de même

$$V = \Sigma\lambda^n V_n,\qquad V' = \Sigma\lambda^n V'_n,\qquad U = \Sigma\lambda^n U_n.$$

On trouve alors

$$(3)\qquad V_0 - V'_0 = 2\Phi,\qquad V_n - V'_n = V_{n-1} + V'_{n-1} = 2U_{n-1}.$$

Cela peut s'écrire

$$(4)\qquad W_0 = -\int \Phi \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn}, \qquad W_n = -\int U'_{n-1} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn}.$$

Les intégrales sont étendues à tous les éléments $d\omega'$ de S ; j'appelle M' le centre de gravité de $d\omega'$, M le point x, y, z ; j'appelle r la distance MM' ; $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ est la dérivée de $\frac{1}{r}$ estimée suivant la normale extérieure à la surface S au point M', de sorte que

$$d\omega' \frac{d\frac{1}{r}}{dn}$$

est l'angle solide sous lequel l'élément $d\omega'$ est vu du point M.

J'appelle Φ' la valeur que prend Φ et U'_{n-1} celle que prennent W_{n-1} et U_{n-1} quand le point M vient en M'. Les formules (4) permettent donc de calculer de proche en proche tous les termes de la série (2).

La condition (1) se réduit respectivement à

$$V = \Phi, \qquad \text{ou} \qquad V' = -\Phi,$$

quand on y fait $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$.

Si donc la série (2) converge pour $\lambda = \pm 1$, elle fournira la solution du problème de Dirichlet pour la région intérieure à S en y faisant $\lambda = -1$ et pour la région extérieure en y faisant $\lambda = 1$.

Neumann a démontré que la série (2) converge pour $\lambda = \pm 1$ à deux conditions : 1° si la surface S est convexe ; 2° si l'on a

$$(5)\qquad \int \Phi\gamma\, d\omega = 0,$$

γ étant la densité de l'électricité en équilibre sur la surface S lorsque l'on suppose cette surface conductrice et très éloignée de tous les autres conducteurs.

Cela suffit pour résoudre le problème de Dirichlet toutes les fois que S est convexe, que la condition (5) soit d'ailleurs remplie ou non.

En revanche, un examen superficiel pourrait faire croire que la première condition est essentielle et que la méthode de Neumann ne s'applique qu'aux surfaces convexes.

Il n'en est rien pourtant ; je suis parvenu à démontrer que la série (2)

converge encore, pourvu que la condition (5) soit remplie, *quand la surface* S *n'est pas convexe.* J'ai supposé toutefois que S est simplement connexe et ne présente pas de singularité, je veux dire qu'elle a en tout point un plan tangent et des rayons de courbure déterminés. Il est d'ailleurs probable que ces deux conditions, ou au moins la seconde, ne sont pas nécessaires.

Ne pouvant développer ici toute la démonstration, j'en vais indiquer la marche générale.

Soient J_{ik} et J'_{ik} les valeurs de l'intégrale

$$\int \left(\frac{dW_i}{dx}\frac{dW_k}{dx} + \frac{dW_i}{dy}\frac{dW_k}{dy} + \frac{dW_i}{dz}\frac{dW_k}{dz} \right) dx\,dy\,dz,$$

étendue respectivement à tous les points x, y, z intérieurs à S et à tous les points extérieurs à S. On trouve aisément

$$J_{ik} = J_{i-1,k+1}, \qquad J'_{ik} = J'_{i-1,k+1},$$

ce qui nous permet de poser

$$J_{ik} = J_{i+k}, \qquad J'_{ik} = J'_{i+k}.$$

On trouve ensuite facilement

$$J_m + J'_m = J_{m-1} - J'_{m-1}, \qquad J_{2m} > 0, \qquad J'_{2m} > 0,$$

$$\frac{J_2}{J_0} < \frac{J_4}{J_2} < \frac{J_6}{J_4} < \ldots < 1.$$

On peut ensuite, si la surface est simplement connexe, assigner une limite supérieure M et une limite inférieure μ au rapport $\frac{J_{2m}}{J'_{2m}}$; ces deux limites, qui sont évidemment positives, ne dépendent que de la surface S. Si donc nous posons

$$\frac{M - \mu}{M + \mu} = L,$$

nous aurons

$$0 < L < 1.$$

On trouve ensuite

$$J_{2m} + J'_{2m} < AL^{2m},$$

A étant une constante ; et cela prouve que la série

$$\sqrt{J_0} + \sqrt{J_2} + \sqrt{J_4} + \cdots$$

est convergente.

Définissons maintenant une constante C_m par l'équation

$$\int U_m \, d\omega = C_m \int d\omega,$$

les intégrales étant étendues à tous les éléments $d\omega$ de la surface S, de sorte que $\int d\omega$ n'est autre chose que l'aire totale de cette surface. Posons alors

$$K_m = \int (U_m - C_m)^2 \, d\omega.$$

On peut démontrer, si la surface S est simplement connexe, que

$$K_m < B(J_{2m} + J'_{2m}) < ABL^{2m},$$

B étant une constante.

D'autre part, U_m est plus petit en valeur absolue qu'un facteur constant multiplié par N^m, $N + 1$ étant le maximum du nombre des points de rencontre d'une droite avec la surface S ; et il en est de même, par conséquent, de C_m et de $U_m - C_m$.

En combinant ces deux séries d'inégalités, on peut démontrer que

$$U_{m+1} - C_{m+1} < (\alpha + \beta m) L^m,$$

α et β étant deux constantes positives.

Il résulte de là que la série

$$U_0 + \lambda (U_1 - C_0) + \lambda^2 (U_2 - C_1) + \ldots$$

est convergente pour $\lambda = \pm 1$. Nous pouvons donc trouver une double couche satisfaisant, soit à la condition

$$V = \Phi + \text{const.},$$

soit à la condition

$$V' = -\Phi + \text{const.}$$

Le problème de Dirichlet est donc résolu.

J'ai été conduit, à ce propos, à certaines propositions que je n'ai pu démontrer complètement, mais que j'ai rendues vraisemblables par un mode de raisonnement dont on s'est souvent contenté en Physique mathématique, bien qu'il soit dépourvu de rigueur analytique.

Je crois néanmoins devoir les énoncer ici.

Il existe une infinité de fonctions que je désignerai par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ et qui jouissent des propriétés suivantes :

La fonction φ_i est le potentiel d'une simple couche répandue sur la surface S ; si donc l'on considère la projection de l'attraction due à cette couche sur une normale à S, cette projection n'aura pas la même valeur en deux points infiniment voisins du pied de cette normale, mais situés le premier à l'extérieur de S, le second à l'intérieur de S ; j'appellerai la première de ces valeurs $\frac{d\varphi_i'}{dn}$ et la seconde $\frac{d\varphi_i}{dn}$. On aura, et c'est là la propriété qui sert de définition à φ_i,

$$\frac{d\varphi_i'}{dn} = -h_i \frac{d\varphi_i}{dn},$$

h_i étant une constante positive. L'intégrale

$$\int \sum \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_k}{dx}\,dx\,dy\,dz = \int \left(\frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_k}{dx} + \frac{d\varphi_i}{dy}\frac{d\varphi_k}{dy} + \frac{d\varphi_i}{dz}\frac{d\varphi_k}{dz}\right) dx\,dy\,dz,$$

étendue soit à tous les points extérieurs à S, soit à tous les points intérieurs, sera nulle. Si je désigne par H_i et H_i' les deux valeurs de l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{d\varphi_i}{dx}\right)^2 dx\,dy\,dz,$$

étendue à la région intérieure à S et à la région extérieure, on aura

$$H_i' = h_i H_i.$$

Si Φ est développable en une série de la forme

$$\Phi = \sum \alpha_i \varphi_i,$$

on aura, pour une valeur quelconque de λ,

$$W = \sum \frac{2\alpha_i \varphi_i}{h_i + 1 - \lambda(h_i - 1)} \quad \text{à l'extérieur de S;}$$

$$W = \sum \frac{-2\alpha_i h_i \varphi_i}{h_i + 1 - \lambda(h_i - 1)} \quad \text{à l'intérieur de S,}$$

d'où

$$J_p = \sum \frac{4\alpha_i^2 h_i^2}{(h_i + 1)^2}\left(\frac{h_i - 1}{h_i + 1}\right)^p H_i, \qquad J_p' = \sum \frac{4\alpha_i^2 h_i}{(h_i + 1)^2}\left(\frac{h_i - 1}{h_i + 1}\right)^p H_i.$$

J'ajoute que, M et μ étant les constantes définies plus haut, on a

$$M > h_i > \mu.$$

LA MÉTHODE DE NEUMANN

ET

LE PROBLÈME DE DIRICHLET

Acta mathematica, t. 20, p. 59-142 (1896-1897).

INTRODUCTION.

1. *Simple et double couche.* — Le problème de Dirichlet consiste à trouver une fonction V qui à l'intérieur d'un certain domaine reste finie et continue ainsi que ses dérivées, et satisfait de plus à l'équation de Laplace

$$\Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

et qui sur la frontière de ce domaine prenne des valeurs données à l'avance.

Si le domaine s'étend à l'infini, cette fonction V devra de plus s'annuler à l'infini.

Dans ce qui suivra je désignerai sous le nom de *fonction harmonique* toute fonction finie et continue ainsi que ses dérivées, satisfaisant à l'équation de Laplace et s'annulant à l'infini, de sorte que le problème de Dirichlet peut s'énoncer ainsi :

Trouver une fonction harmonique dans un certain domaine prenant des valeurs données sur la frontière de ce domaine.

Parmi les méthodes qui donnent la solution de ce problème, nous distinguerons celle de Neumann qui est fondée sur les propriétés des doubles couches.

Considérons une surface S que je supposerai fermée. Supposons d'abord une certaine quantité de matière attirante répandue sur cette surface ; son potentiel

au point x, y, z aura pour expression :

$$W = \int \frac{\mu' d\omega'}{r}$$

où $d\omega'$ est un élément de la surface S ayant pour centre de gravité x', y', z'; où μ' est la densité de la matière attirante de telle sorte que la quantité de matière attirante contenue dans l'élément $d\omega'$ soit égale à $\mu' d\omega'$; enfin r est la distance des points x, y, z et x', y', z'.

C'est ce qu'on appelle le potentiel d'une simple couche.

Ce potentiel W est harmonique dans tout l'espace sauf sur la surface S; quand on franchit S, W est continu, mais ses dérivées ne le sont pas.

Je représenterai par $\frac{dW}{dn}$ la dérivée de W estimée suivant la normale de sorte que

$$\frac{dW}{dn} = \alpha \frac{dW}{dx} + \beta \frac{dW}{dy} + \gamma \frac{dW}{dz},$$

α, β et γ étant les cosinus directeurs de la normale *extérieure* à la surface S.

Je désignerai par V la valeur du potentiel W en un point intérieur à S mais très voisin de S et par V' sa valeur en un point extérieur à S et très voisin de S. La fonction W étant continue, on aura sur S

$$V = V'.$$

De même nous distinguerons la valeur de $\frac{dW}{dn}$ en un point très voisin de x', y', z', et intérieur à S; nous l'appellerons $\frac{dV}{dn}$.

Nous distinguerons, d'autre part, la valeur de $\frac{dW}{dn}$ en un point très voisin de x', y', z' et extérieur à S; nous l'appellerons $\frac{dV'}{dn}$. On a alors :

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV'}{dn} + 4\pi\mu'.$$

Telles sont les propriétés bien connues du potentiel d'une simple couche.

Soit maintenant :

$$W = \int \mu' d\sigma';$$

$d\sigma'$ est l'angle solide sous lequel l'élément $d\omega'$ est vu du point x, y, z, cet angle solide étant regardé comme positif quand l'élément $d\omega'$ est vu par le côté interne. Quant à μ' c'est une certaine fonction de x', y', z' que l'on appelle la densité de la double couche.

On dit alors que W est le potentiel d'une double couche et cette expression est justifiée parce qu'on peut le regarder comme le potentiel dû à deux couches attirantes infiniment rapprochées l'une de l'autre et telle qu'en deux points correspondants de ces deux couches les densités soient égales et de signe contraire et d'ailleurs très grandes.

Nous conserverons aux notations W, W', $\frac{dW}{dn}$, $\frac{dW'}{dn}$ le même sens que plus haut et nous verrons alors que le potentiel W jouit des propriétés suivantes :

1° W est harmonique dans tout l'espace sauf sur la surface S ;

2° On a sur la surface S :

$$W = W' + 4\pi\mu', \qquad \frac{dW}{dn} = \frac{dW'}{dn}.$$

On voit qu'il y a un remarquable contraste entre les propriétés de la simple couche et celles de la double couche, dans un cas c'est W qui est continue, et dans l'autre c'est $\frac{dW}{dn}$.

2. *Méthode de Neumann.* — Soit Φ une fonction donnée en tous les points de la surface S ; soit λ un paramètre auquel je me réserve de donner différentes valeurs.

Proposons-nous de trouver une double couche dont le potentiel W satisfasse à la condition suivante :

$$(1) \qquad W - W' = \lambda(W + W') + 2\Phi;$$

c'est ce que j'appellerai le *problème de Neumann*.

Si dans l'équation (1) on fait $\lambda = -1$; elle se réduit à

$$W = \Phi.$$

A l'intérieur de la surface S, le potentiel W est une fonction harmonique, et la limite de cette fonction, quand on se rapproche de la surface S est la fonction donnée Φ.

Faisons maintenant $\lambda = 1$, l'équation (1) deviendra :

$$W' = -\Phi.$$

A l'extérieur de S, la fonction W est harmonique et sa limite quand on se rapproche de la surface S est la fonction donnée $-\Phi$.

Le problème de Dirichlet, soit pour un domaine intérieur à S, soit pour un domaine extérieur à S n'est donc qu'un cas particulier du problème de Neumann.

Cela posé, on peut résoudre le problème de Neumann par des séries procédant suivant les puissances croissantes de λ. Soit

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots \tag{2}$$

et de même :

$$V = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \ldots,$$

$$V' = V'_0 + \lambda V'_1 + \lambda^2 V'_2 + \ldots.$$

Soit enfin :

$$V + V' = 2U, \qquad V_i + V'_i = 2U_i.$$

En égalant dans l'équation (1) les coefficients des puissances semblables de λ, il viendra :

$$(\text{A}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} V_0 - V'_0 = 2\Phi, \\ V_1 - V'_1 = V_0 + V'_0 = 2U_0, \\ V_2 - V'_2 = V_1 + V'_1 = 2U_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

cela montre que W_0 est le potentiel d'une double couche dont la densité est $\frac{\Phi}{2\pi}$; que W_1 est le potentiel d'une double couche dont la densité est $\frac{U_0}{2\pi}$; que W_2 est le potentiel d'une double couche dont la densité est $\frac{U_1}{2\pi}$, etc.

On peut donc calculer successivement les différents termes de la série (2). Il reste à savoir si cette série est convergente.

Dans le cas où la surface S est convexe, Neumann a démontré cette convergence, ou plutôt il a montré qu'on peut toujours trouver une constante C telle que la série :

$$(W_0 - C) + \lambda(W_1 - C) + \lambda^2(W_2 - C) + \ldots \tag{2'}$$

converge pour toutes les valeurs de λ telles que $|\lambda| \leq 1$.

Soit G_i la plus grande et H_i la plus petite valeur de U_i; il est clair d'abord que :

$$G_i > G_{i+1} > H_{i+1} > H_i. \tag{3}$$

Neumann montre de plus que :

$$G_{i+1} - H_{i+1} < \alpha(G_i - H_i),$$

α étant une constante plus petite que 1 qui ne dépend que de la configuration de la surface S.

Il est aisé d'en conclure que l'on peut déterminer la constante C de façon que la série (2') converge.

La méthode de Neumann est-elle encore applicable quand la surface S n'est pas convexe ?

On pourrait d'abord être tenté de répondre négativement. Les inégalités (3) qui semblent jouer un rôle essentiel ne sont plus vraies en effet quand la surface cesse d'être convexe.

Soit $N + 1$ le maximum du nombre des points d'intersection d'une droite quelconque avec la surface fermée S. Ce nombre N, qui a une certaine importance, est égal à 1 dans le cas d'une surface convexe. Cela posé, nous avons :

$$U_{i+1} = \int \frac{U'_i \, d\sigma'}{2\pi};$$

U_{i+1} est la valeur de la fonction W_{i+1} en un point x, y, z situé sur la surface S elle-même (laquelle valeur, d'après une propriété bien connue de la double couche est moyenne arithmétique entre les limites V_{i+1} et V'_{i+1} vers lesquelles tend W_{i+1} quand on se rapproche du point x, y, z, soit par l'intérieur, soit par l'extérieur).

$d\omega'$ est un élément de la surface S ayant pour centre de gravité x', y', z'; U'_i est la valeur de la fonction U_i au point x', y', z'; enfin $d\sigma'$ est l'angle solide sous lequel $d\omega'$ est vu du point x, y, z.

Soit M_i la plus grande valeur de $|U_i|$, c'est-à-dire la plus grande des deux quantités $|G_i|$ et $|H_i|$; on aura évidemment

$$M_{i+1} < M_i \int \frac{d\sigma'}{2\pi} < NM_i,$$

d'où

(4) $$|G_i| < M_0 N^i; \quad |H_i| < M_0 N^i; \quad |U_i| < M_0 N^i;$$

M_0 étant une constante ; nous nous servirons des inégalités (4) dans la suite ; mais on voit tout de suite qu'elles ne sauraient remplacer les inégalités (3) et on peut être porté à croire que la série (2') ne converge plus.

Contrairement à ces prévisions, *la méthode de Neumann est encore applicable quand même la surface S n'est pas convexe.*

Établir ce point est le but du présent travail.

CHAPITRE I.

Les intégrales J_m.

1. *Définition des intégrales* J_m. — Considérons l'intégrale :

$$J_{ik} = \int \left(\frac{dW_i}{dx} \frac{dW_k}{dx} + \frac{dW_i}{dy} \frac{dW_k}{dy} + \frac{dW_i}{dz} \frac{dW_k}{dz} \right) d\tau,$$

étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ du domaine intérieur à S.

Considérons de même l'intégrale :

$$J'_{i,k} = \int \left(\frac{dW_i}{dx} \frac{dW_k}{dx} + \frac{dW_i}{dy} \frac{dW_k}{dy} + \frac{dW_i}{dz} \frac{dW_k}{dz} \right) d\tau.$$

étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ du domaine extérieur à S.

Il résulte de cette définition que

$$J_{i,k} = J_{k,i}, \qquad J'_{i,k} = J'_{k,i}.$$

D'autre part, le théorème de Green nous apprend que :

$$J_{i,k} = \int V_i \frac{dV_k}{dn} d\omega = \int V_k \frac{dV_i}{dn} d\omega,$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface S. De même :

$$J'_{i,k} = -\int V'_i \frac{dV'_k}{dn} d\omega = -\int V'_i \frac{dV_k}{dn} d\omega = -\int V'_k \frac{dV_i}{dn} d\omega.$$

Reprenons l'équation

$$V_m - V'_m = V_{m-1} + V'_{m-1}$$

qui est l'une des équations (A) du paragraphe précédent.

Multiplions-la par $\frac{dV_p}{dn} d\omega$ et intégrons ; il viendra :

$$J_{m,p} + J'_{m,p} = J_{m-1,p} - J'_{m-1,p}. \tag{1}$$

On aura de même

$$J_{p+1,m-1} + J'_{p+1,m-1} = J_{p,m-1} - J'_{p,m-1},$$

ou en permutant les indices, ce qui est permis,

$$J_{m-1,p+1} + J'_{m-1,p+1} = J_{m-1,p} - J'_{m-1,p}.$$

d'où :

(2) $$J_{m.p} + J'_{m.p} = J_{m-1.p+1} + J'_{m-1.p+1}.$$

D'autre part :

$$J_{m-1.p+1} + J'_{m-1.p+1} = J_{m-2.p+1} - J'_{m-2.p+1},$$

d'où :

$$J_{m-1.p} - J'_{m-1.p} = J_{m-2.p+1} - J'_{m-2.p+1}$$

ou en changeant m en $(m+1)$

(3) $$J_{m.p} - J'_{m.p} = J_{m-1.p+1} - J'_{m-1.p+1}.$$

La comparaison des équations (2) et (3) nous donne :

$$J_{m.p} = J_{m-1.p+1} = J_{m-2.p+2} = \ldots = J_{0.m+p},$$
$$J'_{m.p} = J'_{m-1.p+1} = J'_{m-2.p+2} = \ldots = J'_{0.m+p}.$$

On voit donc que les intégrales J et J′ *ne dépendent que de la somme* des deux indices m et p, ce qui nous permet de simplifier la notation en écrivant :

$$J_{m.p} = J_{m+p}$$

avec un seul indice. Avec cette nouvelle notation, l'équation (1) devient :

(4) $$J_m + J'_m = J_{m-1} - J'_{m-1}.$$

2. *Propriétés des intégrales* J_m. — D'après la définition de l'intégrale $J_{i.k}$, cette intégrale doit être positive quand les deux indices sont égaux puisque la quantité sous le signe $\int$ devient une somme de carrés. Il en est de même pour l'intégrale $J'_{i.k}$.

On a donc :

$$J_{m.m} > 0, \qquad J'_{m.m} > 0$$

ou (avec la nouvelle notation à un seul indice)

$$J_{2m} > 0, \qquad J'_{2m} > 0.$$

Les intégrales d'indice pair sont donc essentiellement positives ; il peut n'en être pas de même des intégrales d'indice impair.

Supposons que dans la série d'équations qui définissent les fonctions W_0, W_1, ... ; on change Φ en $\alpha\Phi + \beta U_{q-1}$, α et β étant deux constantes quelconques ; qu'arrivera-t-il ?

W_0 se changera en $\alpha W_0 + \beta W_q$; V_0 en $\alpha V_0 + \beta V_q$; V'_0 en $\alpha V'_0 + \beta V'_q$; U_0 en $\alpha U_0 + \beta U_q$, etc. et, en général, W_i en $\alpha W_i + \beta W_{i+q}$.

L'intégrale

$$J_{i+k} = \int V_i \frac{dV_k}{dn} d\omega$$

se changera en

$$\int (\alpha V_i + \beta V_{i+q}) \left(\alpha \frac{dV_k}{dn} + \beta \frac{dV_{k+q}}{dn} \right) d\omega,$$

c'est-à-dire en :

$$\alpha^2 J_{i+k} + 2\alpha\beta J_{i+k+q} + \beta^2 J_{i+k+2q}.$$

Si l'indice $i+k$ est pair et égal à $2m$, J_{2m} se changera en :

(1) $$\alpha^2 J_{2m} + 2\alpha\beta J_{2m+q} + \beta^2 J_{2m+2q},$$

de sorte que l'expression (1) devra être positive.

De même, J'_{2m} se changera en

(2) $$\alpha^2 J'_{2m} + 2\alpha\beta J'_{2m+q} + \beta^2 J'_{2m+2q}$$

de sorte que l'expression (2) devra aussi être positive. L'expression (1) étant positive quels que soient α et β, sera une forme quadratique définie positive en α et β.

On aura donc :

(3) $$J_{2m+q}^2 < J_{2m} J_{2m+2q}.$$

De même l'expression (2) étant toujours positive, ainsi que la somme de (1) et de (2) on aura :

$$J'^2_{2m+q} < J'_{2m} J'_{2m+2q},$$

$$(J_{2m+q} + J'_{2m+q})^2 < (J_{2m} + J'_{2m})(J_{2m+2q} + J'_{2m+2q}).$$

En faisant $q = 2$ et remarquant que les J d'indice pair sont positifs, on trouve :

(4) $$\frac{J_{2m+2}}{J_{2m}} < \frac{J_{2m+4}}{J_{2m+2}}, \qquad \frac{J'_{2m+2}}{J'_{2m}} < \frac{J'_{2m+4}}{J'_{2m+2}}.$$

En faisant $q = 1$, on trouve :

(5) $$\frac{J_{2m+1}}{J_{2m}} < \frac{J_{2m+2}}{J_{2m+1}}; \qquad \frac{J'_{2m+1}}{J'_{2m}} < \frac{J'_{2m+2}}{J'_{2m+1}}.$$

Pour aller plus loin, partons de l'inégalité :

$$\alpha^2 J_{2m} + 2\alpha\beta J_{2m+1} + \beta^2 J_{2m+2} > 0.$$

Les deux équations

$$J_{2m+2} + J'_{2m+2} = J_{2m+1} - J'_{2m+1},$$

$$J_{2m} - J'_{2m} = J_{2m+1} + J'_{2m+1}$$

nous donnent :

$$2 J_{2m+1} = (J_{2m} + J_{2m+2}) - (J'_{2m} - J'_{2m+2}).$$

L'inégalité

$$4 J^2_{2m+1} - 4 J_{2m} J_{2m+2} < 0$$

devient alors :

$$(J_{2m} + J_{2m+2})^2 + (J'_{2m} - J'_{2m+2})^2 - 4 J_{2m} J_{2m+2}$$
$$- 2(J_{2m} + J_{2m+2})(J'_{2m} - J'_{2m+2}) < 0.$$

Or :

$$(J_{2m} + J_{2m+2})^2 - 4 J_{2m} J_{2m+2} = (J_{2m} - J_{2m+2})^2 > 0,$$
$$(J'_{2m} - J'_{2m+2})^2 > 0;$$

on a donc *a fortiori* :

$$2(J_{2m} + J_{2m+2})(J'_{2m} - J'_{2m+2}) > 0,$$

et puisque

$$J_{2m} > 0, \qquad J_{2m+2} > 0$$

on en conclut :

$$(6) \qquad J'_{2m} > J'_{2m+2}.$$

De même, on a :

$$4 J'^2_{2m+1} - 4 J'_{2m} J'_{2m+2} < 0,$$
$$2 J'_{2m+1} = -(J'_{2m} + J'_{2m+2}) + (J_{2m} - J_{2m+2}),$$

d'où :

$$(J'_{2m} + J'_{2m+2})^2 + (J_{2m} - J_{2m+2})^2 - 4 J'_{2m} J'_{2m+2}$$
$$- 2(J'_{2m} + J'_{2m+2})(J_{2m} - J_{2m+2}) < 0,$$

d'où *a fortiori*

$$2(J'_{2m} + J'_{2m+2})(J_{2m} - J_{2m+2}) > 0,$$

d'où enfin :

$$(6') \qquad J_{2m} > J_{2m+2}.$$

Nous pouvons donc résumer ces premiers résultats dans les formules suivantes :

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{J_2}{J_0} < \dfrac{J_4}{J_2} < \dfrac{J_6}{J_4} < \ldots < 1, \\[2ex] \dfrac{J'_2}{J'_0} < \dfrac{J'_4}{J'_2} < \dfrac{J'_6}{J'_4} < \ldots < 1, \\[2ex] \dfrac{J_2 + J'_2}{J_0 + J'_0} < \dfrac{J_4 + J'_4}{J_2 + J'_2} < \ldots < 1. \end{cases}$$

D'autre part, la comparaison des formules (5), (6) et (6′) nous donne :

$$(8) \qquad |J_{2m+1}| < J_{2m}, \qquad |J'_{2m+1}| < J'_{2m}.$$

CHAPITRE II.

Étude du rapport $\frac{J}{J'}$.

1. *Énoncé du problème.* — Soit W le potentiel d'une simple ou d'une double couche répandue sur la surface S ; considérons les deux intégrales :

$$J = \int \left(\frac{dW^2}{dx^2} + \frac{dW^2}{dy^2} - \frac{dW^2}{dz^2} \right) d\tau$$

étendue à l'intérieur de S ; et

$$J' = \int \left(\frac{dW^2}{dx^2} + \frac{dW^2}{dy^2} + \frac{dW^2}{dz^2} \right) d\tau$$

étendue à l'extérieur de S,

L'intégrale J' ne peut s'annuler que si W est constant à l'extérieur de S ; et comme W est nul à l'infini, cela ne peut arriver que si W est identiquement nul à l'extérieur de S. Dans le cas de la simple couche, il faut pour cela que W soit identiquement nul ; car on a alors :

$$V = V' = 0$$

et, par conséquent, $W = 0$ à l'intérieur de S. Dans le cas de la double couche, il faut pour cela que la densité de la double couche soit constante, et W constant à l'intérieur de S. Dans l'un et l'autre cas on aura :

$$J = 0.$$

Ainsi J' ne peut s'annuler sans que J s'annule.

D'autre part, l'intégrale J ne peut s'annuler que si W est constant à l'intérieur de S. Cela arrive dans le cas de la double couche si la densité de cette double couche est constante, ce qui entraîne pour conséquences :

$$W = 0 \quad \text{à l'extérieur de S}$$

et

$$J' = 0.$$

Cela arrive, d'autre part, dans le cas de la simple couche, si la densité de cette simple couche est proportionnelle à celle que prendrait une charge électrique

en équilibre sur la surface S regardée comme conductrice. On aura alors en général

$$J' > 0.$$

En résumé, le rapport $\frac{J}{J'}$ est essentiellement positif; dans le cas de la double couche, il ne peut ni s'annuler, ni devenir infini; dans le cas de la simple couche, il peut s'annuler, mais il ne peut pas devenir infini.

Soient maintenant

$$W_1, \quad W_2, \quad \ldots, \quad W_p$$

p potentiels qui seront tous dus, soit à une simple couche, soit à une double couche répandue sur la surface S.

Soit maintenant

$$(1) \qquad W = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \ldots + \alpha_p W_p,$$

les α étant des constantes arbitraires.

J et J' seront alors des polynomes entiers et homogènes du second degré par rapport aux indéterminées α, de telle façon que le rapport $\frac{J}{J'}$ sera une fonction homogène de degré o de ces indéterminées α.

J et J' sont des formes quadratiques par rapport aux α et ces formes sont définies positives. Quand donc on fera varier les α sans changer W_1, $W_2, \ldots, W_p$, le rapport $\frac{J}{J'}$ aura un maximum R_1 et un minimum R_2.

Je suppose bien entendu qu'il n'y a entre les W_i aucune relation linéaire à coefficients constants.

Alors même dans le cas de la simple couche, le maximum R_1 ne peut s'annuler. En effet, pour que R_1 fût nul, il faudrait que J restât nul quels que soient les α, c'est-à-dire que $W_1, W_2, \ldots, W_p$ demeurassent constants à l'intérieur de S. Mais alors le rapport $\frac{W_2}{W_1}$ se réduirait à une constante tant à l'extérieur qu'à l'intérieur de S et cela est impossible puisqu'il ne doit y avoir entre les W_i aucune relation linéaire.

Cela posé, le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant :

Trouver dans le cas de la double couche une limite supérieure et une limite inférieure du rapport $\frac{J}{J'}$.

Trouver dans le cas de la simple couche une limite supérieure de ce rapport.

Trouver dans les deux cas une limite supérieure de R_2 et une limite inférieure de R_1.

Est-il possible de trouver ces limites, les limites supérieures étant bien entendu finies, et les limites inférieures positives et différentes de zéro ?

Les aperçus qui précèdent peuvent rendre la chose vraisemblable, mais non l'établir rigoureusement. La démonstration rigoureuse sera l'objet du présent chapitre.

2. *Comparaison des cas de la simple et de la double couche.* — Soient W_1 et W_2 deux potentiels dus le premier à une simple couche, le second à une double couche.

Je désignerai par V_1, V'_1, J_1, J'_1 et par V_2, V'_2, J_2, J'_2 les valeurs de V, V', J, J' correspondant respectivement à W_1 et à W_2. On aura donc :

$$J_1 = \int V_1 \frac{dV_1}{dn} d\omega, \qquad J'_1 = -\int V'_1 \frac{dV'_1}{dn} d\omega\,;$$

$$J_2 = \int V_2 \frac{dV_2}{dn} d\omega, \qquad J'_1 = -\int V'_2 \frac{dV'_2}{dn} d\omega\,;$$

$$V_1 = V'_1, \qquad \frac{dV_2}{dn} = \frac{dV'_2}{dn}.$$

Je désignerai par K l'intégrale

$$\int \left(\frac{dW_1}{dx}\frac{dW_2}{dx} + \frac{dW_1}{dy}\frac{dW_2}{dy} + \frac{dW_1}{dz}\frac{dW_2}{dz} \right) d\tau$$

étendue à l'intérieur de S et par K' la même intégrale étendue à l'extérieur de S.

On aura donc :

$$K = \int V_1 \frac{dV_2}{dn} d\omega = \int V_2 \frac{dV_1}{dn} d\omega,$$

$$K' = -\int V'_1 \frac{dV'_2}{dn} d\omega = -\int V'_2 \frac{dV'_1}{dn} d\omega$$

et si l'on observe que $V'_1 = V_1$, $\frac{dV'_2}{dn} = \frac{dV_2}{dn}$, on en conclura que [1]

$$K = -K'.$$

[1] Il peut arriver que l'on sache que la fonction W_1 est harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de S et tend uniformément vers une même limite $V_1 = V'_1$ quand on se rapproche de S ; mais qu'on ne sache pas si $\frac{dV_1}{dn}$, $\frac{dV'_1}{dn}$ ont des valeurs finies et déterminées. On ne peut alors affirmer que W_1 soit effectivement le potentiel d'une simple couche. Le théorème n'en est pas moins applicable.

On connaît l'inégalité de Lagrange :

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 < (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2).$$

On en déduit l'inégalité de Schwarz

$$\left[\int \varphi\psi\, d\tau\right]^2 < \int \varphi^2 d\tau \int \psi^2 d\tau.$$

On pourrait en déduire également :

$$\left[\int \sum \frac{dW_1}{dx} \frac{dW_2}{dx} d\tau\right]^2 < \int \sum \left(\frac{dW_1}{dx}\right)^2 d\tau \int \sum \left(\frac{dW_2}{dx}\right)^2 d\tau.$$

En étendant les intégrations à l'intérieur de S, cela peut s'écrire :

(1) $$K^2 < J_1 J_2,$$

et en les étendant à l'extérieur de S

(2) $$K'^2 < J_1' J_2'.$$

Si nous supposons que l'on a $V_2 = V_1$, on aura $W_1 = W_2$ à l'intérieur de S et, par conséquent,

$$J_1 = J_2 = K,$$

d'où :

$$K'^2 = K^2 = J_1^2 = J_2^2 = J_1 J_2.$$

L'inégalité (2) devient alors :

(2') $$\frac{J_1}{J_1'} < \frac{J_2'}{J_2}.$$

Si nous supposons que l'on a $V_2' = V_1'$, on aura $W_1 = W_2$ à l'extérieur de S et, par conséquent,

$$J_1' = J_2' = K',$$

d'où :

$$K^2 = K'^2 = J_1'^2 = J_2'^2 = J_1' J_2'.$$

L'inégalité (1) devient alors

(1') $$\frac{J_1'}{J_1} < \frac{J_2}{J_2'}.$$

Étant donnée une double couche quelconque dont le potentiel est égal à W_2, on peut toujours trouver une simple couche dont le potentiel W_1 soit égal à W_2 à l'intérieur de S (ou bien à l'extérieur de S).

Étant donnée une simple couche dont le potentiel est W_1, on peut trouver une double couche dont le potentiel W_2 soit égal à W_1 à l'intérieur de S.

On ne peut pas en général trouver une double couche dont le potentiel W_2 soit égal à W_1 à l'extérieur de S; mais on peut en trouver une telle que l'on ait en tout point infiniment voisin de S mais extérieur à S :

$$W_2 = W_1 + \text{const.},$$

c'est-à-dire

$$V'_2 = V'_1 + \text{const.}$$

Après avoir énoncé ces propositions, voyons dans quelle mesure elles peuvent être regardées comme démontrées.

La première peut être rigoureusement démontrée. La méthode de Schwarz, la méthode du balayage, et en général les méthodes autres que celle de Neumann, permettent de démontrer le principe de Dirichlet pour une surface quelconque, convexe ou non convexe.

Il existera donc une fonction W_3, harmonique à l'extérieur de S et se réduisant à V_2 sur la surface S (ce qui s'écrit $V'_3 = V_2$).

Définissons alors W_1 de la manière suivante :

$$W_1 = W_2 \quad \text{à l'intérieur de S,}$$
$$W_1 = W_3 \quad \text{à l'extérieur de S.}$$

On aura alors

$$V_1 = V_2, \qquad V'_1 = V'_3 = V_2, \qquad \text{d'où} \qquad V_1 = V'_1.$$

W_1 est donc bien le potentiel d'une simple couche et se réduit à W_2 à l'intérieur de S.

On démontrerait de même qu'on peut trouver une simple couche telle que $W_1 = W_2$ à l'extérieur de S.

Passons au second problème, où l'on se donne W_1 et où l'on se propose de déterminer la double couche qui engendre W_2 de telle façon que $W_2 = W_1$ à l'intérieur de S ou que $V'_2 = V'_1 + \text{const.}$

Les deux propositions relatives à ce problème ne peuvent être regardées comme démontrées que dans le cas où la méthode de Neumann est applicable, c'est-à-dire, jusqu'à nouvel ordre, pour les surfaces convexes seulement.

Soient M_1 et m_1 la limite supérieure et la limite inférieure du rapport $\frac{J_1}{J'_1}$; soient M'_1 et m'_1 la limite supérieure et la limite inférieure du rapport $\frac{J_2}{J'_2}$.

Supposons maintenant que nous considérions p simples couches ayant respectivement pour potentiels

$$W_1^1, \quad W_2^1, \quad \ldots, \quad W_p^1$$

et soit, comme dans le paragraphe précédent

$$W_1 = \alpha_1 W_1^1 + \alpha_2 W_2^1 + \ldots + \alpha_p W_p^1,$$

les α étant des constantes indéterminées.

Le rapport $\frac{J_1}{J_1'}$ quand nous ferons varier les α sans toucher aux W_i^1, aura un maximum R_1 et un minimum R_2. (J'observe en passant que R_1 et R_2 ne changeront pas quand on remplacera les W_i^1 par p combinaisons linéaires quelconques des W_i^1).

Nous pouvons maintenant faire varier la densité des p simples couches qui engendrent les potentiels W_i^1 ; on voit alors que R_1 aura une limite inférieure m_p et R_2 une limite supérieure M_p.

Considérons de même p doubles couches ayant pour potentiels

$$W_1^2, \quad W_2^2, \quad \ldots, \quad W_p^2$$

et soit :

$$W_2 = \alpha_1 W_1^2 + \alpha_2 W_2^2 + \ldots + \alpha_p W_p^2.$$

Le rapport $\frac{J_2}{J_2'}$ quand on fera varier les α aura un maximum R_1' et un minimum R_2'. Si on fait ensuite varier la densité des p doubles couches, R_1' aura une limite inférieure m_p' et R_2' une limite supérieure M_p'.

Les nombres m_p, M_p, m_p', M_p' dépendent évidemment du nombre p, et il est clair qu'ils ne dépendent que de ce nombre p et de la surface S.

On aura d'ailleurs :

$$m_1 = 0, \qquad m_1 < m_2 < m_3 < \ldots,$$
$$M_1 > M_2 > M_3 > \ldots.$$

On voit aisément que $m_1 = 0$. Dans le cas de $p = 1$, on a en effet simplement

$$W_1 = \alpha_1 W_1^1.$$

Pour que $R_1 = R_2$ atteigne sa limite inférieure, il suffit de donner à la simple couche qui engendre W_1^1 une densité proportionnelle à celle que prendrait l'électricité en équilibre sur la surface S supposée conductrice.

On aurait alors $W_1^1 =$ const. à l'intérieur de S et, par conséquent,

$$J_1 = 0, \qquad J'_1 > 0$$

et enfin

$$\frac{J_1}{J'_1} = R_1 = R_2 = 0,$$

d'où

$$m_1 = 0.$$

On trouverait des inégalités analogues dans le cas de la double couche, à savoir :

$$m'_1 < m'_2 < m'_3 < \ldots,$$
$$M'_1 > M'_2 > M'_3 > \ldots.$$

Mais avant d'aller plus loin une remarque est nécessaire au sujet de la définition des nombres m'_p et M'_p. Supposons que W_2 soit un potentiel engendré par une double couche de densité constante ; W_2 sera constant à l'intérieur de S et nul à l'extérieur de S. On aura donc

$$J_2 = J'_2 = 0$$

de sorte que le rapport $\frac{J_2}{J'_2}$ se présente dans ce cas sous une forme indéterminée. Soit maintenant de nouveau :

$$W_2 = \alpha_1 W_1^2 + \alpha_2 W_2^2 + \ldots + \alpha_p W_p^2$$

et supposons que W_1^2 soit engendré par une double couche de densité constante. On aura alors tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de S

$$\frac{dW_1^2}{dx} = \frac{dW_1^2}{dy} = \frac{dW_1^2}{dz} = 0,$$

ce qui prouve que ni les dérivées de W_2 par rapport à x, y, z, ni par conséquent J_2 et J'_2 ne peuvent dépendre de α_1.

Il résulte de là que les valeurs de R'_1 et de R'_2 correspondant aux p potentiels

$$W_1^2, \quad W_2^2, \quad \ldots, \quad W_p^2$$

ne diffèrent pas des valeurs de R'_1 et de R'_2 correspondant aux $p - 1$ potentiels

$$W_2^2, \quad W_3^2, \quad \ldots, \quad W_p^2.$$

Soit encore

$$W_2 = \alpha_1 W_1^2 + \alpha_2 W_2^2 + \ldots + \alpha_p W_p^2$$

mais ne supposons plus que W_1^2 soit engendré par une double couche de

densité constante. Désignons, d'autre part, par W_0^2 un potentiel engendré par une double couche de densité constante.

Choisissons

$$W_1^2, \quad W_2^2, \quad \dots, \quad W_p^2$$

de telle façon que R_1' atteigne sa limite inférieure m_p' ; je dis qu'on peut toujours supposer

$$W_1^2 = W_0^2.$$

En effet s'il n'en était pas ainsi, nous pourrions observer que le R_1' relatif aux p potentiels

$$W_1^2, \quad W_2^2, \quad \dots, \quad W_p^2$$

ne peut être plus petit que le R_1' relatif aux $p-1$ potentiels

$$W_2^2, \quad \dots, \quad W_p^2$$

lequel est égal au R_1' relatif aux p potentiels

$$W_0^2, \quad W_2^2, \quad \dots, \quad W_p^2.$$

En remplaçant W_1^2 par W_0^2 on n'a donc pu augmenter R_1' qui est resté égal à sa limite inférieure m_p'.

De même, si nous choisissons les W_i^2 de telle façon que R_2' atteigne sa limite supérieure M_p', nous pourrons toujours supposer que ce choix a été fait de telle façon que

$$W_1^2 = W_0^2,$$

car on pourrait toujours remplacer W_1^2 par W_0^2 sans que R_2' cesse d'être égal à sa limite supérieure.

Ce raisonnement suppose, il est vrai, qu'il n'y a pas de relation linéaire entre

$$W_0^2, \quad W_2^2, \quad \dots, \quad W_p^2,$$

mais s'il y en avait une, on remplacerait W_2^2 par W_1^2, par exemple et il ne saurait alors y avoir de relation linéaire entre

$$W_0^2, \quad W_1^2, \quad W_3^2, \quad W_4^2, \quad \dots, \quad W_p^2$$

puisqu'il n'y en a pas par hypothèse entre

$$W_1^2, \quad W_2^2, \quad \dots, \quad W_p^2.$$

Il résulte encore de là que

$$m_2' < \frac{J_2}{J_2'} < M_2'.$$

Prenons d'abord p simples couches ayant pour potentiels

(3) $$W_1^1, \quad W_2^1, \quad \ldots . \quad W_p^1$$

et p doubles couches ayant pour potentiels

(4) $$W_1^2, \quad W_2^2, \quad \ldots, \quad W_p^2$$

et soit

$$W_1 = \alpha_1 W_1^1 + \ldots + \alpha_p W_p^1,$$

$$W_2 = \alpha_1 W_1^2 + \ldots + \alpha_p W_p^2.$$

Formons les rapports $\frac{J_1}{J_1'}$, $\frac{J_2}{J_2'}$, leurs maxima R_1 et R_1' et leurs minima R_2 et R_2'.

Cela posé, choisissons d'abord les W_i^2 de telle façon que R_2' atteigne sa limite supérieure M_p' ; nous pourrons alors supposer

$$W_1^2 = W_0^2,$$

ce qui montre qu'on aura

$$W_1^2 = \text{const.}$$

à l'intérieur de S. Nous pourrons ensuite trouver p simples couches dont les potentiels W_i^1 satisfassent *à l'intérieur de* S à la condition

$$W_i^1 = W_i^2.$$

Cela nous montre en passant que la simple couche qui engendre W_1^1 a sa densité proportionnelle à celle de l'électricité en équilibre.

Il viendra alors :

$$\frac{J_1}{J_1'} < \frac{J_2'}{J_2},$$

d'où :

$$R_1 < \frac{1}{R_2'};$$

or

$$R_2' = M_p', \qquad m_p < R_1,$$

d'où :

(6) $$m_p < \frac{1}{M_p'}.$$

Choisissons maintenant les W_i^1 de telle façon que R_2 atteigne sa limite supérieure M_p. On pourra *au moins si* S *est convexe* trouver p doubles couches telles qu'à l'intérieur de S on ait

$$W_i^2 = W_i^1.$$

On aura encore :

$$\frac{J_1}{J'_1} < \frac{J'_2}{J_2},$$

d'où :

$$R_2 < \frac{1}{R'_1}.$$

Or

$$R_1 = M_p, \qquad R'_1 > m'_p,$$

d'où :

$$(7) \qquad M_p < \frac{1}{m'_p}.$$

Choisissons maintenant les W_i^2 de telle façon que R'_1 atteigne sa limite m'_p; nous pourrons trouver p simples couches telles que l'on ait *à l'extérieur de* S

$$W_i^1 = W_i^2.$$

On aura alors :

$$\frac{J_1}{J'_1} > \frac{J'_2}{J_2},$$

d'où :

$$R_2 > \frac{1}{R'_1};$$

or

$$R'_1 = m'_p \qquad R_2 < M_p,$$

d'où :

$$(8) \qquad m'_p > \frac{1}{M_p}.$$

Si la surface S est convexe, les relations (6), (7), (8), sont vraies à la fois et on en conclut :

$$M_p = \frac{1}{m'_p}.$$

Si la surface S n'est pas convexe, les relations (6) et (8) sont encore vraies, mais les relations (7) ne peuvent être regardées comme démontrées ; on a alors

$$M'_p \leqq \frac{1}{m_p}, \qquad m'_p \geqq \frac{1}{M_p}.$$

3. *Cas de la sphère.* — On peut très facilement calculer toutes ces quantités quand la surface S est une sphère. Nous supposerons pour simplifier l'écriture que le rayon de cette sphère a été pris pour l'unité de longueur, le centre de la sphère pour origine et nous poserons :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

Un polynome sphérique d'ordre n

$$\mathrm{H}_p = \mathrm{X}_p r^n$$

est un polynome homogène d'ordre n en x, y, z, qui satisfait à l'équation de Laplace et X_p qui est une fonction homogène d'ordre zéro en x, y, z, s'appellera une fonction sphérique d'ordre n.

Parmi les fonctions sphériques d'ordre n, j'en choisirai $2n+1$ que j'appellerai fondamentales et que je désignerai par

$$\mathrm{X}_p, \qquad [p = n^2+1, n^2+2, \ldots, (n+1)^2].$$

Toutes les autres fonctions sphériques d'ordre n en seront des combinaisons linéaires.

Je choisirai les fonctions fondamentales de telle façon que

$$\int \mathrm{X}_p^2 \, d\omega = 1, \qquad \int \mathrm{X}_p \mathrm{X}_q \, d\omega = 0 \qquad (p \gtrless q).$$

Les intégrales sont étendues à la surface de la sphère.

Cela posé, considérons une simple couche et choisissons-la de telle sorte qu'à l'intérieur de S on ait :

$$\mathrm{W}_1 = \Sigma \beta_p \mathrm{X}_p r^n \qquad (n \text{ étant l'ordre de } \mathrm{X}_p).$$

On aura alors à l'extérieur de S

$$\mathrm{W}_1 = \Sigma \beta_p \mathrm{X}_p r^{-(n+1)}$$

et, par conséquent :

$$\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}'_1 = \Sigma \beta_p \mathrm{X}_p, \qquad \frac{d\mathrm{V}_1}{dn} = \Sigma n \beta_p \mathrm{X}_p, \qquad \frac{d\mathrm{V}'_1}{dn} = -\Sigma (n+1) \beta_p \mathrm{X}_p.$$

On en déduit :

$$\mathrm{J}_1 = \Sigma n \beta_p^2, \qquad \mathrm{J}'_1 = \Sigma (n+1) \beta_p^2.$$

Cela nous montre d'abord que J_1 est toujours plus petit que J'_1 ; et on voit tout de suite que :

$$m_1 = 0, \qquad m_2 = m_3 = m_4 = \frac{1}{2}, \qquad m_5 = m_6 = \ldots = m_9 = \frac{2}{3}, \qquad \ldots$$

et en général :

$$m_p = \frac{n}{n+1} \qquad [\text{où } n^2 < p \leq (n+1)^2].$$

D'autre part, on a :

$$\mathrm{M}_p = 1.$$

Pour nous en rendre compte, supposons que les β_p soient des fonctions linéaires de q constantes arbitraires

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_q,$$

J_1 et J'_1 seront des polynomes du second degré par rapport aux α. Le rapport $\frac{J_1}{J'_1}$ considéré comme fonction des α aura un maximum R_1 et un minimum R_2.

Il est clair que R_1 atteindra sa limite inférieure m_q quand on fera

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \beta_q = \alpha_q, \quad \beta_p = 0 \quad (p > q).$$

Quant à R_2, il peut approcher autant qu'on veut de 1. Soit, en effet, pour un entier k quelconque

$$\beta_p = 0 \quad (p \leqq k); \qquad \beta_p = 0 \quad (p > k + q),$$
$$\beta_{k+h} = \alpha_h \quad (h = 1, 2, \ldots, q).$$

Le minimum R_2 est égal à

$$\frac{n}{n+1} \qquad [n^2 < k + 1 \leqq (n+1)^2];$$

on peut donc prendre k assez grand pour que ce minimum soit aussi voisin que l'on veut de 1.

Considérons maintenant une double couche telle qu'à l'intérieur de S on ait :

$$W_2 = \Sigma \beta_p X_p r^n.$$

On aura :

$$V_2 = \Sigma \beta_p X_p, \qquad \frac{dV_2}{dn} = \frac{dV'_2}{dn} = \Sigma n \beta_p X_p,$$

d'où : à l'extérieur de S

$$W_2 = -\sum \frac{n}{n+1} \beta_p X_p r^{-(n+1)}$$

et

$$V'_2 = -\sum \frac{n}{n+1} \beta_p X_p.$$

On en déduit :

$$J_2 = \Sigma n \beta_p^2, \qquad J'_2 = \sum \frac{n^2}{n+1} \beta_p^2.$$

On en déduit :

$$M'_p = \frac{1}{m_p} = \frac{n+1}{n} \qquad [\text{où } n^2 < p \leqq (n+1)^2],$$

$$m'_p = 1$$

Ceci entraîne les inégalités suivantes les plus importantes à notre point de vue :

$$2 > \frac{J_2}{J'_2} > 1.$$

4. *Surfaces simplement connexes.* — Nous allons maintenant examiner le cas où la surface S est une surface simplement connexe quelconque sans point singulier.

On peut alors trouver une transformation qui jouisse des propriétés suivantes :

Soit M le point donné de coordonnées x, y, z ; soit M' son transformé de coordonnées x', y', z'.

1° A tout point M de l'espace correspondra un point M' et un seul, et inversement.

2° Les coordonnées x', y', z' de M' seront des fonctions continues de x, y, z ; ces fonctions auront des dérivées des deux premiers ordres et ses dérivées seront finies et continues.

3° Inversement x, y, z seront des fonctions continues de x', y', z' et les dérivées des deux premiers ordres de ces fonctions seront également finies et continues.

4° Quand le point M décrira la surface S, le point M' décrira la sphère S' qui a pour équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

5° Lorsque x, y, z sont très grands, $\frac{1}{x'}$, $\frac{1}{y'}$, $\frac{1}{z'}$ sont des fonctions continues de $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$; ces fonctions ont des dérivées des deux premiers ordres, qui restent finies et continues, même quand une ou plusieurs des trois quantités $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ s'annule. Enfin quand $x^2 + y^2 + z^2$ croît indéfiniment, $\frac{1}{x'}$, $\frac{1}{y'}$, $\frac{1}{z'}$ ainsi que les dérivées des deux premiers ordres de x', y', z' par rapport à x, y, z tendent *uniformément* vers zéro, excepté $\frac{dx'}{dx}$, $\frac{dy'}{dy}$, $\frac{dz'}{dz}$ qui tendent uniformément vers un.

En d'autres termes, si $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est un infiniment grand du premier ordre, x', y', z' seront égaux à x, y, z aux infiniment petits près du second ordre.

Il est clair qu'on pourra toujours satisfaire à ces différentes conditions et cela d'une infinité de manières ; le choix de la transformation comportera encore un très large degré d'arbitraire.

Soit maintenant p simples couches répandues à la surface de S et ayant respectivement pour potentiels :

$$W_1^1, \quad \ldots, \quad W_p^1.$$

Soit

$$W_1 = \alpha_0 W_0^1 + \alpha_1 W_1^1 + \ldots + \alpha_p W_p^1$$

et formons le rapport $\frac{J_1}{J'_1}$.

Nous aurons

$$J_1 = \int \sum \left(\frac{dW_1}{dx}\right)^2 dx\, dy\, dz,$$

l'intégrale étant étendue à l'intérieur de S et J'_1 étant égal à la même intégrale étendue à l'extérieur de S.

Mais les intégrales J_1 (et J'_1) qui sont ici exprimées en fonctions de x, y et z, peuvent également s'exprimer en fonctions de x', y' et z'.

Les dérivées $\frac{dW_1}{dx}$, $\frac{dW_1}{dy}$, $\frac{dW_1}{dz}$ sont en effet des fonctions linéaires des dérivées $\frac{dW_1}{dx'}$, $\frac{dW_1}{dy'}$, $\frac{dW_1}{dz'}$ dont les coefficients sont des fonctions données de x', y', z', puisque nous connaissons x, y, z en fonctions de x', y', z'. De même le jacobien de x, y, z par rapport à x', y', z' sera une fonction connue de x', y', z'.

Nous pouvons donc écrire :

$$J_1 = \int \Phi\, dx'\, dy'\, dz',$$

Φ étant un polynome homogène du second degré par rapport à

$$\frac{dW_1}{dx'}, \quad \frac{dW_1}{dy'}, \quad \frac{dW_1}{dz'}$$

dont les coefficients sont des fonctions données de x', y', z'.

L'intégrale J_1 doit être étendue à l'intérieur de la sphère S'. Quant à J'_1, ce serait la même intégrale étendue à l'extérieur de S'.

Le polynome du second degré Φ est évidemment une forme quadratique définie positive dont les coefficients sont des fonctions continues de x', y' et z'.

Quand x, y, z (ou ce qui revient au même x', y', z') croissent indéfiniment, les coefficients de cette forme Φ tendent vers des limites finies et déterminées :

les coefficients des termes rectangles tendent uniformément vers zéro et ceux des termes carrés tendent uniformément vers un. Cela tient à ce que les dérivées des x par rapport aux x' tendent vers zéro et vers un.

Si nous regardons pour un instant x', y', z' comme des paramètres et $\frac{dW_1}{dx'}$, $\frac{dW_1}{dy'}$, $\frac{dW_1}{dz'}$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace, l'équation

$$\Phi = 1$$

représente un ellipsoïde. Les axes de cette ellipsoïde sont des fonctions continues de x', y', z'; pour aucune valeur finie de x', y', z' il ne peut arriver que l'un des axes s'annule ou devienne infini; quand x', y', z' croissent indéfiniment, les trois axes tendent uniformément vers un.

Il résulte de là que l'on peut assigner une limite supérieure et une limite inférieure (indépendantes de x', y', z') à ces trois axes et, par conséquent, que l'on peut trouver deux nombres μ et μ', tels que l'on ait pour toutes les valeurs de x', y', z', et quels que soient $\frac{dW_1}{dx'}$, $\frac{dW_1}{dy'}$, $\frac{dW_1}{dz'}$:

$$(1) \qquad \mu' \sum \left(\frac{dW_1}{dx'}\right)^2 < \Phi < \mu \sum \left(\frac{dW_1}{dx'}\right)^2.$$

Soit maintenant W_3 le potentiel d'une simple couche répandue à la surface de la sphère S'.

Ce potentiel W_3 est une fonction de x', y', z', qui tant à l'extérieur qu'à l'intérieur de S' satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 W_3}{dx'^2} + \frac{d^2 W_3}{dy'^2} + \frac{d^2 W_3}{dz'^2} = 0.$$

On peut évidemment choisir la densité de cette simple couche de telle façon qu'à la surface de S' on ait

$$W_3 = W_1$$

et en effet on sait résoudre le problème de Dirichlet en ce qui concerne la sphère.

Formons l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{dW_3}{dx'}\right)^2 dx'\,dy'\,dz'.$$

Cette intégrale étendue à l'intérieur de S' s'appellera J_3; étendue à l'extérieur de S', elle s'appellera J'_3.

Considérons également l'intégrale

$$(2) \qquad \int \sum \left(\frac{dW_3}{dx}\right)^2 dx\,dy\,dz$$

qu'on calculerait en supposant que W_3 est exprimée en fonction de x, y, z, au lieu de l'être en fonction de x', y', z'. Cette intégrale est égale à

$$(3) \qquad \int \Phi_3\,dx'\,dy'\,dz'$$

où Φ_3 n'est autre chose que Φ où je suppose que W_1 ait été remplacé par W_3.

L'intégrale (2) étendue à l'intérieur de S [ou ce qui revient au même l'intégrale (3) étendue à l'intérieur de S'] s'appellera K_3; étendue à l'extérieur de S, elle s'appellera K'_3.

De même, j'appellerai K_1 et K'_1 l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{dW_1}{dx'}\right)^2 dx'\,dy'\,dz'$$

étendue soit à l'intérieur de S', soit à l'extérieur de S'.

Comme on a

$$\Delta W_1 = \sum \frac{d^2 W_1}{dx^2} = 0$$

et qu'on n'a pas :

$$\sum \frac{d^2 W_3}{dx^2} = 0,$$

comme $W_1 = W_3$ à la surface de S on aura

$$\int \sum \left(\frac{dW_1}{dx}\right)^2 dx\,dy\,dz < \int \sum \left(\frac{dW_3}{dx}\right)^2 dx\,dy\,dz$$

ou

$$J_1 < K_3;$$

on trouverait de même

$$J'_1 < K'_3.$$

D'autre part, W_3 satisfait à l'équation

$$\sum \frac{d^2 W_3}{dx'^2} = 0$$

tandis que W_1 ne satisfait pas à

$$\sum \frac{d^2 W_1}{dx'^2} = 0.$$

Comme, d'autre part, $W_1 = W_3$ à la surface de S', on aura

$$\int \sum \left(\frac{dW_3}{dx'}\right)^2 dx'dy'dz' < \int \sum \left(\frac{dW_1}{dx'}\right)^2 dx'dy'dz'$$

ou

$$J_3 < K_1.$$

De même,

$$J'_3 < K'_1.$$

D'autre part, les inégalités (1) nous donnent :

$$\begin{aligned}
\mu' K_1 &> J_1 > \mu K_1, \\
\mu' K'_1 &> J'_1 > \mu K'_1, \\
\mu' J_3 &> K_3 > \mu J_3, \\
\mu' J'_3 &> K'_3 > \mu J'_3.
\end{aligned}$$

La comparaison de ces inégalités nous donne :

$$\begin{aligned}
J_1 &> \mu K_1 > \mu J_3, \\
J_1 &< K_3 < \mu' J_3, \\
J'_1 &> \mu K'_1 > \mu J'_3, \\
J'_1 &< K'_3 < \mu' J'_3,
\end{aligned}$$

d'où, enfin,

$$\frac{\mu}{\mu'} \frac{J_3}{J'_3} < \frac{J_1}{J'_1} < \frac{\mu'}{\mu} \frac{J_3}{J'_3}.$$

Supposons maintenant que l'on fasse varier les α sans toucher aux p potentiels $W_1^1, W_2^1, \ldots, W_p^1$.

Alors le rapport $\frac{J_1}{J'_1}$ a un certain maximum que nous avons appelé R_1 et un certain minimum que nous avons appelé R_2. De même, le rapport $\frac{J_3}{J'_3}$ aura un certain maximum r_1 et un minimum r_2.

Si une quantité est toujours plus grande qu'une autre, le maximum de la première sera plus grand que le minimum de la seconde et le minimum de la première plus grand que le minimum de la seconde. On aura donc :

$$\frac{\mu}{\mu'} r_1 < R_1 < \frac{\mu'}{\mu} r_1,$$

$$\frac{\mu}{\mu'} r_2 < R_2 < \frac{\mu'}{\mu} r_2.$$

Faisons varier maintenant les potentiels W_i^1, R_1 aura une limite inférieure m_p et R_2 une limite supérieure M_p. J'appellerai de même m_p^* et M_p^* la limite

inférieure de r_1 et la limite supérieure de r_2. En appliquant le même principe, j'arriverai aux inégalités :

$$\frac{\mu}{\mu'} m_p^* < m_p < \frac{\mu'}{\mu} m_p^*,$$

$$\frac{\mu}{\mu'} \mathrm{M}_p^* < \mathrm{M}_p < \frac{\mu'}{\mu} \mathrm{M}_p^*.$$

Mais nous savons calculer les nombres m_p^* et M_p^* pour la sphère. Nous avons trouvé dans le numéro précédent :

$$m_p^* = \frac{n}{n+1} \qquad [\text{où } n^2 < p \leqq (n+1)^2],$$

$$\mathrm{M}_p^* = 1.$$

On a donc :

$$\frac{\mu}{\mu'} \frac{n}{n+1} < m_p < \frac{\mu'}{\mu} \frac{n}{n+1},$$

$$\frac{\mu}{\mu'} < \mathrm{M}_p < \frac{\mu'}{\mu}.$$

Soient maintenant p doubles couches ayant pour potentiels

$$\mathrm{W}_1^2, \quad \ldots, \quad \mathrm{W}_p^2$$

et posons :

$$\mathrm{W}_2 = \alpha_1 \mathrm{W}_1^2 + \ldots + \alpha_p \mathrm{W}_p^2$$

et formons le rapport $\frac{\mathrm{J}_2}{\mathrm{J}'_2}$; ce rapport, quand on fera varier les α, aura un maximum R'_1 et un minimum R'_2. R'_1, quand on fera varier les potentiels, aura une limite inférieure m'_p et R'_2 aura une limite supérieure M'_p.

Nous avons trouvé à la fin du paragraphe 2 :

$$\mathrm{M}'_p \leqq \frac{1}{m_p}, \qquad m'_p \geqq \frac{1}{\mathrm{M}_p}.$$

Il résulte de là

$$\mathrm{M}'_p < \frac{\mu'}{\mu} \frac{n+1}{n}, \qquad m'_p > \frac{\mu}{\mu'}.$$

Or on a toujours comme je l'ai expliqué

$$\mathrm{M}'_2 > \frac{\mathrm{J}_2}{\mathrm{J}'_2} > m'_2,$$

d'où finalement

$$\frac{2\mu'}{\mu} > \frac{\mathrm{J}_2}{\mathrm{J}'_2} > \frac{\mu}{\mu'}.$$

5. *Couches de masse nulle.* — Supposons que W_1 soit un potentiel dû à une simple couche dont la masse totale est nulle, et formons le rapport $\frac{J_1}{J'_1}$; je dis que nous aurons :

$$\frac{J_1}{J'_1} \quad m_2.$$

Soit, en effet, W_0 un potentiel dû à une simple couche dont la densité soit proportionnelle à celle que prendrait l'électricité en équilibre sur la surface S supposée conductrice. On aura, par conséquent,

$$W_0 = \text{const.} \quad \text{à l'intérieur de S}; \qquad J_0 = 0.$$

Soit maintenant

$$W = \alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1,$$

α_0 et α_1 étant deux indéterminées et formons les intégrales J et J′ relatives au potentiel W, intégrales qui ont pour expressions

$$\int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau.$$

Considérons également l'intégrale

$$\int \sum \frac{dW_1}{dx} \frac{dW_2}{dx} d\tau.$$

que nous appellerons K quand elle sera étendue à l'intérieur de S et K′ quand elle sera étendue à l'extérieur de S.

On aura :

$$J = \alpha_0^2 J_0 + 2\alpha_0\alpha_1 K + \alpha_1^2 J_1,$$

$$J' = \alpha_0^2 J'_0 + 2\alpha_0\alpha_1 K' + \alpha_1^2 J'_1,$$

$$K = \int V_0 \frac{dV_1}{dn} d\omega, \qquad K' = -\int V'_0 \frac{dV'_1}{dn} d\omega.$$

Les deux intégrales K et K′ sont étendues à tous les éléments $d\omega$ de la surface S; sur cette surface

$$V_0 = V'_0 = \text{const.}$$

La masse totale de la simple couche étant nulle, on aura

$$\int \frac{dV_1}{dn} d\omega = \int \frac{dV'_1}{dn} d\omega = 0.$$

On en déduit

$$K = K' = 0,$$

d'où

$$J = \alpha_1^2 J_1, \qquad J' = \alpha_0^2 J'_0 + \alpha_1^2 J'_1,$$

$$\frac{J}{J'} = \frac{\alpha_1^2 J_1}{\alpha_0^2 J'_0 + \alpha_1^2 J'_1}.$$

Le maximum R_1 de $\frac{J}{J'}$ sera donc égal à $\frac{J_1}{J'_1}$ et comme la limite inférieure de R_1 est m_2, on aura :

$$\frac{J_1}{J'_1} > m_2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Pour démontrer ce résultat, on est obligé de s'appuyer sur l'existence de la fonction W_0, c'est-à-dire sur la possibilité de résoudre le problème de la distribution électrique, c'est-à-dire en définitive sur le principe de Dirichlet, supposé démontré par des méthodes indépendantes de celle de Neumann.

Nous pouvons cependant, sans nous appuyer sur ce principe, trouver une limite inférieure du rapport $\frac{J_1}{J'_1}$.

Reprenons la transformation du paragraphe 3; nous aurons

$$J_1 = \int \Phi \, dx' \, dy' \, dz',$$

l'intégrale étant étendue à l'intérieur de la sphère S. Désignons maintenant par K_1 et K'_1, l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{dW_1}{dx'}\right)^2 dx' \, dy' \, dz'$$

étendue soit à l'intérieur de S', soit à l'extérieur de S'. Nous aurons encore :

$$\mu' K_1 < J_1 < \mu K_1,$$
$$\mu' K'_1 < J'_1 < \mu K'_1.$$

Remplaçons W_1 par une fonction quelconque W_3, soit Φ_3 ce que devient Φ par cette substitution.

Considérons les intégrales

$$\int \sum \left(\frac{dW_3}{dx'}\right)^2 dx' \, dy' \, dz', \qquad \int \Phi_3 \, dx' \, dy' \, dz'$$

que nous appellerons J_3 et K_3 quand on les étend à l'intérieur de S', J'_3, et K'_3 quand on les étend à l'extérieur de S'.

Nous aurons encore :

$$\mu' J_3 < K_3 < \mu J_3,$$
$$\mu' J'_3 < K'_3 < \mu J'_3.$$

Je vais maintenant choisir W_3; ce sera le potentiel d'une simple couche de masse totale nulle répandue à la surface de la sphère S'; à la surface de cette sphère, ce potentiel devra satisfaire à la condition

$$W_3 = W_1 + C,$$

C étant une constante.

Comme on sait résoudre, à l'aide des fonctions sphériques, le problème de Dirichlet pour la sphère, on pourra déterminer la fonction W_3 de façon à satisfaire à ces conditions.

Je vais chercher à démontrer que

$$J'_1 < K'_3, \qquad J_3 < K_1.$$

Posons

$$W_3 = W_1 + R.$$

Il viendra :

$$(1) \qquad K'_3 - J'_1 = 2\int \sum \frac{dR}{dx}\frac{dW_1}{dx}\,d\tau + \int \sum \left(\frac{dR}{dx}\right)^2 d\tau.$$

Les intégrales sont étendues à l'extérieur de S.

La fonction W_1 étant harmonique à l'extérieur de S, le théorème de Green nous donne :

$$(2) \qquad \int \sum \frac{dR}{dx}\frac{dW_1}{dx}\,d\tau = -\int R\frac{dW_1}{dn}\,d\omega;$$

R étant constant à la surface de S, le second membre de (2) se réduit à

$$-R\int \frac{dW_1}{dn}\,d\omega$$

ou à zéro puisque la masse totale de la couche qui engendre W_1 est nulle.

On a donc :

$$K'_3 - J'_1 = \int \sum \left(\frac{dR}{dx}\right)^2 d\tau > 0.$$

C. Q. F. D.

D'autre part, il vient :

$$K_1 - J_3 = -2\int \sum \frac{dR}{dx'}\frac{dW_3}{dx'}\,dx'\,dy'\,dz' + \int \sum \left(\frac{dR}{dx'}\right)^2 dx'\,dy'\,dz',$$

les intégrales étant étendues à l'intérieur de S'. On trouve ensuite :

$$\int \sum \frac{dR}{dx'}\frac{dW_3}{dx'}\,dx'\,dy'\,dz' = 0,$$

puisque R se réduit à une constante à la surface de S' et que la simple couche

qui engendre W_3 a sa masse totale nulle. La démonstration est d'ailleurs la même que plus haut.

On en conclut :

$$K_1 - J_3 = \int \sum \left(\frac{dR}{dx'}\right)^2 dx'\,dy'\,dz' > 0.$$

C. Q. F. D.

D'ailleurs, d'après le paragraphe I, relatif à la sphère, comme la masse totale qui engendre W_3 est nulle on a :

$$\frac{J_3}{J'_3} > \frac{1}{2},$$

d'où, enfin,

$$J'_1 < K'_3 < \mu' J'_3 < 2\mu' J_3 < 2\mu' K_1 < \frac{2\mu'}{\mu} J_1.$$

On voit donc sans avoir à s'appuyer sur le principe de Dirichlet que $\frac{J_1}{J'_1}$ a une limite inférieure $\frac{\mu}{2\mu'}$ qui n'est pas nulle. Mais nous ne saurions sans le recours de ce principe démontrer que cette limite est précisément égale à m_2, ce qui d'ailleurs n'est pas utile pour notre objet.

6. *Résumé.* — Nous pouvons assigner une limite supérieure et une limite inférieure au rapport $\frac{J_1}{J'_1}$, J_1 et J'_1 étant les deux intégrales relatives au potentiel d'une simple couche répandue sur la surface S.

La limite inférieure est $m_1 = 0$; la limite supérieure est finie.

Si nous assujettissons la simple couche à la condition que sa masse totale soit nulle, nous pouvons assigner au rapport $\frac{J_1}{J'_1}$ une limite inférieure qui n'est pas nulle.

Nous pouvons également assigner une limite supérieure et une limite inférieure au rapport $\frac{J_2}{J'_2}$, J_2 et J'_2 étant les deux intégrales relatives au potentiel d'une double couche répandue sur la surface S.

La limite supérieure est $\frac{1}{m_2}$ et est finie; la limite inférieure n'est pas nulle.

Pour établir les théorèmes relatifs au rapport $\frac{J_2}{J'_2}$, nous avons dû nous appuyer (*cf.* § 2, *in fine*) sur le principe de Dirichlet, d'après lequel le problème de Dirichlet comporte toujours une solution. Pour cela, il nous faut supposer que ce principe a été démontré, *indépendamment de la méthode de Neumann* par d'autres méthodes qui permettent comme on le sait de le démontrer

rigoureusement dans toute sa généralité, par les méthodes alternantes de M. Schwarz, ou par la méthode du balayage de Poincaré.

Au contraire, pour établir les théorèmes relatifs au rapport $\frac{J_1}{J'_1}$, il n'est pas nécessaire de supposer connu le principe de Dirichlet.

Tous ces théorèmes ne sont d'ailleurs démontrés que pour les surfaces simplement connexes; mais la démonstration développée dans le paragraphe précédent permettrait dès qu'on les aurait démontrés pour une surface particulière de les étendre à toutes les surfaces qui ont les mêmes connexions.

Si on les démontrait pour le tore, ils seraient vrais pour toutes les surfaces fermées triplement connexes.

Il est aisé de les démontrer pour un domaine compris entre deux sphères concentriques; il suffit pour cela de faire encore usage des fonctions sphériques, ce qui conduit à une analyse analogue à celle du paragraphe 3.

Ils sont donc vrais pour tout domaine limité par deux surfaces simplement connexes.

J'ajouterai que la nature même de la question fait présumer qu'ils sont vrais dans tous les cas.

Notre démonstration suppose également que la surface S a partout un plan tangent et des rayons de courbure finis, sans quoi la transformation du début du paragraphe 4 ne pourrait pas se faire. Il serait sans doute possible de se débarrasser de cette restriction; je ne l'ai pas essayé.

CHAPITRE III.

Le rapport $\frac{J_{2m+2}}{J_{2m}}$.

Reprenons les intégrales J_m et J'_m définies au chapitre I. De l'analyse du chapitre II on peut conclure qu'il existe un nombre μ, positif et plus grand que 1, ne dépendant que de la configuration de la surface S et jouissant de la propriété suivante : on a pour un indice pair $2m$:

$$J_{2m} < \mu J'_{2m}, \qquad J'_{2m} < \mu J_{2m}. \tag{1}$$

Voyons quelles sont les conséquences de ces inégalités.

Supposons que, comme au paragraphe 2 du chapitre I, nous changions Φ en

$\alpha\Phi + \beta U_{q+1}$, J_{2m} et J'_{2m} se changeront en

$$\alpha^2 J_{2m} + 2\alpha\beta J_{2m+q} + \beta^2 J_{2m+2q},$$
$$\alpha^2 J'_{2m} + 2\alpha\beta J'_{2m+q} + \beta^2 J'_{2m+2q}.$$

Les inégalités (1) subsisteront, ce qui donne, en supposant $q = 1$:

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha^2(J_{2m} - \mu J'_{2m}) + 2\alpha\beta(J_{2m+1} - \mu J'_{2m+1}) + \beta^2(J_{2m+2} - \mu J'_{2m+2}) > 0, \\ \alpha^2(J'_{2m} - \mu J_{2m}) + 2\alpha\beta(J'_{2m+1} - \mu J_{2m+1}) + \beta^2(J'_{2m+2} - \mu J_{2m+2}) > 0 \end{cases}$$

ou en changeant β en $-\beta$

$$(3)\quad \alpha^2(J'_{2m} - \mu J_{2m}) - 2\alpha\beta(J'_{2m+1} - \mu J_{2m+1}) + \beta^2(J'_{2m+2} - \mu J_{2m+2}) > 0.$$

Additionnons (2) et (3), il viendra :

$$\alpha^2(1 - \mu)(J_{2m} + J'_{2m}) + 2\alpha\beta(1 + \mu)(J_{2m+1} - J'_{2m+1})$$
$$+ \beta^2(1 - \mu)(J_{2m+2} + J'_{2m+2}) > 0.$$

Comme cette inégalité doit avoir lieu quels que soient α et β, il faut que l'on ait :

$$(1 + \mu)^2(J_{2m+1} - J'_{2m+1})^2 < (1 - \mu)^2(J_{2m} + J'_{2m})(J_{2m+2} + J'_{2m+2}).$$

Mais :

$$J_{2m+1} - J'_{2m+1} = J_{2m+2} + J'_{2m+2};$$

il vient donc puisque $J_{2m+2} + J'_{2m+2}$ et $J_{2m} + J'_{2m}$ sont essentiellement positifs :

$$\frac{J_{2m+2} + J'_{2m+2}}{J_{2m} + J'_{2m}} < \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu}\right)^2.$$

Nous pouvons donc conclure de là qu'il existe un nombre A tel que

$$J_{2m} + J'_{2m} < A\left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu}\right)^{2m}.$$

Si nous posons :

$$\left|\frac{1 - \mu}{1 + \mu}\right| = L,$$

nous voyons que L sera plus petit que 1 puisque μ est positif; on aura :

$$J_{2m} + J'_{2m} < AL^{2m},$$

et *a fortiori* :

$$J_{2m} < AL^{2m}, \qquad J'_{2m} < AL^{2m}.$$

Il en résulte de là que les séries

$$(4)\quad \begin{cases} J_0 + \lambda^2 J_2 + \lambda^4 J_4 + \ldots, \\ J'_0 + \lambda^2 J'_2 + \lambda^4 J'_4 + \ldots \end{cases}$$

convergent toutes les fois que :

$$|\lambda L| < 1$$

et, en particulier, pour

$$\lambda = \pm 1$$

Des inégalités (1), on peut encore déduire :

$$\left|\frac{J_{2m} - J'_{2m}}{J_{2m} + J'_{2m}}\right| < \left|\frac{1-\mu}{1+\mu}\right| = L$$

Or

$$J_{2m} - J'_{2m} = J_{2m+1} + J'_{2m-}$$

on en déduit :

$$\left|\frac{J_{2m+1} + J'_{2m+1}}{J_{2m} + J'_{2m}}\right| < L$$

et

$$|J_{2m+1} + J'_{2m+1}| < AL^{2m+1}.$$

D'ailleurs :

$$J_{2m+1} - J'_{2m+1} = J_{2m+2} + J'_{2m+2} < AL^{2m+2},$$

d'où :

$$|J_{2m+1}| < A\,\frac{1+L}{2}\,L^{2m+1} < AL^{2m+1},$$

et, de même,

$$|J'_{2m+1}| < AL^{2m+1}.$$

CHAPITRE IV.

L'intégrale $\int (V - C)^2\, d\omega$.

1. *Énoncé du problème.* — Soit W une fonction harmonique à l'intérieur de S, se réduisant à V à la surface de S. Soit J l'intégrale

$$J = \int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau$$

étendue à l'intérieur de S. On pourrait se proposer de trouver une limite supérieure du rapport

$$\frac{\int V^2\, d\omega}{J},$$

l'intégrale du numérateur étant étendue aux éléments $d\omega$ de la surface S.

Sous cette forme, le problème ne comporterait pas de solution; car si W se réduit à une constante différente de zéro, J s'annule et l'intégrale du numérateur ne s'annule pas.

Mais il n'en est plus de même si l'on impose à V une condition, à savoir de satisfaire à la relation

$$\int V\, d\omega = 0.$$

Dans ce cas, notre rapport aura, comme nous allons le voir, une limite supérieure.

On peut encore énoncer le problème d'une autre manière. Considérons l'intégrale

$$K = \int (V - C)^2 d\omega,$$

où C est une constante arbitraire. Nous choisirons cette constante de telle façon que K soit minimum, ce qui entraîne la condition :

$$\int (V - C)\, d\omega = 0.$$

Le problème consiste à chercher une limite supérieure du rapport du minimum de K à l'intégrale J.

Soit, de même, W une fonction harmonique à l'extérieur de S, se réduisant à V′ à la surface de S; soit J′ l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau$$

étendue à l'extérieur de S.

Considérons maintenant l'intégrale

$$K' = \int (V' - C)^2 d\omega,$$

C étant une constante déterminée de telle sorte que

$$\int (V' - C)\, d\omega = 0,$$

c'est-à-dire de telle sorte que K′ soit minimum.

On peut se proposer de déterminer une limite supérieure du rapport $\frac{K'}{J'}$.

2. *Cas de la sphère.* — Supposons que S soit une sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine, et reprenons les notations du paragraphe 3, chapitre II.

Soit alors W une fonction harmonique à l'intérieur de S; nous pourrons écrire :

$$W = \Sigma \beta_p X_p r^n$$

et à la surface de S :

$$V = \Sigma \beta_p X_p.$$

On en déduit :

$$J = \Sigma n \beta_p^2.$$

Introduisons une constante C qui doit être déterminée de telle sorte que :

$$\int (V - C) d\omega = 0;$$

cela revient à supposer

$$C = \beta_0 X_0,$$

d'où :

$$V - C = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots$$

et

$$\int (V - C)^2 d\omega = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots,$$

ce que j'écrirai

$$\int (V - C)^2 d\omega = \Sigma \beta_p^2,$$

en convenant que sous le signe Σ l'indice p doit prendre les valeurs 1, 2, ... *ad inf.* et ne pas prendre la valeur 0.

De même, dans la formule

$$J = \Sigma n \beta_p^2,$$

on peut supposer que l'indice p prend les valeurs 1, 2, ..., et ne prend pas la valeur 0; car pour $p = 0$, le coefficient est aussi égal à 0 et le terme correspondant disparaît.

Il vient alors :

$$\frac{\int (V - C)^2 d\omega}{J} = \frac{\Sigma \beta_p^2}{\Sigma n \beta_p^2} < 1.$$

Soit maintenant W une fonction harmonique à l'extérieur de S; nous pourrons écrire :

$$W = \Sigma \beta_p X_p r^{-(n+1)}$$

et à la surface de S

$$V' = \Sigma \beta_p X_p.$$

On en déduit

$$J' = \Sigma (n + 1) \beta_p^2.$$

Introduisons une constante C qui doit satisfaire à

$$\int (V' - C)\,d\omega = 0.$$

Cela revient à supposer

$$C = \beta_0 X_0.$$

On aura alors :

$$\int (V' - C)^2\,d\omega = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots$$

et

$$\int V'^2\,d\omega = \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots,$$

d'où enfin :

$$\int (V' - C)^2\,d\omega < \int V'^2\,d\omega < J'.$$

3. *Surfaces simplement connexes.* — Reprenons la transformation du paragraphe 4, chapitre II.

Soit W une fonction harmonique à l'intérieur de S, et soit :

$$K_1 = \int (V - C_1)^2\,d\omega,$$

la constante C_1 étant choisie de telle sorte que K_1 soit minimum, c'est-à-dire que

$$\int (V - C_1)\,d\omega = 0.$$

Soit $d\omega'$ l'élément de S' qui correspond à l'élément $d\omega$ de S ; soit :

$$\frac{d\omega}{d\omega'} = \psi;$$

ψ sera une fonction des coordonnées du centre de gravité de l'élément $d\omega$; cette fonction essentiellement positive aura un maximum h et un minimum h'.

Nous aurons ensuite :

$$J_1 = \int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau,$$

l'intégrale étant étendue à l'intérieur de S, ou ce qui revient au même :

$$J_1 = \int \Phi\,dx'\,dy'\,dz',$$

l'intégrale étant étendue à l'intérieur de la sphère S'.

On aura d'ailleurs comme au paragraphe 4, chapitre II :

$$(1)\qquad \mu' \sum \left(\frac{dW}{dx'}\right)^2 < \Phi < \mu \sum \left(\frac{dW}{dx'}\right)^2,$$

ces inégalités restant vraies quand on remplace W par une fonction quelconque.

Soit ensuite W_3 une fonction de x', y', z' définie par les conditions suivantes :

Elle sera harmonique à l'intérieur de la sphère S', et à la surface de cette sphère on aura :

$$W_3 = W = V.$$

On saura déterminer cette fonction puisqu'on sait résoudre le problème de Dirichlet en ce qui concerne la sphère.

On aura alors en vertu des inégalités (1) :

$$J_1 > \mu' \int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 dx'\,dy'\,dz'.$$

Mais la fonction W_3 étant harmonique, on aura

$$(2)\qquad \int \sum \left(\frac{dW}{dx'}\right)^2 dx'\,dy'\,dz' > \int \sum \left(\frac{dW_3}{dx'}\right)^2 dx'\,dy'\,dz',$$

d'où si je désigne par J_3 l'intégrale du second membre de (2) :

$$J_1 > \mu' J_3.$$

Soit maintenant C_3 une constante choisie de telle sorte que :

$$\int (W_3 - C_3)\,d\omega' = 0$$

et soit

$$K_3 = \int (W_3 - C_3)^2\,d\omega' = \int (V - C_3)^2\,d\omega,$$

il viendra en vertu du paragraphe précédent :

$$K_3 < J_3.$$

D'autre part :

$$\int (V - C_3)^2\,d\omega = \int (V - C_3)^2 \psi\,d\omega' < h \int (V - C_3)^2\,d\omega'$$

et comme C_1 a été choisi de telle sorte que K_1 soit minimum :

$$K_1 = \int (V - C_1)^2\,d\omega < \int (V - C_3)^2\,d\omega,$$

d'où finalement :

$$K_1 < h K_3.$$

On déduit de là :

$$\frac{K_1}{J_1} < \frac{h}{\mu}.$$

Nous obtenons donc une limite supérieure du rapport $\frac{K_1}{J_1}$.

Soit maintenant W une fonction harmonique à l'extérieur de S et se réduisant à V' à la surface de S.

Soit C_1 une constante telle que

$$\int (V' - C_1) d\omega = 0$$

et soit :

$$K'_1 = \int (V' - C_1)^2 d\omega.$$

Soit :

$$J'_1 = \int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau = \int \Phi \, dx' \, dy' \, dz',$$

les intégrales étant étendues la première à l'extérieur de S, la seconde à l'extérieur de S'.

Soit maintenant W_3 une fonction de x', y', z' harmonique à l'extérieur de S' et se réduisant à $W = V'$ à la surface de cette sphère.

Considérons l'intégrale

$$J'_3 = \int \sum \left(\frac{dW_3}{dx'}\right)^2 dx' \, dy' \, dz'$$

étendue à l'extérieur de S' et l'intégrale :

$$K'_3 = \int (W_3 - C_3)^2 d\omega' = \int (V' - C_3)^2 d\omega',$$

C_3 étant choisi de façon que

$$\int (V' - C_3) d\omega' = 0.$$

On aura encore, pour les mêmes raisons que plus haut,

$$K'_3 < \frac{J'_3}{\mu'} < \frac{J'_1}{\mu'},$$

$$K'_1 = \int (V' - C_1)^2 d\omega < \int (V' - C_3)^2 d\omega < h K'_3,$$

d'où finalement :

$$\frac{K'_1}{J'_1} < \frac{h}{\mu'}.$$

4. *Application au problème de Neumann.* — Reprenons les notations de l'introduction et du chapitre I, soit :

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots.$$

Soit une constante C telle que

$$\int (V_m - C)\, d\omega = 0,$$

on aura en vertu du paragraphe précédent :

$$\int (V_m - C)^2 d\omega < \frac{h}{\mu} J_{2m}.$$

Soit, de même, C′ une constante telle que :

$$\int (V'_m - C')\, d\omega = 0,$$

on aura encore

$$\int (V'_m - C')^2 d\omega < \frac{h}{\mu'} J'_{2m}.$$

Si nous considérons le principe de Dirichlet comme préalablement démontré et si nous admettons, par conséquent, les résultats du paragraphe 1, chapitre III, nous pourrons écrire :

$$\int (V_m - C)^2 d\omega < \frac{hA}{\mu} L^{2m}, \qquad \int (V'_m - C')^2 d\omega < \frac{hA}{\mu'} L^{2m}.$$

Soit maintenant C_m une constante telle que :

$$\int (U_m - C_m)\, d\omega = 0.$$

Comme

$$U_m = \frac{V_m + V'_m}{2},$$

on aura :

$$C_m = \frac{C + C'}{2}.$$

Posons alors :

$$\Omega_m = \int (U_m - C_m)^2 d\omega.$$

Il vient :

$$4\,\Omega_m = \int (V_m - C)^2 d\omega + \int (V'_m - C')^2 d\omega + 2\int (V_m - C)(V'_m - C')\, d\omega.$$

Or en vertu de l'inégalité de Schwarz :

$$\left[\int (V_m - C)(V'_m - C')\,d\omega\right]^2 < \int (V_m - C)^2\,d\omega \int (V'_m - C')^2\,d\omega < \frac{h^2 A^2}{\mu'^2} L^{4m}.$$

On a donc finalement

$$\Omega_m < \frac{hA}{\mu'} L^{2m}.$$

CHAPITRE V.

Convergence de la série de Neumann.

1. *Démonstration.* — Admettons que le principe de Dirichlet ait été préalablement établi par des méthodes indépendantes de celle de Neumann.

Il en résulte alors du chapitre précédent que l'intégrale

$$\Omega_m = \int (U_m - C_m)^2\,d\omega$$

est plus petite que BL^{2m}, B étant un nombre positif que j'ai désigné par $\frac{hA}{\mu'}$ dans le chapitre précédent, mais que je représente maintenant par une seule lettre.

Je me propose maintenant de trouver une limite supérieure de $|W_m|$ et, par conséquent, du terme général de la série de Neumann.

Nous adopterons les notations suivantes, que nous avons déjà employées dans l'introduction.

Soit $d\omega'$ un élément de la surface S ayant pour centre de gravité un point M' dont les coordonnées sont x', y', z' ; soit $d\sigma'$ l'angle solide sous lequel $d\omega'$ est vu du point M dont les coordonnées sont x, y, z.

W_m sera la valeur de la fonction W_m au point x, y, z qui pourra être extérieur ou intérieur à la surface S. Lorsque le point x, y, z viendra sur la surface S, la valeur de la fonction W_m en ce point x, y, z s'appellera U_m, tandis que je désignerai par U'_m la valeur de cette fonction au point x', y', z' qui est toujours sur la surface.

On aura alors :

$$W_{m+1} = \int \frac{U'_m\,d\sigma'}{2\pi}.$$

D'autre part, on aura :

$$\int \frac{d\sigma'}{2\pi} = 2, \quad 1 \quad \text{ou} \quad 0,$$

selon que le point x, y, z sera intérieur à S, sur la surface S elle-même, ou enfin extérieur à S.

Si donc le point x, y, z est extérieur à S, on aura :

$$W_{m+1} - 2C_m = \int \frac{(U'_m - C_m)d\sigma'}{2\pi}.$$

S'il est sur S, on aura :

$$W_{m+1} - C_m = U_{m+1} - C_m = \int \frac{(U'_m - C_m)d\sigma}{2\pi}.$$

Si enfin il est extérieur à S, on aura :

$$W_{m+1} = \int \frac{(U'_m - C_m)d\sigma'}{2\pi}.$$

Dans tous les cas, l'inégalité de Schwarz nous donnera :

$$(1) \qquad \left[\int \frac{U'_m - C_m}{2\pi}\frac{d\sigma'}{d\omega'}d\omega'\right]^2 < \int (U'_m - C_m)^2 d\omega' \int \left(\frac{d\sigma'}{2\pi\, d\omega'}\right)^2 d\omega'.$$

Le second membre de cette inégalité est le produit de deux intégrales; la première de ces intégrales n'est autre chose que Ω_m; étudions la seconde.

On a :

$$\frac{d\sigma'}{d\omega'} = \frac{\cos\varphi}{r^2},$$

r étant la distance des points x', y', z' et x, y, z, et φ l'angle que fait la droite qui joint ces deux points avec la normale à l'élément $d\omega'$.

On aura donc :

$$\int \left(\frac{d\sigma'}{2\pi\, d\omega'}\right)^2 d\omega' < \int \frac{d\omega'}{4\pi^2 r^4}.$$

Si le point x, y, z n'est pas sur la surface S, r ne s'annulera pas et l'intégrale du second membre sera finie; je l'appelle D.

On aura donc :

$$\left[\int \frac{U'_m - C_m}{2\pi}d\sigma'\right]^2 < (BL^{2m})D.$$

Si le point x, y, z est intérieur à S, on aura donc :

$$|W_{m+1} - 2C_m| < L^m\sqrt{BD}.$$

Si le point x, y, z est extérieur à S, on aura :

$$|W_{m+1}| < L^m\sqrt{BD}.$$

Dans les deux cas, D est un nombre positif fini qui dépend de la position du point x, y, z, mais qui croît indéfiniment quand ce point x, y, z se rapproche indéfiniment de la surface S.

Quand le point x, y, z est sur la surface S, nous ne savons rien encore.

Cela suffit pour nous montrer que la série de Neumann converge tant à l'interieur de S qu'à l'extérieur de S. Pour un point extérieur, la série

$$W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots$$

converge pour $\lambda \leq 1$ puisque le terme général

$$\lambda^{m+1} W_{m+1}$$

est plus petit en valeur absolue que le terme correspondant

$$\lambda^{m+1} L^m \sqrt{BD}.$$

d'une progression geometrique dont la raison $L\lambda$ est plus petite que 1 en valeur absolue.

Pour un point intérieur, la série que nous venons de considérer ne convergerait plus, mais la série :

$$W_0 + \lambda(W_1 - 2C_0) + \lambda^2(W_2 - 2C_1) + \ldots$$

serait convergente.

C'est un résultat analogue à celui qu'avait obtenu Neumann dans le cas des surfaces convexes, car il avait envisagé la série :

$$(W_0 - C) + \lambda(W_1 - C) + \lambda^2(W_2 - C) + \ldots.$$

C étant une constante.

Ces resultats toutefois ne sauraient nous suffire. En effet, nous n'avons démontré ni la convergence pour les points de la surface S elle-même, ni l'uniformité de la convergence. Nous ne saurions donc conclure que la somme de la série satisfait bien aux conditions du problème de Dirichlet.

Il est donc nécessaire d'étudier le cas où le point x, y, z vient sur la surface S. Le raisonnement qui précède se trouve en défaut, car l'intégrale

$$\int \left(\frac{d\sigma}{2\pi\, d\omega'}\right)^2 d\omega'$$

ne reste pas finie. Il n'en serait pas de même dans le plan; cette intégrale resterait finie, pourvu que la courbe qui joue le rôle de la surface S ait son rayon de courbure fini.

Mais dans l'espace une démonstration spéciale est nécessaire.

On a alors

$$(2) \qquad U_{m+1} - U_m = \int \frac{U'_m - U_m}{2\pi} \frac{d\sigma'}{d\omega'} d\omega',$$

l'intégrale étant étendue à la surface S tout entière.

Soit Σ un cylindre de révolution de rayon ρ ayant pour axe la normale à S dont le pied est le point M qui a pour coordonnées x, y, z. Décomposons l'intégrale du second membre de (2) en deux parties; la première partie que j'appellerai H sera étendue à la portion de la surface S qui est extérieure à Σ; la seconde partie que j'appellerai H' sera étendue à la portion de la surface S qui est intérieure à Σ. On aura donc :

$$U_{m+1} - U_m = H + H'.$$

On aura en vertu de l'inégalité de Schwarz

$$(3) \qquad H^2 < \int (U'_m - U_m)^2 d\omega' \int \left(\frac{d\sigma'}{2\pi\, d\omega}\right)^2 d\omega'.$$

Les intégrales du second membre de (3) sont les mêmes que celles du second membre de (1); mais elles doivent être étendues seulement à la portion de S extérieure à Σ. Elles sont donc plus petites que les intégrales correspondantes du second membre de (1).

La première de ces intégrales est plus petite que Ω_m et, par conséquent, que BL^{2m}.

La seconde est finie; mais elle dépend de ρ et croît indéfiniment quand ρ tend vers zéro.

Il s'agit d'en trouver une limite supérieure.

Nous supposerons qu'en tous les points de la surface S il y a un plan tangent et que les deux courbures principales sont finies.

On pourra alors trouver un nombre R tel qu'on puisse construire une sphère de rayon R qui en un point quelconque de S soit tangente à cette surface et soit tout entière à l'intérieur de cette surface.

Soient maintenant M et M' deux points quelconques de la surface S, r leur distance, θ l'angle du plan tangent en M avec le plan tangent en M'.

Si, comme nous le supposons, les courbures principales sont partout finies, on pourra assigner une limite supérieure au rapport $\frac{\theta}{r}$.

Soit :

$$\frac{\theta}{r} < E;$$

E est une constante indépendante de la position des points M et M' et dépendant seulement de la forme de la surface S.

Si nous posons :

$$\rho_0 = \frac{\pi}{4E},$$

toutes les fois que

$$r < \rho_0,$$

nous aurons :

$$\theta < \frac{\pi}{4}.$$

Cela va nous permettre de trouver une limite supérieure de l'intégrale

$$\int \left(\frac{d\sigma'}{2\pi\, d\omega'}\right)^2 d\omega'.$$

Cette intégrale doit être étendue à la portion de S qui est extérieure à Σ, c'est-à-dire à la portion de S définie par l'inégalité

$$\alpha > \rho.$$

Je désigne par α la projection de la droite $MM' = r$ sur le plan tangent au point M.

Mais il faut encore la décomposer en deux parties, la première partie sera étendue à la portion de S définie par

$$r > \rho_0$$

et la seconde partie à la portion de S définie par

$$\rho_0 > r, \quad \alpha > \rho.$$

La première partie sera plus petite que

$$\int \frac{d\omega'}{4\pi^2 r^4} < \int \frac{d\omega'}{4\pi^2 \rho_0^4} = \frac{S}{4\pi^2 \rho_0^4},$$

S étant l'aire totale de la surface S.

Pour évaluer la seconde partie, employons un système particulier de coordonnées.

Au point M dont les coordonnées sont x, y, z, menons le plan tangent à S.

Projetons sur ce plan le point M', centre de gravité de $d\omega'$; soit m' cette projection. Rapportons ce point m' dans le plan tangent à un système de coordonnées polaires α et β en prenant pour pôle le point M.

Alors α est le rayon vecteur m'M; c'est la projection de r de sorte que :

$$\alpha < r.$$

La projection de l'élément $d\omega'$ sur le plan tangent aura pour aire $\alpha\, d\alpha\, d\beta$, de sorte que nous aurons

$$d\omega' = \frac{\alpha\, d\alpha\, d\beta}{\cos\theta}$$

et puisque dans cette portion de S où $r < \rho_0$ on a :

$$\theta < 45^\circ,$$

on aura :

$$d\omega' < \alpha\sqrt{2}\, d\alpha\, d\beta.$$

Menons maintenant une sphère de rayon R, tangente à S en M' et tout entière intérieure à S.

La droite MM' coupe cette sphère en P et comme la sphère est intérieure à S, on a

$$\text{MP} < \text{MM}'.$$

D'autre part,

$$\text{MM}' = r, \qquad \text{MP} = 2\text{R}\,|\cos\varphi\,|,$$

d'où :

$$\left|\frac{d\sigma'}{d\omega}\right| = \frac{|\cos\varphi|}{r^2} < \frac{1}{2\text{R}\,r}.$$

La seconde partie de notre intégrale

$$\int \left(\frac{d\sigma'}{2\,r\,d\omega'}\right)^2 d\omega'$$

sera donc plus petite que

$$\int \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2}\,\frac{\alpha\, d\alpha\, d\beta}{4\text{R}^2 r^2} < \int \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2}\,\frac{d\alpha\, d\beta}{\alpha}.$$

Il faut intégrer par rapport à β depuis zéro jusqu'à 2π, par rapport à α depuis ρ jusqu'à une valeur qui correspond à la condition $r = \rho_0$ et qui est, par conséquent, plus petite que ρ_0 puisque α est plus petit que r. L'intégrale sera donc certainement plus petite que

$$\frac{\sqrt{2}}{8\pi\text{R}^2}\log\frac{\rho_0}{\rho}.$$

Je déduis de là l'inégalité :

$$H^2 < BL^{2m}\left(\frac{S^2}{4\pi^2\rho_0^4} + \frac{\sqrt{2}}{8\pi R^2}\log\frac{\rho_0}{\rho}\right).$$

J'écrirai cela sous la forme :

$$H < L^m\sqrt{P - Q\log\rho},$$

P et Q étant des nombres qui ne dépendent, ni de m, ni de ρ, mais seulement de ρ_0 et de la forme de la surface S.

Étudions maintenant

$$H' = \int (U'_m - C_m)\frac{d\sigma'}{2\pi\, d\omega'}\, d\omega'.$$

Nous avons trouvé à la fin de l'introduction

$$|U_m| < M_0 N^m.$$

Comme on a

$$\int (U_m - C_m)\, d\omega' = 0$$

et que C_m est pour ainsi dire la valeur moyenne de U_m, on aura aussi

$$|C_m| < M_0 N^m$$

et, par conséquent :

$$|U_m - C_m| < 2 M_0 N^m;$$

il vient donc :

$$|H'| < 2M_0 N^m \int \frac{1}{4\pi R r}\sqrt{2}\,\alpha\, d\alpha\, d\beta < 2M_0 N^m \int \frac{\sqrt{2}\, d\alpha\, d\beta}{4\pi R}.$$

Il faut intégrer par rapport à β de 0 à 2π, par rapport à α de 0 à ρ, ce qui donne :

$$|H'| < M_0 N^m \sqrt{2}\,\frac{\rho}{R}.$$

Il en résulte

$$|U_{m+1} - C_m| < L^m\sqrt{P - Q\log\rho} + M_0 N^m\sqrt{2}\,\frac{\rho}{R}.$$

Cette inégalité doit avoir lieu quel que soit ρ; prenons

$$\rho = \left(\frac{L}{N}\right)^m;$$

il vient :

$$(4) \qquad |U_{m+1} - C_m| < L^m\sqrt{P + mQ\log\frac{N}{L}} + L^m\frac{M_0\sqrt{2}}{R}.$$

Le second membre de l'inégalité (4) n'est pas le terme général d'une progression géométrique décroissante de raison L, car le nombre m figure encore dans le radical

$$\sqrt{P + mQ\log\frac{N}{L}},$$

mais c'est le terme général d'une série convergente.

Si même L_1 est un nombre quelconque plus petit que 1, mais plus grand que L, on peut toujours trouver un nombre A_1 tel que le second membre de (4) soit plus petit que $A_1 L_1^m$, d'où :

$$|U_{m+1} - C_m| < A_1 L_1^m.$$

La série

$$(5) \qquad U_0 + (U_1 - C_0) + (U_2 - C_1) + \ldots + (U_{m+1} - C_m) + \ldots$$

est donc absolument convergente; et de plus, comme les nombres L, M_0, P, Q, N, R qui figurent dans l'intégrale (4) ne dépendent pas de la position du point M sur la surface S, la convergence est uniforme.

2. *Uniformité de la convergence.* — Il résulte du paragraphe précédent que la série

$$U_0 + (U_1 - C_0) + (U_2 - C_1) + \ldots$$

est absolument et uniformément convergente; il est aisé de voir qu'il en est de même de la série :

$$(1) \qquad (U_0 - C) + (U_1 - C) + (U_2 - C) + \ldots,$$

où C est une constante convenablement choisie.

Nous avons trouvé, en effet,

$$|U_{m+1} - C_m| < A_1 L_1^m.$$

En tenant compte de la relation

$$\int (U_{m+1} - C_{m+1})\, d\omega' = 0$$

qui exprime que C_{m+1} est la valeur moyenne de U_{m+1}, on en déduit :

$$|C_{m+1} - C_m| < A_1 L_1^m.$$

La série

$$C_0 + (C_1 - C_0) + (C_2 - C_1) + \ldots$$

est donc absolument convergente; j'appelle sa somme C; le reste de la série

$$(C_{m+1}-C_m)+(C_{m+2}-C_{m+1})+\ldots=C-C_m$$

est plus petit que

$$\frac{A_1}{1-L_1}L_1^m$$

et, par conséquent,

$$|U_{m+1}-C|<|U_{m+1}-C_m|+|C-C_m|<A_1L_1^m\left(1+\frac{1}{1-L_1}\right).$$

Cela démontre la convergence de la série (1).

De l'inégalité précédente, je déduis

$$|U_m-C|<A_1L_1^{m-1}\left(1+\frac{1}{1-L_1}\right),$$

ce que je puis écrire

$$|U_m-C|<B_1L_1^m,$$

B_1 étant un nombre positif.

Envisageons maintenant les égalités

$$W_{m+1}=\int(U_m-C)\frac{d\sigma'}{2\pi},$$

$$W_{m+1}-2C=\int(U_m-C)\frac{d\sigma'}{2\pi},$$

qui sont vraies, la première quand le point x, y, z est extérieur à S, la seconde quand il est intérieur à S.

On en déduit

$$|W_{m+1}|<B_1(N+1)L_1^m$$

pour un point extérieur et

$$|W_{m+1}-2C|<B_1(N+1)L_1^m$$

pour un point intérieur.

N est toujours le nombre défini à la fin de l'introduction.

Il résulte de là que la série ΣW_m est convergente dans tout l'espace extérieur à S et que *dans tout ce domaine la convergence est absolue et uniforme.*

De même la série $\Sigma(W_m-2C)$ est convergente dans tout l'espace intérieur à S et dans tout ce domaine la convergence est absolue et uniforme.

Soit donc d'abord un point extérieur à S et posons :

$$W=W_0+W_1+\ldots+W_m+\ldots.$$

La série du second membre étant convergente définit une fonction de x, y, z que j'appelle W ; il me reste à montrer que cette fonction satisfait aux conditions du problème de Dirichlet.

D'abord elle a des dérivées de tous les ordres.

Nous avons, en effet,

$$W_{m+1} = \int (U_m - C) \frac{d\sigma'}{2\pi},$$

ce que je puis écrire :

$$W_{m+1} = \int (U_m - C) F \, d\omega',$$

F étant une fonction de x, y, z, x', y', z' qui ne cesse d'être holomorphe que quand les points x, y, z et x', y', z' se confondent.

Soit alors DW une dérivée d'ordre quelconque de W prise par rapport à x, y, z. Il viendra en différentiant sous le signe $\int$:

$$DW_{m+1} = \int (U_m - C) DF \, d\omega.$$

Dans tout domaine qui est tout entier extérieur à S, on pourra assigner à $|DF|$ une limite supérieure que j'appellerai H ; d'où l'on déduit :

$$|DW_{m+1}| < B_1 L_1^m H.$$

Nous en déduirons que la série

$$DW_0 + DW_1 + DW_2 + \ldots$$

est uniformément convergente, non pas dans tout l'espace extérieur à S, mais dans tout domaine tout entier extérieur à S.

Elle a donc pour somme DW.

On aura, par exemple :

$$\Delta W = \Delta W_0 + \Delta W_1 + \Delta W_2 + \ldots$$

et comme

$$\Delta W_m = 0,$$

on aura aussi

$$\Delta W = 0.$$

Il reste à démontrer que W tend uniformément vers $C - \Phi$ quand le point x, y, z se rapproche indéfiniment de S.

Construisons une série de surfaces s'enveloppant mutuellement et enve-

loppant S; soient $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ ces surfaces et supposons que quand n croît indéfiniment, la plus courte distance de S et de S_n tende vers zéro.

Ces surfaces $S_1, S_2, \dots, S_n$ peuvent d'ailleurs être quelconques.

Je dis que je puis prendre n assez grand pour que $|W + \Phi - C|$ soit plus petit qu'une quantité donnée ε toutes les fois que le point x, y, z est compris entre S_n et S.

C'est là ce que j'entends quand je dis que W tend *uniformément vers* $C - \Phi$.

Nous pouvons écrire :

$$W = (W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_m) + (W_{m+1} + W_{m+2} + \dots).$$

La série étant uniformément convergente, nous pouvons d'abord prendre m assez grand pour que

$$W_{m+1} + W_{m+2} + \dots < \frac{\varepsilon}{3},$$

assez grand en même temps pour que

$$|U_m - C| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le nombre m est désormais fixé; nous prendrons maintenant n assez grand pour que, toutes les fois que x, y, z est entre S et S_n, la différence de

$$W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_m$$

et de sa limite :

$$V'_0 + V'_1 + V'_2 + \dots + V'_m$$

soit plus petite que $\frac{\varepsilon}{3}$.

Or

$$V'_0 + V'_1 + \dots + V'_m = U_m - \Phi.$$

Il est donc clair que si toutes ces conditions sont remplies à la fois, la différence de W et de $C - \Phi$ sera plus petite que ε.

C. Q. F. D.

Considérons maintenant un point intérieur à S et posons :

$$W = (W_0 - 2C) - (W_1 - 2C) + (W_2 - 2C) - \dots.$$

Nous avons vu que la série qui figure dans le second membre de cette équation est convergente.

On démontrerait comme plus haut que W a des dérivées de tous les ordres.

On trouverait de même :

$$\Delta W = \Delta(W_0 - 2C) - \Delta(W_1 - 2C) + \Delta(W_2 - 2C) - \ldots$$

et on en déduirait

$$\Delta W = 0.$$

La somme des $m+1$ premiers termes de la série (où je suppose, par exemple, m impair)

$$(W_0 - 2C) - (W_1 - 2C) + (W_2 - 2C) \ldots - (W_m - 2C)$$

tend vers

$$(V_0 - V_1 + V_2 - V_3 + \ldots - V_m)$$

quand le point x, y, z se rapproche indéfiniment de la surface S.

Je supposerai m impair pour fixer les idées ; on a alors :

$$V_0 - V_1 + V_2 \ldots - V_m = \Phi - U_m$$

et cette expression tend vers $\Phi - C$ quand m croît indéfiniment.

Le reste de la démonstration se poursuivrait comme dans le cas du point extérieur et l'on verrait que W tend uniformément vers $\Phi - C$.

La fonction $W + C$ nous fournit alors la solution du problème de Dirichlet.

On remarquera que quand m croît indéfiniment, U_m tend uniformément vers C.

CHAPITRE VI.

Les fonctions fondamentales.

1. *Définition des fonctions fondamentales.* — Jusqu'ici j'ai cherché à être parfaitement rigoureux. Je crois utile maintenant de rattacher ce qui précède à d'autres considérations et pour cela de pénétrer dans un domaine que j'ai mal exploré et où je devrai me contenter de simples aperçus.

Soit W le potentiel d'une simple couche, formons les intégrales J et J′ définies plus haut qui ont l'une et l'autre pour expression

$$\int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau$$

et qui doivent être étendues la première à l'intérieur de S, la seconde à l'extérieur de S.

Le rapport $\frac{J}{J'}$ étant essentiellement positif, aura un minimum; ce minimum sera d'ailleurs nul et il est clair qu'il sera atteint quand la densité de la simple couche sera proportionnelle à celle de l'électricité en équilibre sur S.

La valeur correspondante de W sera Φ_0; comme le rapport $\frac{J}{J'}$ ne change pas quand on multiplie W par un facteur constant, Φ_0 ne sera défini qu'à un facteur constant près.

Je profiterai de ce facteur constant arbitraire pour que J' soit égal à 1 et la valeur correspondante de J qui est égale à 0, je l'appellerai λ_0.

A la surface de S, Φ_0 est une constante; quant à la dérivée $\frac{d\Phi_0}{dn}$, elle est discontinue quand on traverse S. Nous devons donc distinguer la valeur $\frac{d\Phi_0}{dn}$ qui correspond à l'intérieur de S et qui est d'ailleurs nulle et la valeur $\frac{d\Phi'_0}{dn}$ qui correspond à l'extérieur de S.

Soit maintenant W le potentiel d'une autre simple couche. On aura par le théorème de Green

$$\int_S W\frac{d\Phi'_0}{dn}d\omega = \int_S \Phi_0\frac{dW'}{dn}d\omega.$$

J'impose à W la restriction

$$\int W\frac{d\Phi'_0}{dn}d\omega = \int \Phi_0\frac{dW'}{dn}d\omega = 0.$$

Alors J ne peut plus s'annuler et $\frac{J}{J'}$ admet un nouveau minimum qui n'est pas nul et que j'appelle λ_1. J'appelle Φ_1 la valeur de W correspondante.

Pour voir dans quelles conditions ce minimum peut être atteint, il faut appliquer le calcul des variations qui donne :

$$\frac{d\Phi_1}{dn} = -\lambda_1\frac{d\Phi'_1}{dn};$$

Φ_1 n'étant défini qu'à un facteur constant près, je puis choisir ce facteur de telle façon que

$$J' = 1, \qquad J = \lambda_1.$$

Pour aller plus loin, imposons à W une nouvelle restriction, à savoir :

$$\int W\frac{d\Phi'_1}{dn}d\omega = 0.$$

Le rapport $\frac{J}{J'}$ aura un nouveau minimum plus grand que λ_1 et que j'appelle λ_2.

Ce minimum sera atteint pour

$$W = \Phi_2.$$

Le calcul des variations nous apprend que Φ_2 est le potentiel d'une simple couche tel que

$$\frac{d\Phi_2}{dn} = -\lambda_2 \frac{d\Phi'_2}{dn}.$$

D'autre part, on peut supposer

$$J' = 1, \qquad J = \lambda_2$$

et ainsi de suite.

Cet aperçu nous porte à penser qu'il existe une série de fonctions que j'appelle *fondamentales*,

$$\Phi_0, \quad \Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots$$

et une série de nombres positifs :

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots$$

jouissant des propriétés suivantes :

1° On a :

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots.$$

2° Les fonctions Φ_i sont des potentiels de simples couches et l'on a :

$$\frac{d\Phi_i}{dn} = -\lambda_i \frac{d\Phi'_i}{dn}.$$

3° On aura :

$$\int \Phi_i \frac{d\Phi'_k}{dn}\, d\omega = \int \Phi_k \frac{d\Phi'_i}{dn}\, d\omega = 0$$

et, par conséquent,

$$\int \Phi_i \frac{d\Phi_k}{dn}\, d\omega = \int \Phi_k \frac{d\Phi_i}{dn}\, d\omega = 0.$$

4° On aura :

$$\int \sum \left(\frac{d\Phi_i}{dx}\right)^2 d\tau = 1, \qquad \int \sum \left(\frac{d\Phi_i}{dx}\,\frac{d\Phi_k}{dx}\right) d\tau = 0,$$

les intégrales étant étendues à l'extérieur de S; et en effet d'après le théorème de Green, la seconde de ces intégrales n'est autre chose que

$$\int \Phi_i \frac{d\Phi'_k}{dn}\, d\omega.$$

5° On aura :

$$\int \sum \left(\frac{d\Phi_i}{dx}\right)^2 d\tau = 1, \qquad \int \sum \left(\frac{d\Phi_i}{dx}\frac{d\Phi_k}{dx}\right) d\tau = 0,$$

les intégrales étant étendues à l'intérieur de S.

Soit maintenant φ le potentiel d'une simple couche satisfaisant à la condition

$$\frac{d\varphi}{dn} = -\lambda \frac{d\varphi'}{dn}.$$

Je dis que λ est un nombre réel positif qui figure dans la série $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$.

Si, en effet, il existe une autre simple couche dont le potentiel ψ satisfasse à la condition

$$\frac{d\psi}{dn} = -\mu \frac{d\psi'}{dn} \qquad (\mu \gtrless \lambda),$$

le théorème de Green nous donnera :

$$\int \psi \frac{d\varphi'}{dn} d\omega - \int \varphi \frac{d\psi'}{dn} d\omega = 0$$

et

$$\int \psi \frac{d\varphi}{dn} d\omega - \int \varphi \frac{d\psi}{dn} d\omega = 0$$

ou

$$\lambda \int \psi \frac{d\varphi'}{dn} d\omega - \mu \int \varphi \frac{d\psi'}{dn} d\omega = 0,$$

d'où, enfin,

$$\int \psi \frac{d\varphi'}{dn} d\omega = \int \varphi \frac{d\psi'}{dn} d\omega = \int \psi \frac{d\varphi}{dn} d\omega = 0.$$

Nous en concluons que l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\right) d\tau$$

est nulle, soit qu'on l'étende à l'extérieur de S, soit qu'on l'étende à l'intérieur de S.

Je dis qu'il en résulte que λ est réel; si en effet λ était imaginaire, nous pourrions supposer φ et ψ, λ et μ imaginaires conjugués et l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\right) d\tau$$

devrait être positive tandis que nous venons de voir qu'elle est nulle.

Si maintenant nous désignons par j et j' les valeurs de l'intégrale :

$$\int \sum \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 d\tau$$

étendue soit à l'intérieur de S, soit à l'extérieur de S, on aura

$$j = \lambda j',$$

ce qui montre que λ ne peut être négatif.

Si λ est positif, il devra ou bien figurer dans la série

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots,$$

ou bien être compris entre deux termes de la série, ou bien être plus grand que tous les λ_i si les λ_i ne peuvent pas croître indéfiniment.

Nous devons exclure la seconde de ces hypothèses.

Si l'on avait, en effet,

$$\lambda_i < \lambda < \lambda_{i+1},$$

on aurait :

$$(2) \qquad \int \varphi \frac{d\Phi'_i}{dn} d\omega = 0$$

et le rapport $\frac{J}{J'}$ serait égal à λ quand on y ferait $W = \varphi$ et à λ_{i+1} quand on y ferait $W = \Phi_{i+1}$; il serait donc plus grand dans le second cas que dans le premier; or cela est impossible puisque la fonction Φ_{i+1} est, par définition, de toutes celles qui satisfont aux conditions (α) celle qui rend ce rapport minimum.

Nous verrons plus loin les raisons qui me portent à penser que la troisième hypothèse doit être également rejetée.

Soit donc

$$\lambda = \lambda_i.$$

De deux choses l'une; ou bien un seul des nombres de la série $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ sera égal à λ_i de telle sorte que :

$$\lambda_{i-1} < \lambda_i < \lambda_{i+1},$$

le signe d'inégalité excluant l'égalité; alors φ sera égal à Φ_i à un facteur constant près.

Ou bien on aura, par exemple :

$$\lambda_{i-1} < \lambda_i = \lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = \ldots = \lambda_{i+n} < \lambda_{i+n+1}.$$

Dans ce cas, φ sera une combinaison linéaire de

$$\Phi_i, \quad \Phi_{i+1}, \quad \ldots, \quad \Phi_{i+n}.$$

Il est inutile d'insister sur le peu de rigueur du raisonnement qui précède bien qu'on en ait souvent employé d'analogues en Physique mathématique.

Je dois pourtant indiquer ce que sont les fonctions fondamentales dans les cas les plus simples.

Si la surface S est une sphère, la fonction fondamentale sera égale à $\mathrm{X}r^n$ à l'intérieur de S et à $\mathrm{X}r^{-(n+1)}$ à l'extérieur, X étant une fonction sphérique d'ordre n.

Si la surface S est un ellipsoïde, les fonctions fondamentales ne sont autre chose que les fonctions de Lamé.

Si l'on appelle ρ, μ, ν les coordonnées elliptiques d'un point et si $f(\rho)$ et $f_1(\rho)$ sont deux fonctions de ρ, dites fonctions de Lamé, il existe une simple couche dont le potentiel Φ est égal à l'intérieur de S au produit

$$f(\rho)f(\mu)f(\nu)$$

et à l'extérieur au produit

$$f_1(\rho)f(\mu)f(\nu).$$

Si alors nous désignons par f' et f'_1 les dérivées de f et f_1; si $\rho = \rho_0$ est l'équation de l'ellipsoïde S, on aura :

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{f'(\rho_0)}{f'_1(\rho_0)} \frac{d\Phi'}{dn},$$

ce qui montre que Φ est bien une fonction fondamentale.

2. *Développements en série.* — Soit F une fonction quelconque des coordonnées d'un point sur S; diverses analogies peuvent porter à penser que F peut se développer en série procédant suivant les fonctions fondamentales.

On aurait alors :

$$\mathrm{F} = \mathrm{A}_0\Phi_0 + \mathrm{A}_1\Phi_1 + \mathrm{A}_2\Phi_2 + \ldots,$$

les A étant des coefficients constants.

Si l'on admet la possibilité du développement, le calcul des coefficients A est facile.

Pour calculer A_i, multiplions par $\frac{d\Phi'_i}{dn}d\omega$ et intégrons, il viendra en vertu des propriétés des fonctions fondamentales :

$$\int \mathrm{F}\frac{d\Phi'_i}{dn}d\omega = \mathrm{A}_i\int \Phi_i\frac{d\Phi'_i}{dn}d\omega = -\mathrm{A}_i.$$

Une fois que l'on connaîtrait les fonctions fondamentales, il serait aisé de résoudre le problème de Dirichlet.

Soit W la somme de la série

$$A_0\Phi_0 + A_1\Phi_1 + \ldots$$

calculée pour des points x, y, z non situés sur la surface S. La fonction W serait le potentiel d'une simple couche et W se réduirait à la fonction donnée F sur la surface S.

Formons maintenant les intégrales J et J'.

En tenant compte des relations :

$$\int \sum \left(\frac{d\Phi_i}{dx}\right)^2 d\tau = \lambda_i, \qquad \int \sum \left(\frac{d\Phi_i}{dx}\frac{d\Phi_k}{dx}\right) d\tau = 0,$$

on trouve :

$$J = A_0^2\lambda_0 + A_1^2\lambda_1 + A_2^2\lambda_2 + \ldots.$$

On trouverait de même :

$$J' = A_0^2 + A_1^2 + \ldots,$$

d'où

$$\frac{J}{J'} = \frac{A_0^2\lambda_0 + A_1^2\lambda_1 + A_2^2\lambda_2 + \ldots}{A_0^2 + A_1^2 + \ldots}.$$

Le potentiel d'une simple couche est représenté par la même série

$$A_0\Phi_0 + A_1\Phi_1 + \ldots$$

à l'intérieur et à l'extérieur de S.

Il n'en est pas de même du potentiel d'une double couche. Soit W le potentiel d'une double couche et supposons que l'on ait à l'intérieur de S :

$$W = A_0\Phi_0 + A_1\Phi_1 + \ldots$$

et à l'extérieur de S :

$$W' = B_0\Phi_0 + B_1\Phi_1 + \ldots,$$

il viendra :

$$\frac{dW}{dn} = A_0\frac{d\Phi_0}{dn} + A_1\frac{d\Phi_1}{dn} + \ldots,$$

$$\frac{dW'}{dn} = B_0\frac{d\Phi'_0}{dn} + B_1\frac{d\Phi'_1}{dn} + \ldots.$$

Comme

$$\frac{d\Phi_i}{dn} = -\lambda_i\frac{d\Phi_i}{dn},$$

je puis écrire :

$$\frac{dW}{dn} = -A_0\lambda_0\frac{d\Phi'_0}{dn} - A_1\lambda_1\frac{d\Phi'_1}{dn} - \ldots$$

et comme le potentiel d'une double couche est caractérisé par la condition :

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV'}{dn},$$

il viendra :

$$B_i = - A_i \lambda_i.$$

On aura, en particulier,

$$B_0 = 0,$$

puisque λ_0 est nul.

On conclut de là :

$$J' = B_0^2 + B_1^2 + \ldots = A_0^2 \lambda_0^2 + A_1^2 \lambda_1^2 + \ldots,$$

$$J = A_0^2 \lambda_0 + A_1^2 \lambda_1 + \ldots,$$

d'où :

$$\frac{J}{J'} = \frac{\Sigma A_i^2 \lambda_i}{\Sigma A_i^2 \lambda_i^2}.$$

Dans le cas de la simple couche, nous avons trouvé la formule

$$\frac{J}{J'} = \frac{A_0^2 \lambda_0 + A_1^2 \lambda_1 + \ldots}{A_0^2 + A_1^2 + \ldots}.$$

Nous en concluons

$$\frac{J}{J'} < \lim \lambda_p \qquad (\text{pour } p = \infty).$$

En d'autres termes, on ne peut avoir quel que soit p

$$\frac{J}{J'} > \lambda_p.$$

Si donc les développements en séries qui précèdent sont légitimes, il ne peut pas, ainsi que je l'ai dit plus haut, exister de simple couche dont le potentiel ψ satisfasse à la condition :

$$\frac{d\psi}{dn} = - \lambda \frac{d\psi'}{dn},$$

λ étant un nombre plus grand que tous les λ_p.

3. *Application au problème de Neumann.* — Soit à trouver une double couche dont le potentiel W satisfasse à la condition :

$$(1) \qquad V - V' = \lambda (V + V') + 2\Phi.$$

Développons Φ en série procédant suivant les fonctions fondamentales et soit :

$$\Phi = \Sigma C_i \Phi_i.$$

Supposons de même que W soit développé en une série de même forme, de telle sorte que l'on aura à l'intérieur de S :

$$W = \Sigma A_i \Phi_i$$

et à l'extérieur de S :

$$W = -\Sigma A_i \lambda_i \Phi_i.$$

La condition (1) devient alors :

$$\Sigma A_i \Phi_i (1 + \lambda_i) = \lambda \Sigma A_i \Phi_i (1 - \lambda_i) + 2 \Sigma C_i \Phi_i,$$

d'où en identifiant :

$$A_i = \frac{2 C_i}{(1 + \lambda_i) - \lambda(1 - \lambda_i)}.$$

On a donc à l'intérieur de S :

$$W = \sum \frac{2 C_i \Phi_i}{(1 + \lambda_i) - \lambda(1 - \lambda_i)}$$

et à l'extérieur de S :

$$W = -\sum \frac{2 C_i \lambda_i \Phi_i}{(1 + \lambda_i) - \lambda(1 - \lambda_i)}.$$

Mais :

$$\frac{1}{(1 + \lambda_i) - \lambda(1 - \lambda_i)} = \frac{1}{1 + \lambda_i} + \lambda \frac{1 - \lambda_i}{(1 + \lambda_i)^2} + \dots + \lambda^m \frac{(1 - \lambda_i)^m}{(1 + \lambda_i)^{m+1}} + \dots.$$

Comme on a, d'autre part,

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \dots.$$

on devra avoir à l'intérieur de S :

$$W_m = \sum \frac{2 C_i \Phi_i}{1 + \lambda_i} \left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i} \right)^m$$

et à l'extérieur de S :

$$W_m = -\sum \frac{2 C_i \lambda_i \Phi_i}{1 + \lambda_i} \left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i} \right)^m.$$

Il est aisé de déduire de là les valeurs des intégrales que dans le chapitre I nous avons appelées $J_{m.p}$; on trouve :

$$J_{m.p} = \sum \left(\frac{2 C_i}{1 + \lambda_i} \right)^2 \lambda_i \left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i} \right)^{m+p}$$

et

$$J'_{m.p} = \sum \left(\frac{2 C_i}{1 + \lambda_i} \right)^2 \lambda_i^2 \left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i} \right)^{m+p}.$$

Toutes les propriétés de ces intégrales, rigoureusement établies plus haut, sont des conséquences immédiates de ces formules qui ne sont malheureusement elles-mêmes qu'hypothétiques.

On voit d'abord que $J_{m,p}$ et $J'_{m,p}$ ne dépendent que de la somme $m+p$, ce qui permet d'appliquer la notation à un seul indice.

Les formules qui lient J_m, J'_m, J_{m-1}, J'_{m-1}, les inégalités auxquelles satisfont ces intégrales se déduisent aussi immédiatement des formules.

On voit, par exemple, pourquoi J_{2m} est toujours positif, tandis que nous ne savons rien du signe de J_{2m+1}.

Si tous les $\left(\frac{1-\lambda_i}{1+\lambda_i}\right)$ étaient positifs, c'est-à-dire si tous les λ_i étaient plus petits que 1, nous pourrions affirmer que J_{2m+1} est toujours positif. C'est ce qui arrive pour la sphère, mais on ne saurait affirmer qu'il en soit toujours ainsi.

Les inégalités :

$$\frac{J_2}{J_0} < \frac{J_4}{J_2} < \ldots < 1$$

résultent également des formules. Quant à la limite de $\frac{J_{2m+2}}{J_{2m}}$ pour m infini, c'est la plus grande des quantités $\left(\frac{1-\lambda_i}{1+\lambda_i}\right)^2$, lesquelles quantités sont essentiellement plus petites que 1.

En rattachant ainsi à des considérations qui ne reposent que sur de fragiles aperçus, des conséquences que je suis parvenu par une autre voie à démontrer rigoureusement, j'ai voulu simplement faire comprendre quelle a été la marche de ma pensée et comment j'ai été conduit au résultat.

Mais on peut se poser le problème d'une autre manière; peut-on s'appuyer sur les différentes propositions établies au début de ce travail pour démontrer l'existence des fonctions fondamentales.

Je n'ai pu encore y réussir, mais il est évident qu'on peut tenter de le faire par des procédés analogues à celui que j'ai employé dans mon Mémoire sur les équations de la Physique mathématique inséré aux *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (1894) [1].

Considérons le développement

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \ldots.$$

D'après ce que nous avons vu, ce développement converge à l'intérieur d'un cercle de centre o et de rayon plus grand que 1. Il définit à l'intérieur de ce

(1) Ce tome, p. 123.

cercle un élément de fonction $\varphi(\lambda)$, et on peut définir cette fonction $\varphi(\lambda)$ en dehors de ce cercle par le procédé de la continuation analytique.

Étudions cette fonction $\varphi(\lambda)$.

Je dis d'abord qu'elle doit être uniforme; si en effet elle ne l'était pas, il existerait pour une même valeur de λ, deux potentiels W_1 et W_2 qui satisferaient à la fois à la condition (1) de sorte qu'on aurait :

$$W_1 - W_1' = \lambda(W_1 + W_1') + 2\Phi,$$
$$W_2 - W_2' = \lambda(W_2 + W_2') + 2\Phi.$$

De plus, cela devrait avoir lieu pour toutes les valeurs de λ comprises à l'intérieur d'un certain domaine; cela aurait donc lieu pour des valeurs imaginaires de λ et pas seulement pour des valeurs réelles.

Si je pose

$$W = W_1 - W_2,$$

on aura

$$W - W' = \lambda(W + W') \quad \text{ou} \quad W' = W\frac{1-\lambda}{1+\lambda},$$

et comme W est le potentiel d'une double couche :

$$\frac{dW'}{dn} = \frac{dW}{dn}.$$

Soit maintenant φ une fonction qui soit égale à W à l'intérieur de S et à $W\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$ à l'extérieur; on aura

$$\varphi = \varphi',$$

ce qui montre que φ est le potentiel d'une simple couche. Il vient ensuite :

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\frac{d\varphi'}{dn},$$

ce qui montre que φ est une fonction fondamentale; mais comme nous l'avons vu cela ne peut avoir lieu que si le multiplicateur $\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$ est réel. Cette circonstance ne peut donc pas se produire pour des valeurs imaginaires de λ.

C. Q. F. D.

Diverses analogies me portent à penser que la fonction $\varphi(\lambda)$ ne peut avoir de points singuliers que sur l'axe des quantités réelles; mais on peut supposer que ces points singuliers sont des pôles ou bien des points singuliers essentiels, ou bien qu'ils forment des lignes singulières.

Nous allons voir comment ces diverses hypothèses se rattachent à celles que l'on peut faire au sujet des quantités que nous avons appelées m'_p et M'_p au chapitre II.

Supposons d'abord que les quantités λ_i forment une seule série telle que :

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots,$$
$$\lim \lambda_p = \Lambda \qquad \text{pour} \quad p = \infty.$$

C'est là l'hypothèse la plus simple et celle que d'après certaines analogies nous avons adoptée jusqu'ici.

Reprenons alors la formule

$$\frac{J}{J'} = \frac{A_0^2 \lambda_0 + A_1^2 \lambda_1 + \ldots}{A_0^2 \lambda_0^2 + A_1^2 \lambda_1^2 + \ldots}$$

relative à une double couche : J'observe d'abord que λ_0 étant nul, cette formule peut s'écrire :

$$\frac{J}{J'} = \frac{A_1^2 \lambda_1 + \ldots}{A_1^2 \lambda_1^2 + \ldots}.$$

Si nous posons (*cf.* chap. II, § 1 et 2)

$$W = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \ldots + \alpha_p W_p, \tag{2}$$

les W_i étant des potentiels de doubles couches données et les α des coefficients arbitraires, nous pourrons disposer des α de façon à faire disparaître les coefficients

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots, \quad A_{p-2},$$

de sorte que nous aurons :

$$\frac{J}{J'} = \frac{A_{p-1}^2 \lambda_{p-1} + \ldots}{A_{p-1}^2 \lambda_{p-1}^2 + \ldots},$$

d'où :

$$\frac{J}{J'} \leq \frac{1}{\lambda_{p-1}}.$$

On a donc :

$$M'_p = \frac{1}{\lambda_{p-1}}.$$

Pour calculer m'_p, supposons que dans la formule (2) on détermine les W_i de façon qu'à l'intérieur de S

$$W_1 = \Phi_{q+1}, \qquad W_2 = \Phi_{q+2}, \qquad \ldots, \qquad W_p = \Phi_{q+p},$$

il vient :

$$\frac{J}{J'} = \frac{\alpha_1^2 \lambda_{q+1} + \alpha_2^2 \lambda_{q+2} + \ldots + \alpha_p^2 \lambda_{q+p}}{\alpha_1^2 \lambda_{q+1}^2 + \alpha_2^2 \lambda_{q+2}^2 + \ldots + \alpha_p^2 \lambda_{q+p}^2},$$

d'où :

$$R'_1 = \frac{1}{\lambda_{q-1}}.$$

Donc R'_1 est toujours plus grand que $\frac{1}{\Lambda}$ et on peut prendre q assez grand pour qu'il diffère aussi peu qu'on le veut de $\frac{1}{\Lambda}$.

On a donc :

$$m'_p = \frac{1}{\Lambda}.$$

Mais on peut encore faire d'autres hypothèses; on peut supposer que les λ_i au lieu de former une seule série en forment deux ou trois.

Ceux de la première série satisfont aux conditions

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots,$$
$$\lim \lambda_p = \lambda \qquad \text{pour} \quad p = \infty.$$

Ceux de la deuxième série satisfont aux conditions

$$0 = \lambda'_1 > \lambda'_2 > \ldots,$$
$$\lim \lambda'_p = \Lambda' \qquad \text{pour} \quad p = \infty.$$

On a d'ailleurs :

$$\Lambda \leq \Lambda'.$$

Si $\Lambda < \Lambda'$, on peut supposer encore qu'il existe une troisième série de quantités analogues aux λ_i et qui sont toutes comprises entre Λ et Λ'.

Dans ce cas, on a :

$$M'_p = \frac{1}{\lambda_{p-1}}, \qquad m'_p = \frac{1}{\lambda'_p}.$$

Si d'une manière quelconque, par exemple en perfectionnant les procédés du chapitre II, on parvenait à démontrer que

$$\lim m'_p = M'_p \qquad \text{pour} \quad p = \infty,$$

on pourrait par les procédés de mon Mémoire des *Rendiconti* cité plus haut, démontrer les résultats suivants :

La fonction $\varphi(\lambda)$ n'a que des pôles et un seul point singulier essentiel qui est rejeté à l'infini si l'on suppose

$$\lim m'_p = \lim M'_p = 1.$$

Si l'on considère un de ces pôles, le résidu correspondant regardé comme fonction de x, y et z est une fonction fondamentale.

CHAPITRE VII.

La méthode de Robin.

1. *La méthode de Robin et les fonctions fondamentales.* — M. Robin a récemment imaginé une méthode qui permet de résoudre le problème de la distribution électrique, et qui semble d'abord, comme celle de Neumann, n'être applicable qu'aux surfaces convexes.

Il peut être intéressant de voir comment cette méthode se rattache aux considérations précédentes.

Admettons d'abord l'existence des fonctions fondamentales et la possibilité des développements en séries dont il a été question dans le chapitre précédent.

Soit W le potentiel d'une *simple* couche satisfaisant à la condition suivante :

$$(1) \qquad \frac{dW}{dn} - \frac{dW'}{dn} = \lambda\left(\frac{dW}{dn} + \frac{dW'}{dn}\right) + 2\Phi.$$

Si nous cherchons à développer W suivant les puissances de λ, de sorte que

$$(2) \qquad W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots,$$

il viendra :

$$\frac{dW_0}{dn} - \frac{dW'_0}{dn} = 2\Phi,$$

$$\frac{dW_1}{dn} - \frac{dW'_1}{dn} = \frac{dW_0}{dn} + \frac{dW'_0}{dn},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ce qui montre que W_0 est le potentiel d'une simple couche de densité $\frac{-\Phi}{2\pi}$, W_1 le potentiel d'une simple couche de densité

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dW_0}{dn} + \frac{dW'_0}{dn}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Supposons maintenant que Φ soit développable en série sous la forme :

$$\Phi = C_0\frac{d\Phi'_0}{dn} + C_1\frac{d\Phi'_1}{dn} + \ldots.$$

Soit ensuite

$$W = A_0\Phi_0 + A_1\Phi_1 + \ldots,$$

d'où :

$$\frac{dW'}{dn} = \sum A_i\frac{d\Phi'_i}{dn}, \qquad \frac{dW}{dn} = -\sum A_i\lambda_i\frac{d\Phi'_i}{dn},$$

de sorte que la relation (1) devient :

$$-\sum A_i \frac{d\Phi_i'}{dn}(1+\lambda_i) = \lambda \sum A_i \frac{d\Phi_i'}{dn}(1-\lambda_i) + 2\sum C_i \frac{d\Phi_i'}{dn},$$

d'où :

$$A_i = \frac{-2C_i}{(1+\lambda_i)+\lambda(1-\lambda_i)}.$$

On a donc :

$$W = -2\sum \frac{C_i\Phi_i}{(1+\lambda_i)+\lambda(1-\lambda_i)}$$

et, par conséquent :

$$W_m = -2\sum \frac{C_i\Phi_i}{1+\lambda_i}\left(\frac{\lambda_i-1}{\lambda_i+1}\right)^m$$

ou :

$$(-1)^{m+1}W_m = \sum \frac{2C_i\Phi_i}{1+\lambda_i}\left(\frac{1-\lambda_i}{1+\lambda_i}\right)^m.$$

Quand m croît indéfiniment, tous les facteurs

$$\left(\frac{1-\lambda_i}{1+\lambda_i}\right)^m$$

tendent vers zéro à l'exception du facteur

$$\left(\frac{1-\lambda_0}{1+\lambda_0}\right)^m$$

qui reste égal à 1. On a donc pour $m = \infty$

$$\lim (-1)^{m+1} W_m = 2C_0\Phi_0.$$

On voit donc que si m est très grand, W_m diffère très peu du potentiel d'une simple couche dont la densité est proportionnelle à celle de l'électricité en équilibre sur la surface S.

C'est là le principe de la méthode de Robin.

Rapprochons-le du principe de la méthode de Neumann.

Pour le potentiel d'une double couche satisfaisant à la condition :

$$V - V' = \lambda(V + V') + 2\Phi,$$

nous avons trouvé à l'intérieur de S :

$$W = \sum \frac{2C_i\Phi_i}{(1+\lambda_i)-\lambda(1-\lambda_i)},$$

d'où :

$$W_m = \sum \frac{2C_i\Phi_i}{1+\lambda_i}\left(\frac{1-\lambda_i}{1+\lambda_i}\right)^m.$$

A l'extérieur de S, C_i doit être remplacé par $-C_i\lambda_i$.

On a donc pour $m = \infty$ à l'intérieur de S

$$\lim W_m = 2 C_0 \Phi_0 = \text{const.}$$

et à l'extérieur de S

$$\lim W_m = -2 C_0 \lambda_0 \Phi_0 = 0.$$

De ces deux formules, il serait aisé de déduire tous les théorèmes de Neumann.

Revenons à la méthode de Robin. Si nous supposons que la fonction Φ donnée qui figure dans la relation (1) soit telle que $C_0 = 0$, c'est-à-dire telle que

$$\int \Phi \, d\omega = 0,$$

on a pour m infini :

$$\lim W_m = 0.$$

On voit de plus que la série

$$W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \ldots$$

converge pour

$$|\lambda| \leq 1.$$

Or pour $\lambda = 1$ la relation (1) devient :

$$\frac{dV}{dn} = -\Phi.$$

Pour $\lambda = -1$, elle devient :

$$\frac{dV}{dn} = \Phi.$$

On voit donc que la méthode de Robin permet de trouver une fonction harmonique soit à l'extérieur de S, soit à l'intérieur de S, étant donnée la valeur de la dérivée $\frac{dV}{dn}$ en tous les points de S.

2. *La méthode de Robin et le problème de Neumann.* — Ce qui précède nous fait déjà prévoir que la méthode de Robin est applicable à toutes les surfaces simplement connexes. Mais l'aperçu du paragraphe précédent n'a aucun caractère de rigueur. Rapprochons donc d'une autre manière la méthode de Robin et celle de Neumann.

Soit w le potentiel d'une simple couche satisfaisant à la condition

$$(1) \qquad \frac{dw}{dn} - \frac{dw'}{dn} = \lambda \left(\frac{dw}{dn} + \frac{dw'}{dn} \right) + 2\varphi.$$

Je pose d'ailleurs

$$w = w_0 + \lambda w_1 + \lambda^2 w_2 + \ldots.$$

Soit maintenant W le potentiel d'une double couche satisfaisant à

$$(2) \qquad V - V' = \lambda(V + V') + 2\Phi$$

et développable sous la forme

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \ldots.$$

Je suppose que la fonction φ soit donnée, nous calculerons w_0, w_1, ..., par récurrence à l'aide des formules :

$$\frac{dw_0}{dn} - \frac{dw'_0}{dn} = 2\varphi,$$

$$\frac{dw_1}{dn} - \frac{dw'_1}{dn} = \frac{dw_0}{dn} + \frac{dw'_0}{dn},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous savons que la méthode de Neumann, applicable à toutes les surfaces simplement connexes, nous permet de trouver une double couche dont le potentiel W satisfasse à la condition

$$V = \text{fonction donnée.}$$

Nous pourrons donc choisir W_0 de telle façon que

$$V_0 = v_0,$$

d'où

$$W_0 = w_0 \quad (\text{à l'intérieur de S})$$

et

$$\frac{dW_0}{dn} = \frac{dw_0}{dn}.$$

On calculera ensuite par récurrence W_1, W_2, ..., à l'aide des formules :

$$W_1 - W'_1 = W_0 + W'_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Posons

$$2u_0 = \frac{dw_0}{dn} + \frac{dw'_0}{dn}, \qquad 2U_0 = W_0 + W'_0,$$

et soient u'_0, U'_0 les valeurs de u_1 et U_1 au point x', y', z' ; soit r la distance des points x, y, z, x', y', z' ; conservons aux notations $d\omega'$ et $d\sigma'$ le même sens que plus haut; soient α', β', γ' les cosinus directeurs de $d\omega'$; soit enfin, pour une fonction quelconque f de x', y', z' :

$$\frac{df}{dn'} = \alpha' \frac{df}{dx'} + \beta' \frac{df}{dy'} + \gamma' \frac{df}{dz'};$$

il viendra :

$$(3) \qquad w_1 = \int \frac{u'_0\, d\omega'}{2\pi r}; \qquad W_1 = \int \frac{U'_0\, d\sigma'}{2\pi} = \int \frac{U'_0\, d\omega'}{2\pi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn}.$$

Tenons compte maintenant des relations :

$$V_0 = v_0 = v'_0, \qquad \frac{dV'_0}{dn} = \frac{dV_0}{dn} = \frac{dv_0}{dn},$$

d'où l'on déduit :

$$2u_0 = \frac{dV'_0}{dn} + \frac{dv'_0}{dn}, \qquad 2U_1 = v'_0 + V'_0.$$

Si donc nous posons à l'extérieur de S :

$$W_0 + w_0 = T$$

et si T' est la valeur de T au point x', y', z', on aura à la surface de S :

$$T' = 2U'_0; \qquad \frac{dT'}{dn'} = 2u'_0.$$

Or le théorème de Green nous donne quand le point x, y, z est intérieur à S :

$$\int \frac{dT'}{dn} \frac{d\omega'}{r} = \int T'\, d\omega' \frac{d\frac{1}{r}}{dn'}.$$

On aura donc à l'intérieur de S

$$W_1 = -w_1.$$

On trouverait de même par récurrence à l'intérieur de S :

$$W_2 = w_2, \qquad W_3 = -w_3, \qquad \ldots.$$

Mais nous savons que la série :

$$(W_0 - 2C) + (W_1 - 2C) + \ldots + (W_m - 2C) + \ldots$$

converge absolument et uniformément si la constante C est convenablement choisie.

Il en sera donc de même à l'intérieur de S de la série

$$(w_0 - 2C) + (w_1 - 2C) + \ldots + (w_m - 2C) + \ldots.$$

Si

$$\int \varphi\, d\omega = 0,$$

la constante C est nulle.

Nous désignerons l'intégrale

$$\int \sum \frac{dw_m}{dx} \frac{dw_p}{dx} d\tau$$

par $j_{m.p}$ ou par $j'_{m.p}$ suivant qu'elle sera étendue à l'intérieur ou à l'extérieur de S.

On verrait comme au chapitre I que ces intégrales ne dépendent que de la somme des indices m et p, ce qui nous permettra de remplacer la notation $j_{m.p}$, $j'_{m.p}$ par la notation à un seul indice j_{m+p}, j'_{m+p}.

Nous trouverions ensuite

$$j_m + j'_m = j_{m-1} - j'_{m-1}.$$

De plus, j_{2m}, j'_{2m} sont positifs et l'on peut assigner une limite supérieure et inférieure au rapport $\frac{j_{2m}}{j'_{2m}}$ *pourvu que* $\int \varphi \, d\omega = 0$ *et que par conséquent, la simple couche qui engendre* w_m *ait sa masse totale nulle* (*cf.* chap. II, § 5).

On tirera donc de là les mêmes conclusions qu'en ce qui concerne la méthode de Neumann et l'on aura :

$$j_{2m} + j'_{2m} < BL^{2m} \qquad (L < 1),$$

B étant un nombre donné.

Nous avons d'ailleurs :

$$j_{2m} = J_{2m} < AL^{2m}$$

et comme nous pouvons assigner une limite supérieure M au rapport $\frac{j'_{2m}}{j_{2m}}$, nous aurons

$$j'_{2m} < AML^{2m}.$$

Nous savons que si les constantes C, D et L_1 ($L_1 < 1$) sont convenablement choisies, on aura :

$$|W_m - 2C| < DL_1^m.$$

On a donc à l'intérieur de S

$$|w_m - 2C| < DL_1^m.$$

Si

$$\int \varphi \, d\omega = 0,$$

la constante C est nulle et on aura à l'intérieur de S :

$$|w_m| < DL_1^m.$$

On aura donc sur S

$$|v_m| = |v'_m| < DL_1^m$$

et comme $|w_m|$ ne peut atteindre son maximum que sur S, on aura à l'extérieur de S

$$|w_m| < DL_1^m.$$

Donc la série

$$w_0 + \lambda w_1 + \ldots$$

converge absolument et uniformément pour $|\lambda| \leqq 1$. *La méthode de Robin est donc comme celle de Neumann applicable à toutes les surfaces simplement connexes.*

Résumé. — Nous savons que la méthode dite du balayage permet de démontrer le principe de Dirichlet dans le cas général.

Mais si cette méthode est très bonne comme procédé de démonstration, elle est inférieure comme procédé de calcul à celle de Neumann. Celle-ci malheureusement n'était jusqu'ici applicable qu'aux surfaces convexes.

En m'appuyant sur le principe de Dirichlet supposé démontré par la méthode de balayage, j'ai montré que la méthode de Neumann (de même que celle de Robin) conduit à la solution du problème de Dirichlet aux conditions suivantes :

1° Si la surface S est simplement connexe;

2° Si cette surface a partout un plan tangent et deux rayons de courbure principaux déterminés;

3° Si la fonction donnée Φ a des dérivées de tous les ordres.

Toutes ces restrictions sont probablement inutiles et tout porte à penser que le théorème est vrai dans tous les cas. Mais je ne l'ai démontré qu'avec ces restrictions.

Après avoir établi ces résultats d'une facon rigoureuse, j'ai cru devoir dans les deux derniers chapitres, donner une idée des aperçus qui m'avaient d'abord conduit à les deviner. J'ai pensé que, malgré leur peu de rigueur, ils pouvaient être utiles comme procédés d'investigation, puisque je m'en étais déjà servi une fois avec succès.

SUR

L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS ÉLASTIQUE

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 122, p. 154-159 (27 janvier 1896).

Le problème de l'équilibre élastique d'un corps peut s'énoncer analytiquement comme il suit :

Trouver trois fonctions ξ, η, ζ qui, à l'intérieur du corps, satisfassent aux équations

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta\xi=0,\\
&(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dy}+\mu\Delta\eta=0\qquad \left(\theta=\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right),\\
&(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dz}+\mu\Delta\zeta=0,
\end{aligned}
\right.
$$

et qui, à la surface du corps, que j'appellerai S, *sont telles que les trois expressions*

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{P}_x &= l\lambda\theta+\mu\left(l\frac{d\xi}{dx}+m\frac{d\xi}{dy}+n\frac{d\xi}{dz}\right)+\mu\left(l\frac{d\xi}{dx}+m\frac{d\eta}{dx}+n\frac{d\zeta}{dx}\right),\\
\mathrm{P}_y &= l\lambda\theta+\mu\left(l\frac{d\eta}{dx}+m\frac{d\eta}{dy}+n\frac{d\eta}{dz}\right)+\mu\left(l\frac{d\xi}{dy}+m\frac{d\eta}{dy}+n\frac{d\zeta}{dy}\right),\\
\mathrm{P}_z &= l\lambda\theta+\mu\left(l\frac{d\zeta}{dx}+m\frac{d\zeta}{dy}+n\frac{d\zeta}{dz}\right)+\mu\left(l\frac{d\xi}{dz}+m\frac{d\eta}{dz}+n\frac{d\zeta}{dz}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

(où l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale à S, *c'est-à-dire à la surface du corps) prennent des valeurs données d'avance.*

Je commencerai par résoudre le problème suivant : je chercherai trois fonctions ξ, η, ζ qui satisfont aux équations (1) non seulement à l'intérieur de S,

mais à l'extérieur de S. Je supposerai que ces fonctions sont continues quand on traverse S, mais que leurs dérivées ne le sont pas. Les expressions (2) subissent donc une variation brusque quand on franchit cette surface ; j'appellerai P_x, P_y, P_z les valeurs de ces expressions du côté interne ; j'appellerai P_x^0, P_y^0, P_z^0 les valeurs qu'elles prennent du côté externe.

Je suppose alors qu'on se donne les différences $P_x^0 - P_x$, $P_y^0 - P_y$, $P_z^0 - P_z$, et je cherche à déterminer ξ, η, ζ.

Pour cela, soient ξ', η', ζ' les potentiels de trois surfaces attirantes, coïncidant toutes trois avec S et dont les densités superficielles sont respectivement

$$\frac{1}{4\pi}(P_x^0 - P_x), \quad \frac{1}{4\pi}(P_y^0 - P_y), \quad \frac{1}{4\pi}(P_z^0 - P_z).$$

Soient ensuite

$$(\lambda + 2\mu)\theta = \frac{d\xi'}{dx} + \frac{d\eta'}{dy} + \frac{d\zeta'}{dz}.$$

Soit u le potentiel d'un volume attirant remplissant tout l'espace et dont la densité est $\frac{\theta}{4\pi}$.

Les fonctions cherchées ξ, η, ζ nous seront données par les formules

$$\mu\xi = \xi' + (\lambda + \mu)\frac{du}{dx},$$

$$\mu\eta = \eta' + (\lambda + \mu)\frac{du}{dy},$$

$$\mu\zeta = \zeta' + (\lambda + \mu)\frac{du}{dz}.$$

Ce problème une fois résolu, proposons-nous de trouver trois fonctions ξ, η, ζ satisfaisant aux conditions

$$(3) \qquad \begin{cases} P_x^0 - P_x = k(P_x^0 + P_x) + 2X, \\ P_y^0 - P_y = k(P_y^0 + P_y) + 2Y, \\ P_z^0 - P_z = k(P_z^0 + P_z) + 2Z, \end{cases}$$

où k est une indéterminée et X, Y, Z trois fonctions données.

Pour $k = 1$, ces conditions se réduisent à

$$P_x = -X, \qquad P_y = -Y, \qquad P_z = -Z,$$

de sorte que, si nous pouvons satisfaire aux équations (3) pour $k = 1$, nous aurons résolu le problème de l'équilibre élastique.

Développons ξ, η, ζ, P_x, P^0_x, ..., suivant les puissances de k et soit ξ_n, η_n, ζ_n; $P_{n,x}$, $P^0_{n,x}$ les coefficients de k^n dans ces différents développements ; il viendra

$$(4)\qquad \begin{cases} P^0_{0,x} - P_{0,x} = 2X, \\ P^0_{n,x} - P_{n,x} = P^0_{n-1,x} + P_{n-1,x}. \end{cases}$$

Les équations (4) permettent alors, par le procédé exposé plus haut, de déterminer par récurrence ξ_0, η_0, ζ_0 ; puis ξ_1, η_1, ζ_1 ; puis ξ_2, η_2, ζ_2, ...

Il s'agit de savoir quel est le rayon de convergence des séries et si ce rayon est plus grand que 1.

Soient

$$J_{m,n} = \int (\xi_m P_{n,x} + \eta_m P_{n,y} + \zeta_m P_{n,z})\, d\omega,$$

$$J'_{m,n} = \int (\xi_m P^0_{n,x} + \eta_m P^0_{n,y} + \zeta_m P^0_{n,z})\, d\omega,$$

les intégrations sont étendues à tous les éléments $d\omega$ de S.

J'observe d'abord que, en vertu d'un théorème analogue à celui de Green,

$$J_{m,n} = J_{n,m}, \qquad J'_{m,n} = J'_{n,m}.$$

Les équations (4) me donnent ensuite

$$J'_{m,n} + J_{m,n} = J'_{m,n-1} - J_{m,n-1}.$$

On en déduit que

$$J'_{m,n} = J_{0,m+n}, \qquad J'_{m,n} = J'_{0,m+n}.$$

Cela nous permet d'écrire avec un seul indice J_{m+n} et J'_{m+n} au lieu de $J_{m,n}$ et de $J'_{m,n}$.

J'observe ensuite que

$$J_{2m} = J_{m,m} > 0.$$

Cette intégrale est en effet égale à l'intégrale triple

$$\int d\tau \left\{ \lambda\theta_m^2 + 2\mu \left[\sum \left(\frac{d\xi_m}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum \left(\frac{d\zeta_m}{dy} + \frac{d\eta_m}{dz}\right)^2 \right] \right\}$$

étendue à tout le volume du corps. De même, J'_{2m} est positif.

On en conclut que le rapport $\frac{J_{2m+2}}{J_{2m}}$ va constamment en croissant, de même que $\frac{J'_{2m+2}}{J'_{2m}}$; de même le rapport $\frac{J'_{2m+2} + J_{2m+2}}{J'_{2m} + J_{2m}}$ croît toujours, mais il reste toujours plus petit que 1.

Si l'on voulait se contenter d'un aperçu analogue à ceux dont on a si souvent usé en Physique mathématique, on pourrait raisonner comme il suit.

Cherchons le rayon de convergence de notre série et admettons que cette convergence soit uniforme ; alors on verrait que le rayon de convergence minimum sera le même que celui des séries

$$J_0 + k^2 J_2 + k^4 J_4 + \ldots,$$
$$J'_0 + k^2 J'_2 + k^4 J'_4 + \ldots.$$

Ce rayon est au moins égal à 1 et il est plus grand que 1 si l'on peut assigner au rapport $\frac{J'_{2m}}{J_{2m}}$, une limite supérieure finie et une limite inférieure plus grande que zéro.

J'_{2m} ne peut s'annuler que si l'on a en tous les points extérieurs à S

$$(5)\qquad \frac{d\xi_m}{dx} = \frac{d\eta_m}{dy} = \frac{d\zeta_m}{dz} = \frac{d\zeta_m}{dy} + \frac{d\eta_m}{dz} = \frac{d\xi_m}{dz} + \frac{d\zeta_m}{dx} = \frac{d\eta_m}{dx} + \frac{d\xi_m}{dy} = 0.$$

De même J_{2m} ne peut s'annuler que si les mêmes relations ont lieu en tous les points intérieurs à S.

Or ces relations entraînent les suivantes :

$$(6)\qquad \xi_m = a + qz - ry, \qquad \eta_m = b + rx - pz, \qquad \zeta_m = c + py - qx,$$

a, b, c, p, q, r étant des constantes.

A l'extérieur de S, les relations (6) ne peuvent évidemment avoir lieu que si ces six constantes sont nulles, puisque ξ_m, η_m, ζ_m doivent être nulles à l'infini.

Si donc

$$J'_{2m} = 0,$$

on aura

$$\xi_m = \eta_m = \zeta_m = 0,$$

d'où

$$J_{2m} = 0.$$

Supposons maintenant que J_{2m} soit nul ; les relations (6) devront être satisfaites à l'intérieur de S et, par conséquent, sur S elle-même.

D'autre part, nous devons supposer que les fonctions données X, Y, Z satisfassent aux conditions de l'équilibre d'un corps solide qui s'écrivent

$$(7)\qquad \begin{cases} \int X\,d\omega = \int Y\,d\omega = \int Z\,d\omega = \int (yZ - zY)\,d\omega \\ \qquad = \int (zX - xZ)\,d\omega = \int (xY - yX)\,d\omega = 0. \end{cases}$$

$d\omega$ est un élément de la surface S.

Les conditions (7) entraînent les relations suivantes :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \int P^0_{m,x}\, d\omega &= \int (z P_{m,y} - y P_{m,z})\, d\omega \\ &= \int P^0_{m,x}\, d\omega = \int (z P^0_{m,y} - y P^0_{m,z})\, d\omega = 0, \end{aligned}\right.$$

avec celles qu'on en déduit par symétrie.

Si alors les relations (6) ont lieu à l'intérieur de S, et par conséquent aussi sur la surface S elle-même, on aura, en vertu des équations (8),

$$J'_{2m} = 0.$$

Ainsi, J_{2m} ne peut s'annuler sans que J'_{2m} s'annule et inversement. Donc le rapport $\frac{J'_{2m}}{J_{2m}}$ ne peut ni s'annuler, ni devenir infini, et nous pouvons lui assigner une limite supérieure M et une limite inférieure $\frac{1}{M}$.

On en conclut, par un procédé connu, l'inégalité

$$\frac{J'_{2m+2} + J_{2m+2}}{J'_{2m} + J_{2m}} < \left(\frac{1-M}{1+M}\right)^2,$$

ce qui prouve que le rayon de convergence est plus grand que $\frac{1+M}{1-M}$.

Cette démonstration laisse à désirer, il y aurait lieu de la compléter ; je signale cette question aux chercheurs ; on pourrait employer, en les modifiant quelque peu, les procédés dont je me suis servi dans mes recherches sur la méthode de Neumann, avec laquelle la méthode exposée ici présente une parenté évidente.

SUR

LA PROPAGATION DE L'ÉLECTRICITÉ

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 117, p. 1027-1032 (26 décembre 1893).

On a représenté les variations du potentiel électrique dans un fil qui transmet une perturbation électrique par l'équation

$$A\frac{d^2V}{dt^2} + 2B\frac{dV}{dt} = C\frac{d^2V}{dx^2},$$

qui est connue sous le nom d'*équation des télégraphistes*. V est le potentiel, A, B, C sont des constantes; le premier terme provient de la self-induction, le second de la résistance ohmique, le second membre de la capacité du fil.

On peut, en choisissant convenablement les unités, réduire l'équation à la forme

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 2\frac{dV}{dt} = \frac{d^2V}{dx^2};$$

l'unité de vitesse est alors la vitesse de la lumière. Si l'on pose

$$V = Ue^{-t},$$

l'équation devient

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{d^2U}{dx^2} + U. \tag{1}$$

Pour que le problème soit déterminé, il faut que l'on se donne les conditions initiales; je suppose donc que, pour $t = 0$, U se réduit à une fonction donnée $f(x)$, que je mettrai sous la forme d'une intégrale de Fourier

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(q)\, e^{iqx}\, dq,$$

et que $\frac{dU}{dt}$, pour $t = 0$, se réduit à une fonction donnée

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_1(q) e^{iqx} dq.$$

Je puis alors mettre l'intégrale de (1) sous la forme

$$(2) \qquad U = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqx} \left[\theta \cos t \sqrt{q^2 - 1} + \theta_1 \frac{\sin t \sqrt{q^2 - 1}}{\sqrt{q^2 - 1}} \right] dq,$$

ou bien

$$(3) \qquad U = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha e^{i[qx + t\sqrt{q^2 - 1}]} dq + \int_{-\infty}^{+\infty} \beta e^{i[qx - t\sqrt{q^2 - 1}]} dq,$$

où

$$\alpha = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta_1}{2i\sqrt{q^2 - 1}}, \qquad \beta = \frac{\theta}{2} - \frac{\theta_1}{2i\sqrt{q^2 - 1}}.$$

Discutons ces résultats et, pour fixer les idées, supposons que $f(x)$ et $f_1(x)$ soient nuls pour

$$x > a \qquad \text{ou} \qquad x < b$$

et soient égaux à des polynomes entiers en x pour

$$a > x > b.$$

Alors α et β peuvent se mettre sous la forme

$$\alpha = \alpha' e^{-iqa} + \alpha'' e^{-iqb}, \qquad \beta = \beta' e^{-iqa} + \beta'' e^{-iqb},$$

α', α'', β' et β'' étant développables suivant les puissances de $\frac{1}{q}$ quand q est assez grand.

Si alors nous mettons U sous la forme (3), la première intégrale du second membre de (3) s'écrira

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha' e^{-iqa} + \alpha'' e^{-iqb}) e^{iq(x+t)} \psi(q, t) dq,$$

où

$$\psi(q, t) = e^{it[\sqrt{q^2 - 1} - q]}$$

est développable pour q suffisamment grand, suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{q}$ et de t. Alors, en vertu d'un théorème facile à démontrer, cette intégrale est une fonction holomorphe de x et de t, pour $t = 0$, et pour toutes les valeurs réelles de x, sauf pour

$$x = a - t, \qquad x = b - t.$$

De même, la seconde intégrale du second membre de (3) sera holomorphe, sauf pour

$$x = a + t, \qquad x = b + t.$$

Ainsi, pour $t = 0$, U sera une fonction holomorphe de x et de t, sauf pour

$$x = a \pm t, \qquad x = b \pm t.$$

Les valeurs initiales de U et de $\frac{dU}{dt}$ étant nulles pour $x > a$ et $x < b$, il en résulte que U sera nul pour

$$x > a + t \qquad \text{et} \qquad x < b - t.$$

On voit également que la fonction U possède quatre discontinuités

$$x = a \pm t, \qquad x = b \pm t,$$

qui se propagent avec une vitesse constante égale à celle de la lumière.

Pour pousser cette étude plus loin, commençons par faire une hypothèse particulière.

Soient $f = 0$ pour toutes les valeurs de x et $f_1 = 0$ pour toutes les valeurs de x non comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, $f_1 = \frac{\pi}{2}$ pour $-\varepsilon < x < \varepsilon$. On en conclut, si ε est très petit,

$$\theta = 0, \qquad \theta_1 = 1$$

et

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqx} \frac{\sin t\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{q^2-1}} dq = \int \frac{e^{i[qx + t\sqrt{q^2-1}]}}{2i\sqrt{q^2-1}} dq - \int \frac{e^{i[qx - t\sqrt{q^2-1}]}}{2i\sqrt{q^2-1}} dq.$$

Les deux intégrales du troisième membre doivent être prises le long d'un chemin allant de $-\infty$ à $+\infty$, mais passant au-dessus de l'axe des quantités réelles, de façon à éviter les points singuliers $q = \pm 1$.

La théorie des intégrales imaginaires de Cauchy montre que la première intégrale du troisième membre est égale à 0 pour $x + t > 0$ et à

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi} e^{t\sin\varphi} d\varphi = \Lambda(x, t)$$

pour $x + t < 0$.

De même, la seconde intégrale est égale à 0 pour $x + t > 0$ et à $\Lambda(x, t)$ pour $x - t < 0$.

On a donc

$$\begin{aligned} U &= 0 \quad \text{pour} \quad x > t, \\ U &= A \quad \text{pour} \quad t > x > -t, \\ U &= 0 \quad \text{pour} \quad x < -t. \end{aligned}$$

On trouve d'ailleurs aisément

$$A(x, t) = \pi \sum \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{(x^2 - t^2)^n}{(n!)^2} = \pi J_0(\sqrt{x^2 - t^2}),$$

J_0 étant la fonction de Bessel.

Soit maintenant $\theta = 0$, mais θ_1 quelconque; ou, ce qui revient au même, f nul et f_1 quelconque; nous supposerons toutefois que f_1 est nul pour $x > a$ et $x < b$ et différent de o quand x est compris entre b et a.

On a alors

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_1 e^{iqx} \frac{\sin t\sqrt{q^2 - 1}}{\sqrt{q^2 - 1}} dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz f_1(z)}{2\pi} K,$$

où l'on a posé

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iq(x-z)} \sin t\sqrt{q^2 - 1}}{\sqrt{q^2 - 1}} dq.$$

On voit que

$$K = 0 \quad \text{pour} \quad z > x + t \quad \text{ou} \quad z < x - t$$

et

$$K = A(x - z, t) \quad \text{pour} \quad x + t > z > x - t.$$

Comme d'autre part, f_1 est nul sauf entre b et a, nous aurons $\left(\text{si } t > \frac{a-b}{2}\right)$ cinq hypothèses à distinguer :

$$(4) \quad \begin{cases} 1^\circ & x > a + t, & U = 0, \\ 2^\circ & a - t > x > b + t, & U = \displaystyle\int_{x-t}^{a} \frac{f_1(z)}{2\pi} A(x - z, t)\, dz, \\ 3^\circ & b + t > x > a - t, & U = \displaystyle\int_{b}^{a} \frac{f_1(z)}{2\pi} A\, dz, \\ 4^\circ & a - t > x > b - t, & U = \displaystyle\int_{b}^{x+t} \frac{f_1(z)}{2\pi} A\, dz, \\ 5^\circ & b - t > x, & U = 0. \end{cases}$$

Soit maintenant f_1 nul, et f différent de o entre b et a, mais nul encore pour $x > a$ ou $x < b$. Il vient

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \cos t\sqrt{q^2 - 1}\, dq,$$

de sorte que, pour passer du cas précédent à celui-ci, il suffit de changer θ_1 en θ (et f_1 en f), et de différentier par rapport à t. On trouve ainsi dans nos cinq hypothèses :

$$(5)\quad \begin{cases} 1^{\circ} & x > a+t, & U = 0, \\ 2^{\circ} & a+t > x > b+t, & U = \displaystyle\int_{x-t}^{a} \frac{f}{2\pi}\frac{d\Lambda}{dt}\,dz + \frac{f(x-t)}{2\pi}\Lambda(t,t), \\ 3^{\circ} & b+t > x > a-t, & U = \displaystyle\int_{b}^{a} \frac{f}{2\pi}\frac{d\Lambda}{dt}\,dz, \\ 4^{\circ} & a-t > x > b-t, & U = \displaystyle\int_{b}^{x+t} \frac{f}{2\pi}\frac{d\Lambda}{dt}\,dz + \frac{f(x+t)}{2\pi}\Lambda(-t,t), \\ 5^{\circ} & b-t > x, & U = 0. \end{cases}$$

Observons d'ailleurs que

$$\Lambda(t,t) - \Lambda(-t,t) = \pi.$$

Nous avons ainsi la solution complète de deux cas particuliers, celui où f est nul et celui où f_1 est nul. Il est clair que l'on résoudrait le cas général, en ajoutant ces deux solutions particulières.

Les résultats précédents peuvent donner lieu à diverses observations ; on voit d'abord que la *tête* de la perturbation se propage avec une certaine vitesse, de telle sorte que, en avant de cette tête, la perturbation est nulle, contrairement à ce qui se passe dans la théorie de la chaleur de Fourier et conformément aux lois de la propagation de la lumière ou du son par ondes planes, déduites de l'équation des cordes vibrantes. Mais il y a, avec ce dernier cas, une différence importante, car la perturbation, en se propageant, laisse derrière elle un résidu qui n'est pas nul ; car U ne s'annule pas pour $b+t > x > a-t$.

Si $a-b$ est très petit, c'est-à-dire si la perturbation est de très courte durée, les termes qui, dans les équations (4) et (5), sont exprimées par des intégrales sont très petits, tandis que les termes débarrassés du signe $\int$ restent finis. On a donc sensiblement

$$U = \frac{1}{2}f(x-t) \qquad \text{pour} \quad a+t > x > b+t,$$

$$U = \frac{1}{2}f(x+t) \qquad \text{pour} \quad a-t > x > b-t,$$

$$U = 0 \qquad \text{dans tous les autres cas.}$$

Le résidu est donc négligeable devant la perturbation principale ; mais il n'en

est plus de même si la perturbation est de longue durée et si $a - b$ est fini. Le résidu peut alors troubler les observations.

Je crois qu'il ne sera pas inutile de se rappeler ces résultats quand on voudra discuter les expériences relatives à la vitesse de propagation de l'électricité.

Des questions du même genre avaient été abordées par des méthodes toutes différentes, par le regretté Hugoniot, dans ses Mémoires des LVIIe et LVIIIe Cahiers du *Journal de l'École Polytechnique*; les méthodes que je propose conduisent à une solution plus complète et à des démonstrations plus rigoureuses.

NOTES ET COMMENTAIRES.

XXIII.
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

M. Jacques Hadamard a publié dans le tome 38 (1921) des *Acta Mathematica* consacré à l'œuvre de Henri Poincaré, une analyse approfondie des plus importants travaux de H. Poincaré. Nous reproduisons en tête de ces Notes la partie de cette analyse relative aux équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique.

L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE DE HENRI POINCARÉ

par Jacques Hadamard.

III. — **Les équations aux dérivées partielles et les problèmes de la Physique mathématique.**

Même après l'évolution qui a augmenté l'importance des équations différentielles ordinaires pour la Physique mathématique, celle-ci continue — et continuera — à s'appuyer sur les *équations aux dérivées partielles*.

Pour ces dernières également, et plus nettement même que pour les précédentes, la solution telle qu'on la concevait primitivement — ce qu'on a appelé l'intégration *formelle* — est hors de cause. Non seulement l'*intégrale générale*, par le moyen des symboles élémentaires connus, est le plus souvent introuvable; mais même une fois obtenue, elle ne rend pas les mêmes services que dans le cas des équations différentielles et ne dispense pas de recherches aussi difficiles ou plus difficiles que celles qui ont conduit à l'écrire, lorsqu'on veut l'appliquer aux véritables problèmes qui se posent le plus généralement.

Les difficultés que ceux-ci présentent peuvent être, suivant les cas, de nature très différente.

Il peut arriver qu'elles ressemblent, avec des différences de degré, à ce qu'elles

sont pour les équations différentielles, de sorte que la solution puisse être considérée, au point de vue théorique, comme fournie localement par les méthodes de Cauchy, quitte, dans une seconde partie du travail, à faire la synthèse des différents éléments de solution ainsi obtenus.

C'est ce qui se passe — l'équation étant supposée introduite par l'étude d'un phénomène physique — lorsque celui-ci se déroule librement dans l'espace illimité, et où, par conséquent, pour définir son évolution, il suffit de se donner les *conditions initiales*, c'est-à-dire son état à un instant déterminé.

Mais si le phénomène a pour théâtre une enceinte limitée par des parois, de sorte que pour achever de le définir, il faut écrire un système de *conditions aux limites*, exprimant le rôle joué par les parois en questions, une difficulté d'un tout autre ordre apparaît.

Il est encore vrai que, au voisinage d'un point quelconque, la solution est le plus souvent représentable par des développements en séries du même type que dans les problèmes précédents. Mais, cette fois, aucun de ces *éléments* de solution — non pas même le premier [1], comme il arrivait pour les équations différentielles ordinaires — ne peut être déterminé isolément : la connaissance de chacun d'eux est inséparable de celle de *tous* les autres.

C'est le renversement du principe même qui, en toutes les autres circonstances, guide la marche du calcul intégral : la division de la difficulté en une difficulté locale et une difficulté de synthèse. Une telle division est ici radicalement impossible.

Aussi l'apparition de ces sortes de problèmes — et surtout du premier de tous, celui qui leur a servi de type, le problème de Dirichlet — a-t-elle changé profondément toute l'allure de la Mathématique moderne.

Cet exemple est précisément celui que Poincaré a choisi pour montrer comment la Physique impose aux mathématiques des problèmes auxquels elle n'aurait pas songé à elle seule. On voit qu'il n'en pouvait exister de plus typique.

Un tel problème ne pouvait manquer d'attirer l'attention de Poincaré comme il avait attiré celle de plusieurs de ses prédécesseurs. La nouvelle solution qu'il y apporta, la méthode du *balayage*, s'inspire très directement de la nature même de la question, de cette interdépendance mutuelle de toutes les parties de la solution telle que nous venons de la signaler.

Mais, alors que la méthode du balayage elle-même se rattache aux autres travaux antérieurement consacrés à la théorie du problème de Dirichlet [2], cette théorie devait peu après entrer dans une phase toute nouvelle et subir une révolution profonde dont l'utilité ressort, elle aussi, des remarques précédentes.

Son principe consiste à remplacer l'équation *aux dérivées partielles*, ainsi que

---

(1) Rien ne conduit d'ailleurs à établir entre les éléments en question un ordre déterminé : à considérer spécialement l'un d'entre eux plutôt qu'un autre comme le premier.

(2) Elle se distingue des méthodes d'approximations successives proposées jusqu'à lui surtout en ce que celles-ci, dans le choix des expressions destinées à servir de points de départ, se préoccupaient tout d'abord de satisfaire dès l'abord à l'équation aux dérivées partielles, les autres conditions du problème devant être vérifiées par le jeu des retouches successives. Poincaré, le premier, guidé par l'interprétation physique de ses calculs, songea à faire l'inverse.

les autres conditions auxquelles doit satisfaire la fonction inconnue, par une équation *intégrale*. Au lieu de faire figurer l'inconnue sous des signes de dérivation, on la fait apparaître sous un signe d'intégration.

Les premiers sont évidemment une sorte de microscope par laquelle on représente des relations dans l'infiniment petit. Le second, au contraire, est essentiellement synthèse et non analyse. Point n'est besoin dès lors de longues explications pour comprendre comment son emploi est autrement bien adapté aux circonstances dont nous avons parlé que celui de la différentiation.

Ce changement complet d'orientation dans l'étude du problème de Dirichlet et de tous les problèmes analogues de la Physique mathématique évoque, tout d'abord, le nom de M. Fredholm.

On se tromperait cependant du tout au tout en n'y rattachant pas également, et d'une manière très étroite, celui de Poincaré. Ce serait méconnaître cette vérité aujourd'hui banale que les manifestations les plus importantes, les plus inattendues de l'esprit humain sont le produit non seulement du cerveau de leur auteur, mais de toute l'époque qui les a vu naître.

Or notre époque, au point de vue mathématique, c'est avant tout, Poincaré.

Voyons comment son œuvre a été une condition indispensable, la naissance de la nouvelle méthode.

La première étape qui devait conduire à celle-ci peut être cherchée dans le célèbre travail de M. Schwarz inséré, à l'occasion du jubilé de Weierstrass, dans les *Acta Societatis Fennicæ* (1885).

Le point de départ de M. Schwarz est une question de pure analyse empruntée au Calcul des Variations. Mais le résultat obtenu admet une interprétation physique immédiate. L'équation aux dérivées partielles considérée par M. Schwarz est immédiatement liée à celle qui gouverne les vibrations d'une membrane tendue et ce qu'il obtient, c'est le *son fondamental* lequel se présente comme correspondant à la valeur qu'il faut donner à un certain paramètre λ qui figure dans l'équation aux dérivées partielles.

Dans l'étude de tout phénomène vibratoire dans un milieu limité l'expérimentateur constate, on le sait, l'existence d'un tel son fondamental, ou, s'il s'agit d'autre chose que d'acoustique, d'une telle *fréquence fondamentale*. Mais, de plus, cette fréquence fondamentale n'est pas la seule *fréquence propre* : en acoustique, par exemple, le son fondamental s'accompagne d'une série indéfinie d'*harmoniques* dont les propriétés, sous les rapports les plus essentiels, sont analogues à celles du premier.

Expérimentalement, l'existence de toutes ces fréquences propres est manifeste. Mathématiquement, M. Schwarz était le premier à démontrer par sa savante méthode celle de la plus simple d'entre elles, la fréquence fondamentale. Il est clair qu'un tel résultat demandait à être complété par son extension aux sons harmoniques. Dix ans après, en effet, M. Picard parvenait à établir l'existence du premier d'entre eux, c'est-à-dire du second son propre.

C'est à Poincaré qu'est due la solution générale, c'est-à-dire la démonstration de l'existence de tous les harmoniques successifs.

Par l'emploi de profonds lemmes géométriques, il démontre que, multipliant

la solution par un polynome en λ à coefficients indéterminés, on peut toujours choisir ces coefficients de manière à ce que le développement du produit suivant les puissances de λ converge dans un rayon plus grand qu'avant la multiplication, et même aussi grand qu'on le veut si le degré du polynome a été pris suffisamment élevé. Ceci équivaut à dire que cette solution est une fonction méromorphe de λ. Son numérateur seul est fonction de la position d'un point dans le domaine que remplit le milieu considéré : son dénominateur et, par conséquent, ses pôles en sont indépendants.

Ce sont eux qui fournissent les fréquences propres cherchées. Les résidus correspondants ou *fonctions fondamentales* qui donnent la forme des vibrations propres, représentent une seconde partie importante de la découverte ainsi réalisée.

Ce résultat capital, véritable fondement de toute cette partie de la Physique mathématique, ne suffisait cependant pas à préparer l'évolution dont nous avons parlé tout à l'heure. En particulier, il n'aurait pas à lui seul rendu possible l'application de la méthode des équations intégrales au problème de Dirichlet.

Il a fallu d'abord que Poincaré reprît au même point de vue la plus connue et la plus importante des méthodes indiquées (indépendamment de celle du balayage) pour la résolution de ce problème, la méthode de Neumann.

Ce qui fait peut-être du Mémoire sur la *Méthode de Neumann et le principe de Dirichlet* un des plus beaux triomphes du génie de Poincaré, c'est que rien ne faisait prévoir l'analogie qu'il allait établir entre ce problème et le précédent.

Nous avons rappelé que les constatations expérimentales indiquaient *a priori* l'existence, dans le problème considéré par Schwarz d'une série d'harmoniques, ainsi que de fonctions fondamentales correspondantes.

Rien de pareil ne se présentait à propos de la méthode de Neumann; et même, rien ne conduisait à introduire dans cette nouvelle question le paramètre indéterminé λ qui s'introduit de lui-même dans celle des harmoniques.

L'analogie analytique était à peine plus utilisable que l'analogie physique. Il est vrai que la solution fournie par Poincaré fait apparaître dans les deux cas les mêmes résultats essentiels, mais non pour les mêmes raisons.

En un mot, les fonctions fondamentales, au lieu d'être suggérées par une interprétation physique simple, devaient ici sortir tout armées du cerveau de l'analyste.

Poincaré montra cependant, ici encore, que la vraie signification de la méthode de Neumann n'était autre que le développement de la solution par rapport aux puissances d'un certain paramètre qu'il introduit dans les données du problème, et que toutes les autres circonstances principales rencontrées à propos de l'étude des sons harmoniques se retrouvent ici.

Ces résultats étaient d'ailleurs essentiels pour la méthode de Neumann elle-même : car ils permettaient d'en établir la légitimité sans les restrictions qu'avait apportées son auteur.

Avec eux, — et aussi, ajoutons-le, après la méthode de Robin, d'une part, à côté de laquelle il faut citer, de l'autre, les travaux bien connus de M. Volterra, — tout était prêt pour l'entrée en scène de la méthode de M. Fredholm.

Celle-ci, en effet, suit pas à pas la marche que nous venons de retracer. Elle

repose essentiellement sur l'introduction du paramètre λ de Poincaré et sur la manière dont il figure dans l'expression de l'inconnue. Seulement, grâce à sa belle méthode de résolution des équations intégrales, M. Fredholm peut écrire, sous forme de développements en séries immédiatement connus, le numérateur et le dénominateur que Poincaré n'obtenait que par de délicates approximations successives.

Ainsi les solutions de tous ces problèmes fondamentaux de la Physique mathématique — et en particulier, la détermination des sons propres, où la forme des domaines intervient d'une manière si mystérieuse — sont acquises dès Poincaré.

Seulement, pour reprendre la parole même que nous citions en commençant, ces mêmes problèmes sont « plus » résolus par la méthode de Fredholm.

Sur le problème de la distribution électrique (p. 15). — La méthode dite de balayage pour la résolution du problème de Dirichlet, dont le principe est énoncé pour la première fois dans cette Note est développée en détail dans le Mémoire de H. Poincaré *Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique* (p. 28).

Sur la théorie analytique de la chaleur (p. 18 et 24). — Les démonstrations de l'existence des fonctions fondamentales et de la croissance illimitée de la suite des constantes fondamentales, esquissées dans ces Notes sont reprises et développées par H. Poincaré dans le Mémoire : *Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique* (p. 28).

Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique (p. 28). — Dans cet important Mémoire, H. Poincaré, d'une part expose la méthode dite de balayage qui permet de démontrer l'existence des solutions des problèmes aux limites associés à l'équation de Laplace et, par suite, de démontrer le principe de Dirichlet et, d'autre part, précise la méthode dite des fonctions fondamentales pour laquelle il donnera plus tard les démonstrations rigoureuses des théorèmes d'existence (p. 123).

Pour résoudre le problème de Dirichlet, H. Poincaré développe la méthode de balayage des masses qu'il avait déjà esquissée, dans une Note sur le problème de la distribution électrique (p. 5). Cette méthode établit le principe de Dirichlet pour tout domaine dont la surface admet un plan tangent déterminé en chaque point sauf éventuellement en un nombre limité de points coniques ordinaires.

H. Poincaré a également donné un exposé de cette méthode dans son Ouvrage : *Théorie du potentiel newtonien* (chap. VII, p. 260-288 : Résolution du problème de Dirichlet; La méthode de balayage). Elle est également exposée dans le *Traité d'Analyse* de M. Émile Picard (t. II, chap. IV, p. 96-108, 2[e] édit. : Méthode de M. Poincaré pour la solution du problème de Dirichlet).

La méthode de M. H. Poincaré, inspirée directement des problèmes posés par la Physique mathématique, considère exclusivement le cas de l'espace à trois dimensions. Dans sa Thèse, M. A. Paraf [*Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale* (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1892)] a indiqué les modifications importantes que l'on doit apporter à cette méthode pour l'appliquer aux problèmes posés dans le plan. Les Mémoires de M. H. Poincaré et M. A. Paraf ont servi de bases aux recherches de M. Ed. Le Roy [*Sur l'intégration des équations de la chaleur* (*Thèse*, Paris, 1898)]. Partant d'une remarque de M. Paraf, M. Ed. Le Roy étend à des équations d'un type général les résultats établis pour l'équation de Laplace et en mettant la méthode de balayage sous une forme canonique valable quel que soit le nombre des variables indépendantes, en déduit par un procédé uniforme les théorèmes d'existence relatifs aux problèmes associés à l'équation de la chaleur.

La méthode de balayage de M. H. Poincaré se trouve à la base des recherches contemporaines sur la théorie du potentiel.

Nous citerons notamment les Ouvrages suivants :

G. Bouligand, *Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet* (*Mém. Sc. math.*, nº 11, 1926).

O. D. Kellog, *Foundations of Potential Theory* (*Grundlehren der Math. Wiss.*, t. 31, Springer, 1929).

C. de la Vallée Poussin, *Le potentiel logarithmique. Balayage et représentation conforme* (Paris et Louvain, 1949).

Parmi les très nombreux Mémoires consacrés au problème de Dirichlet et aux extensions de la méthode de balayage, nous citerons notamment les publications suivantes :

G. Bouligand, *Sur le problème de Dirichlet* (*Ann. Soc. Polon. Math.*, t. 4, 1925, p. 59-112).

C. de la Vallée Poussin, *Extension de la méthode de balayage de Poincaré et problème de Dirichlet* (*Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 2, 1932, p. 169-232).

F. Vasilesco, *Sur la méthode de balayage de Poincaré, son extension par M. de la Vallée Poussin et le problème de Dirichlet généralisé* (*J. Math. pures et appl.*, t. 14, 1935, p. 209-227).

M. G. C. Evans, *Dirichlet Problems* (*Amer. Math. Soc.*, Semi Centennial publ., t. 2, 1938, p. 185-236).

H. Cartan, *Sur les fondements de la théorie du potentiel* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 69, 1941, p. 71-96); *Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiel* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 73, 1945, p. 74-106).

Et les travaux récents de M. E. Brelot.

L'étude du problème de Fourier développée par H. Poincaré dans la seconde partie a été reprise par lui plus rigoureusement dans son Mémoire : *Sur les équations de la Physique mathématique* (p. 123). Ces travaux ont été prolongés par M. Ed. Le Roy dans sa Thèse citée plus haut.

Dans la dernière partie (§ 5, Retour à l'hypothèse moléculaire, p. 104), H. Poincaré a montré notamment comment les résultats obtenus par l'étude des équations aux dérivées partielles s'interprètent dans une description moléculaire de la matière en se ramenant à des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Dans celles-ci, la seule variable indépendante est le temps, mais un très grand nombre de fonctions inconnues interviennent. H. Poincaré insiste sur la persistance dans le passage des équations différentielles aux équations aux dérivées partielles des propriétés de symétrie ou des caractères imposés par la nature physique des phénomènes. Le point de vue de H. Poincaré est discuté dans le tome IV_1 de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édit. française) : *Principes de la Mécanique rationnelle d'après A. Voss*, par E. et F. COSSERAT (§ 14, p. 35, Le principe de continuité).

Sur certains développements en séries que l'on rencontre dans la théorie de la propagation de la chaleur (p. 114). — *Sur l'équation des vibrations d'une membrane* (p. 119). — Les questions examinées dans ces Notes sont reprises et développées dans le Mémoire : *Sur les équations de la Physique mathématique* (p. 123).

Sur les équations de la Physique mathématique (p. 123). — H. Poincaré après avoir discuté et développé des résultats obtenus antérieurement par MM. É. Picard, H. A. Schwarz et C. Neumann sur le problème de Dirichlet généralisé, établit d'une façon rigoureuse la méthode dite des fonctions fondamentales pour la résolution des équations de la Physique mathématique et notamment l'équation de la chaleur et l'équation des vibrations des membranes élastiques.

Les résultats de H. Poincaré ont été étendus et généralisés par Ed. Le Roy dans sa Thèse citée plus haut, mais la solution des problèmes posés par l'équation des vibrations de la membrane élastique a trouvé une forme plus définitive dans la théorie des équations intégrales. M. E. GOURSAT (*Cours d'Analyse mathématique*, 4e édit., t. 3, 1927, chap. XXXIII. Applications des équations intégrales, p. 507-544) a notamment montré comment les méthodes et les résultats de H. Poincaré se justifiaient et se retrouvaient facilement par la théorie des équations intégrales. E. GOURSAT (*loc. cit.*, § 616 : Vibrations des membranes élastiques, p. 531) dit notamment en note : « L'existence de la première valeur singulière qui correspond au son fondamental avait été établie rigoureusement par SCHWARZ (*Œuvres*, t. 1, p. 241). M. É. PICARD avait démontré ensuite l'existence de la seconde valeur singulière (*C. R. Acad. Sc.*, t. 116, 1893). Enfin H. Poincaré a établi l'existence d'une infinité de valeurs singulières. Ces valeurs singulières correspondent aux différentes harmoniques en nombre infini. On voit combien la démonstration devient simple avec la théorie de Fredholm .» Cette déduction des résultats de H. Poincaré à partir de la théorie de l'équation de Fredholm a été établie par E. PICARD [*Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de Fredholm* (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. 22, 1906, p. 241-259)]. Cette théorie se trouve également exposée dans l'Ouvrage de A. KORN : *Über freie und erzwungene Schwingungen, eine Einführung in die Theorie der linearen Integral gleichungen* (B. G. Teubner, édit., Leipzig et Berlin, 1910).

Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet (p. 196). — H. Poincaré a exposé la méthode de Neumann dans son Ouvrage : *Théorie du potentiel newtonien* (Leçons professées pendant le premier semestre 1894-1895) au chapitre VIII (p. 289-326 : Résolution du problème de Dirichlet). Dans le chapitre suivant (chap. IX, p. 327-361 : Extension de la méthode de Neumann au cas des domaines simplement connexes. Les fonctions fondamentales.), il a donné un résumé des résultats établis ici.

La méthode de Neumann et un aperçu sur les travaux qui l'ont développée sont exposés dans le *Cours d'Analyse mathématique* de E. Goursat (t. 3, chap. XVII et XVIII, 4[e] édit.) et dans le *Traité d'Analyse* de E. Picard (3[e] édit., t. 1, chap. VIII, § 15-20).

Le Mémoire de H. Poincaré est examiné et discuté dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* [édition allemande, t. II, chap. III : Neuere Entwicklung der Potentialtheorie, par L. Lichtenstein (p. 233-238)].

Les méthodes de C. Neumann et de G. Robin ainsi que les résultats de H. Poincaré sont notamment exposés et développés dans les Ouvrages de E. R. Neumann (*Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Robin zur Losung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie*, Teubner, Leipzig, 1905; *Beitrage zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie*, Leipzig, 1912), de A. Korn (*Lehrbuch der Potentialtheorie*, t. 1, Berlin, 1899; t. 2, Berlin, 1901; *Fünf Abhandlungen zur Potentialtheorie*, Berlin 1902) et de O. D. Kellog (*Foundations of Potential Theory, loc. cit.*).

Les résultats de H. Poincaré ont été généralisés par T. Carleman (*Ueber Neumann-Poincarésche Problem für ein Gebiet mit Ecken*, Upsala, 1916).

Sur l'équilibre d'un corps élastique (p. 273). — H. Poincaré dans ses *Leçons sur la théorie de l'élasticité* (Paris, 1882) considérait le problème de l'intégration des équations de l'élasticité comme très ardu et présentant des difficultés insurmontables.

Parmi les très nombreux travaux consacrés à la recherche d'une solution générale de ces équations, nous citerons notamment les publications de A. Korn [principalement *Ann. Ec. Norm. Sup.* (3), t. 24, 1907, p. 9 et *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1908, p. 165] et de E. et F. Cosserat (*C. R. Acad. Sc.*, t. 126, 1898, p. 1089 et 1129; t. 127, 1898, p. 315; t. 133, 1901, p. 145, 210, 271, 326, 361, 382 et 400; t. 145, 1907, p. 1139; t. 146, 1908, p. 169).

Des exposés généraux sur les travaux relatifs à ce problème se trouvent dans les Ouvrages de P. Appell (*Traité de Mécanique rationnelle*, 3[e] édit., t. 3, 1921, p. 636), A. E. H. Love (*A Treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4[e] édit., 1927, chap. X, p. 229), L. Lecornu [*Théorie mathématique de l'élasticité* (*Mém. Sc. math.*, fasc. 35, 1929)].

Sur la propagation de l'électricité (p. 278). — La solution remarquable de l'équation dite des télégraphistes donnée dans cette Note a été développée par H. Poincaré dans son Ouvrage : *Les oscillations électriques* (Compléments au chapitre IV, § 87 *d*, p. 182-188).

La Note de H. Poincaré a été communiquée à l'Académie des Sciences dans la séance du 26 décembre 1893. La séance suivante (*C. R. Acad. Sc.*, t. **118**, 1894, p. 16-17), M. É. Picard dans une Note intitulée : *Sur l'équation aux dérivées partielles qui se rencontre dans la théorie de la propagation de l'électricité* a montré que l'on retrouvait très simplement les résultats de H. Poincaré en utilisant une méthode de Riemann applicable aux équations aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles. M. É. Picard a développé sa Note dans un Mémoire : *Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie de la propagation de l'électricité* (*Bull. Soc. Math.*, t. **22**, 1894, p. 2-8) ainsi que dans son Ouvrage : *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec applications à la Physique mathématique* (*Cahiers scientifiques*, publiés sous la direction de M. G. Julia, fasc. 1, chap. XIX, p. 174-179). M. É. Picard expose également dans cet Ouvrage la solution de H. Poincaré (chap. XX, p. 180-182).

La méthode de H. Poincaré a été étendue au cas d'une propagation dans un milieu à trois dimensions par M. J. Boussinesq dans deux Notes : *Intégration de l'équation du son pour un fluide indéfini à une, deux ou trois dimensions, quand des résistances de natures diverses introduisent dans cette équation des termes respectivement proportionnels à la fonction caractéristique du mouvement ou à ses dérivées partielles premières* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **118**, 1894, p. 162-166) et *Intégration de l'équation du son pour un fluide indéfini à une, deux ou trois dimensions quand il y a diverses résistances au mouvement : conséquences physiques de cette intégration* (*C. R. Acad. Sc.*, t, **118**, 1894, p. 223-228).

Plus tard [*Sur l'extinction graduelle du mouvement à l'arrière d'une onde isolée dans un milieu élastique éprouvant une résistance proportionnelle ou à la vitesse, ou au déplacement* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **136**, 1903, p. 337-342)], M. J. Boussinesq a repris l'analyse de Poincaré pour discuter comment se fait l'extinction graduelle du mouvement dans la queue de l'onde.

SUR LA POLARISATION PAR DIFFRACTION

Acta Mathematica, t. 16, p. 297-339 (1892-1893).

I.

On sait à quelles discussions a donné lieu la question de savoir si la vibration lumineuse est perpendiculaire au plan de polarisation comme le veut Fresnel, ou parallèle comme le pense Neumann. Une discussion de même nature a été soulevée depuis que la théorie électromagnétique semble, aux yeux de beaucoup de savants, devoir remplacer la théorie élastique. On s'est demandé si la force électrique est perpendiculaire au plan de polarisation et la force magnétique parallèle à ce plan, ou si c'est le contraire. Cette seconde question semble aujourd'hui à peu près résolue et l'on est d'accord pour admettre la première hypothèse. Mais si l'on conserve la théorie élastique, la question de la direction de la vibration lumineuse reste sans solution certaine.

On a espéré quelque temps trouver cette solution dans l'étude des phénomènes de polarisation par diffraction. Une application, que je crois erronée, du principe de Huyghens avait fait croire à presque tous les physiciens que le plan perpendiculaire à la vibration devait par la diffraction, se rapprocher du plan de diffraction. L'hypothèse de Fresnel serait donc vérifiée si le plan de polarisation se rapprochait du plan de diffraction.

Les résultats des expériences furent contradictoires, ce qu'on expliqua par la complexité des phénomènes ; il se produit sur les réseaux, une réflexion ou une réfraction dont les effets viennent compliquer ou même masquer l'action exercée par la diffraction sur le plan de polarisation. Je crois que ce n'est pas

là la principale cause de l'insuccès de ces tentatives. Le principe de Huyghens a donné lieu à de nombreuses objections et elles n'ont été complètement réfutées que par Kirchhoff qui a donné à ce principe sa forme définitive. Sous cette forme, ce principe est une conséquence des équations fondamentales. Or, ces équations sont les mêmes pour le vecteur qui dans le langage de la théorie électromagnétique s'appellerait force électrique et pour celui qui s'appellerait force magnétique. Le principe de Huyghens est donc vrai pour l'un et l'autre vecteur. Si donc l'application qu'on en a voulu faire était légitime, elle le serait pour les deux vecteurs, et non pas seulement pour celui qui représente en grandeur, direction et sens la vibration lumineuse. Les plans normaux à ces deux vecteurs devraient donc l'un et l'autre se rapprocher du plan de diffraction, ce qui est impossible puisque ces deux plans normaux sont rectangulaires. Cela seul devrait suffire pour nous avertir de l'insuffisance de la théorie adoptée; mais une analyse plus complète confirme cette première impression; pour faire passer le principe de Huyghens de la forme que lui donne Kirchhoff à celle que lui donnait Fresnel, il faut négliger certains termes. Cela était légitime dans les cas où Fresnel l'a fait, cela ne l'est plus si le réseau est très serré et la déviation grande, ce qui est nécessaire pour qu'on puisse observer la rotation du plan de polarisation. On doit donc renoncer à tout espoir de résoudre de cette manière la question de savoir si la vibration lumineuse est perpendiculaire ou parallèle au plan de polarisation, ou ce qui revient au même, si elle est représentée par le vecteur que la théorie électromagnétique appelle force électrique ou par celui qu'elle appelle force magnétique.

On n'en était pas encore tout à fait convaincu quand M. Fizeau publia dans le tome 52 des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* les résultats d'un grand nombre d'expériences intéressantes sur certains phénomènes très curieux. L'illustre physicien observa, en effet, que la lumière réfléchie régulièrement ou irrégulièrement sur des stries très fines tracées à la surface d'un métal, de même que la lumière transmise à travers une fente très fine à parois métalliques, présente une polarisation souvent notable et tantôt perpendiculaire, tantôt parallèle à la direction des stries ou de la fente. Dans le Mémoire que je viens de citer il donna une explication générale de ces phénomènes, qu'il attribua à l'interférence des rayons réfléchis avec ceux qui n'ont pas subi de réflexion. J'avertis tout de suite que le présent travail n'est que le développement analytique dans un cas très particulier de l'explication de M. Fizeau. Une vingtaine d'années après, M. Gouy a observé des phénomènes de polarisa-

tion par diffraction qui se rattachent évidemment aux précédents, mais qui sont beaucoup moins complexes et il est arrivé ainsi à formuler plusieurs lois simples dont je rappellerai plus loin l'énoncé. Ses recherches sont décrites en détail dans le tome 8, 6[e] série des *Annales de Physique et de Chimie* et dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (12 mars 1883, 1884 et 1885). Les expériences ont été tout récemment reprises et complétées par M. Hurmuzescu (*C. R. Acad. Sc.*, 1[er] semestre 1892).

C'est à l'explication des phénomènes observés par M. Gouy que je consacrerai exclusivement ce qui va suivre ; mais bien que les circonstances soient beaucoup moins compliquées que dans les expériences de M. Fizeau, je ne pouvais songer à aborder le problème dans toute sa généralité et j'ai dû me restreindre à un cas extrêmement particulier; me bornant ensuite dans les deux paragraphes V et VI à indiquer par des aperçus plus ou moins grossiers, dans quel sens les diverses circonstances que j'avais d'abord négligées pouvaient modifier les résultats. J'ai l'intention d'y revenir plus tard dans une seconde partie de ce travail et d'étudier l'influence de ces circonstances par une analyse plus complète et plus rigoureuse.

J'aurais même à peine osé publier des résultats aussi incomplets si je n'y avais été encouragé par la phrase suivante qui se trouve dans le Mémoire de M. Fizeau cité plus haut : « tout au plus peut-on espérer qu'en appliquant le calcul à quelques cas théoriques plus simples, on arriverait à des déductions rigoureuses qui pourraient éclairer la question ».

J'ai trouvé plus commode d'employer le langage de la théorie électromagnétique; mais il ne faut pas s'y tromper; il ne faut pas croire que les faits s'expliquent dans la théorie de Maxwell et ne s'expliquent pas dans la théorie élastique. Les équations sont exactement les mêmes dans les deux théories et si l'une rend bien compte des faits, il en est certainement de même de l'autre.

J'ai désigné par X, Y, Z les composantes de la force électrique qui, d'après Fresnel, représente en grandeur, direction et sens la vibration lumineuse; j'ai désigné à l'exemple de Maxwell par α, β, γ les composantes de la force magnétique qui d'après Neumann représenterait cette même vibration.

Dans toutes les applications que j'ai faites, j'ai pris pour axe des z la direction de celle de ces deux forces que je considérais. Deux des composantes sont alors nulles et j'ai pu employer les lettres α et β pour représenter d'autres quantités.

Si la lumière est homogène on a :

$$Z = Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt$$

ou

$$Z = \text{partie réelle}\,(Z_0 - iZ_1)e^{ipt},$$

Z est ainsi la partie réelle d'une exponentielle imaginaire, et cette exponentielle, comme il est aisé de le voir, satisfait aux mêmes équations que Z.

Pour cette raison, il me sera quelquefois commode, comme on le fait souvent, de désigner par Z, non pas la force électrique, c'est-à-dire la partie réelle de l'exponentielle, mais l'exponentielle elle-même. Afin d'éviter toute confusion je préviens tout de suite que dans les paragraphes III et IV c'est la partie réelle de l'exponentielle que je désigne par Z et que dans les paragraphes V et VI c'est l'exponentielle imaginaire elle-même. De même pour γ.

J'emploierai aussi une notation qui est souvent usitée. Soit S une surface quelconque, M un point de cette surface, MN la normale à cette surface, M′ un point de cette normale infiniment voisin de M; je désignerai par dn la longueur MM′. Soit ensuite $F(x, y, z)$ une fonction quelconque; F_0 la valeur de cette fonction au point M. Je désignerai par

$$F_0 + \frac{dF}{dn}\,dn$$

la valeur de cette même fonction au point M′, et le rapport $\frac{dF}{dn}$ s'appellera la dérivée de la fonction F estimée suivant la normale à la surface S.

II.

Rappelons d'abord succinctement les résultats obtenus par M. Gouy et qu'il s'agit d'expliquer. Ce physicien se sert d'un écran métallique formé d'une sorte de biseau très aigu, et il concentre la lumière à l'aide d'une lentille sur l'arête de ce biseau. Il observe ensuite la lumière diffractée à l'aide d'un microscope de faible grossissement pointé sur cette même arête.

Dans ces conditions, la lumière diffractée est sensible dans une direction quelconque et on peut observer des rayons qui ont subi des déviations considérables pouvant aller jusqu'à 160°. M. Gouy a découvert de la sorte les lois suivantes :

1° A l'intérieur de l'ombre géométrique, la lumière est polarisée perpendiculairement au plan de diffraction. Cette polarisation est d'autant plus marquée qu'on se rapproche davantage de l'écran, c'est-à-dire que la déviation est plus grande, et peut devenir presque complète.

2° A l'extérieur de l'ombre géométrique, la lumière est polarisée au contraire dans le plan de diffraction. La polarisation nulle quand la déviation est très petite, atteint son maximum vers 30 ou 40° ; dans de bonnes conditions, elle peut être alors presque complète; elle décroît ensuite lentement, mais elle est encore notable pour une déviation de 160°.

3° Pour une même déviation, la lumière diffractée est maximum quand le faisceau incident et le faisceau diffracté font des angles égaux avec l'écran.

4° Quand les bords sont très tranchants et que la lumière incidente est naturelle, la quantité de lumière diffractée est la même pour une même déviation, que cette déviation ait lieu vers l'intérieur ou vers l'extérieur.

5° A l'intérieur de l'ombre géométrique, la lumière polarisée perpendiculairement au plan de diffraction est en général fortement colorée tandis que la lumière polarisée dans le plan de diffraction reste blanche.

6° Si la lumière incidente est polarisée dans un plan oblique au plan de diffraction on peut la décomposer en deux composantes ; l'une polarisée dans le plan de diffraction et l'autre perpendiculairement à ce plan ; et ces deux composantes éprouvent dans la diffraction une différence de marche qui croît avec la déviation (à l'intérieur de l'ombre géométrique), reste bien inférieure à $\frac{\lambda}{4}$ si le tranchant est très fin, mais peut approcher de $\frac{\lambda}{2}$ avec des bords arrondis; c'est la composante polarisée dans le plan de diffraction (c'est-à-dire la composante blanche et faible) qui prend l'avance.

A l'extérieur de l'ombre géométrique, cette différence de marche est de même sens que celle que produirait la réflexion, mais plus petite à déviation égale.

Tels sont les faits dont nous avons à rendre compte; il ne serait pas facile de mettre en équations toutes les données d'un problème aussi complexe et de les résoudre ensuite, si l'on ne cherchait à diviser la difficulté.

Je traiterai donc d'abord une question beaucoup plus simple.

Je supposerai que les ondes incidentes sont cylindriques, les génératrices du cylindre étant parallèles au tranchant du biseau ; il en résulte alors évidemment qu'il en sera de même des ondes diffractées. On réaliserait ce cas en concen-

trant la lumière sur le bord de l'écran non plus avec une lentille sphérique, mais avec une lentille cylindrique. Supposons alors qu'on prenne le bord de l'écran comme axe des z; les diverses quantités que nous aurons à considérer, c'est-à-dire les composantes du déplacement d'une molécule d'éther dans la théorie élastique ou les composantes de la force électrique ou de la force magnétique (dans la théorie électromagnétique) seront alors des fonctions de x, de y et du temps t, mais ne dépendront pas de z.

Si la lumière incidente est polarisée dans le plan de diffraction, il en sera de même de la lumière diffractée, et comme la force électrique est perpendiculaire au plan de polarisation, elle devra être parallèle à l'axe des z. Appelons alors Z cette force électrique, elle devra satisfaire à l'équation :

$$V^2\left(\frac{d^2Z}{dx^2}+\frac{d^2Z}{dy^2}\right)=\frac{d^2Z}{dt^2},$$

V désignant la vitesse de la lumière. L'intensité de la lumière est proportionnelle à Z^2 et il est facile de déduire de la connaissance de la fonction Z, celle des composantes de la force magnétique α et β; la troisième composante γ de cette force magnétique est toujours nulle.

Supposons maintenant, au contraire, que la lumière incidente soit polarisée perpendiculairement au plan de diffraction et qu'il en soit par conséquent de même de la lumière diffractée. Comme la force magnétique est parallèle au plan de polarisation, elle sera parallèle à l'axe des z. Si nous la désignons par γ elle satisfera à l'équation :

$$V^2\left(\frac{d^2\gamma}{dx^2}+\frac{d^2\gamma}{dy^2}\right)=\frac{d^2\gamma}{dt^2},$$

l'intensité de la lumière sera proportionnelle à γ^2; et la connaissance de γ entraînera celle des composantes X et Y de la force électrique; la troisième composante Z étant toujours nulle.

La seconde simplification que j'introduirai étonnera sans doute davantage. Peut-être plus d'un lecteur ne la trouvera-t-il légitime qu'après avoir lu le paragraphe V? On sait que vis-à-vis des oscillations hertziennes, tous les métaux se comportent absolument de la même manière et, par conséquent, de la même façon que des conducteurs parfaits. En d'autres termes, au moins avec la précision assez faible que comportent les expériences, les lignes de force électrique aboutissent normalement à la surface des conducteurs. Au contraire, vis-à-vis des oscillations lumineuses, il n'en est plus rigoureusement de même,

l'étude de la réflexion métallique nous l'apprend; la condition des métaux n'est plus tout à fait la même que celle d'un conducteur parfait; mais elle s'en rapproche d'autant plus que le pouvoir réflecteur est plus grand.

Eh bien, nous supposerons que *notre écran se comporte comme un conducteur parfait*, c'est-à-dire que les lignes de force électrique aboutissent normalement à la surface. Comment cette condition s'exprime-t-elle analytiquement?

Si la lumière est polarisée dans le plan de diffraction, la force électrique est parallèle à l'axe des z, parallèle par conséquent à la surface de l'écran qui est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à cet axe, cette force n'a donc pas de composante normale à cette surface et comme d'après l'hypothèse que nous venons de faire elle ne doit pas avoir non plus de composante tangentielle, elle doit être nulle. On aura donc

$$Z = 0$$

à la surface de l'écran.

Si, au contraire, la lumière est polarisée perpendiculairement au plan de diffraction, la force magnétique γ est parallèle à l'axe des z. Considérons un point de la surface de l'écran que nous prendrons pour un instant comme origine des coordonnées, pendant que l'axe des x sera la tangente à la section droite de l'écran cylindrique et l'axe des y la normale à cette section. Les dérivées par rapport au temps de la force électrique seront à un facteur constant près.

$$\frac{d\gamma}{dy}, \quad -\frac{d\gamma}{dx}, \quad 0.$$

La première de ces composantes devra être nulle, c'est-à-dire que la dérivée de γ estimée suivant la normale à l'écran devra être nulle. Nous écrirons donc, en renonçant aux axes particuliers que nous avions choisis pour un instant

$$\frac{d\gamma}{dn} = 0.$$

Cette égalité aura lieu en tous les points de la surface de l'écran, et on en voit aisément la signification. Si M est un point de cette surface, γ la valeur de la force magnétique en ce point, si M' est un point infiniment voisin, tel que MM' soit normale à la surface, la valeur de la force magnétique au point M' sera

$$\gamma + \frac{d\gamma}{dn}\,\mathrm{MM'}.$$

Comme troisième simplification, je supposerai que le tranchant du biseau est parfait, c'est-à-dire que la surface de l'écran se réduit à deux plans qui se coupent suivant l'axe des z, sous un angle très aigu.

Je simplifierai encore le problème en supposant que cet angle est infiniment petit. Enfin je supposerai que la lentille cylindrique qui concentre la lumière sur le bord de l'écran est parfaitement aplanétique et que sa ligne focale coïncide rigoureusement avec l'axe des z.

Réduit à ces termes, le problème est facile à résoudre et l'on peut déjà rendre compte des particularités les plus importantes découvertes par M. Gouy. Néanmoins, on pourrait croire que les hypothèses très particulières que je viens de faire jouent un rôle essentiel et que les résultats seraient profondément modifiés si on les abandonnait. Ces hypothèses, je le rappelle sont au nombre de cinq :

1° L'angle du biseau est infiniment petit ;
2° Le tranchant du biseau est parfait ;
3° L'écran se comporte comme un conducteur parfait ;
4° La lentille convergente a sa ligne focale sur l'axe des z ;
5° Cette lentille est cylindrique.

Un examen plus approfondi est donc indispensable. Je vais, par conséquent, procéder de la façon suivante.

Je traiterai d'abord le problème complètement en admettant ces cinq hypothèses, puis je les abandonnerai successivement et je verrai quelles modifications j'introduis dans les résultats.

Je les abandonnerai d'ailleurs dans l'ordre où je viens de les énoncer en dernier lieu.

III.

Rappelons d'abord les propriétés des fonctions de Bessel qui nous seront utiles dans la suite. Soit :

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)}\left[1 - \frac{x^2}{2.2n} + \frac{x^4}{2.4.2n.(2n+2)} - \frac{x^6}{2.4.6.2n.(2n+2).(2n+4)} + \dots\right],$$

où n est un nombre entier, fractionnaire ou même incommensurable. On sait que $J_n(x) : x^n$ est une fonction entière de x et que J_n satisfait à l'équation

différentielle

$$(1)\qquad \frac{d^2 J_n}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_n}{dx} + J_n\left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) = 0.$$

La fonction J_n n'est généralement pas réductible à des fonctions plus simples ; il y a pourtant un cas où il en est ainsi, c'est quand $2n$ est un entier impair ; il vient alors :

$$J_n = (-1)^{n-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{n-\frac{1}{2}} \cos x.$$

On voit ainsi que J_n est un polynome entier en $\cos x$, $\sin x$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot$

J'aurai besoin aussi de la valeur asymptotique de $J_n(x)$ pour x très grand. Cette valeur est :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Cela posé, supposons d'abord la lumière polarisée dans le plan de diffraction.

Notre équation s'écrit alors :

$$V^2\left(\frac{d^2 Z}{dx^2} + \frac{d^2 Z}{dy^2}\right) = \frac{d^2 Z}{dt^2}.$$

Si nous supposons que la lumière soit homogène, c'est-à-dire que nous ayons

$$Z = Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt,$$

Z_0 et Z_1 ne dépendant que de x et de y, il viendra :

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = -p^2 Z\,;$$

si nous posons :

$$\alpha = \frac{p}{V}$$

notre équation devient :

$$(2)\qquad \frac{d^2 Z}{dx^2} + \frac{d^2 Z}{dy^2} + \alpha^2 Z = 0.$$

La longueur d'onde est alors égale à $\frac{2\pi}{\alpha}\cdot$

Passons aux coordonnées polaires en posant :

$$x = \rho \cos\omega, \qquad y = \rho \sin\omega,$$

l'équation deviendra :

$$(3)\qquad \frac{d^2 Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dZ}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2 Z}{d\omega^2} + \alpha^2 Z = 0.$$

Si l'écran est un biseau parfait, les équations des deux plans qui limitent cet écran seront de la forme :

$$\omega = \omega_0, \qquad \omega = \omega_1.$$

Si nous supposons comme nous venons de le faire que l'angle du biseau est infiniment petit, ces équations pourront s'écrire :

$$\omega = 0, \qquad \omega = 2\pi.$$

Nous ferons varier ω de 0 à 2π; pour $\omega = 0$ et pour $\omega = 2\pi$, Z devra être nul ; mais $\frac{dZ}{d\omega}$ pourra éprouver une discontinuité quand on franchira l'écran qui se trouve ici réduit à un plan. Au contraire, s'il n'y avait pas d'écran, Z ne serait pas assujetti à s'annuler pour $\omega = 0$, mais ce serait une fonction périodique de ω de période 2π, qui serait continue ainsi que sa dérivée. Comment ces conditions se traduisent-elles analytiquement.

S'il n'y avait pas d'écran, on pourrait écrire, en vertu de la formule de Fourier

$$(4) \qquad Z = \sum P_n \cos n\omega + \sum P'_n \sin n\omega,$$

n étant un entier, P_n et P'_n des fonctions de ρ. Mais avec un écran, nous devrons remplacer cette formule par la suivante :

$$(5) \qquad Z = \sum P_n \sin \frac{n\omega}{2},$$

n étant un entier et P_n une fonction de ρ et de t. Le développement (5) ne doit pas contenir de cosinus parce que Z doit s'annuler pour $\omega = 0$ et pour $\omega = 2\pi$. En revanche le développement (4) ne doit pas contenir de fonctions trigonométriques de $\frac{n\omega}{2}$ (n impair) parce que Z et $\frac{dZ}{d\omega}$ doivent être continues.

Adoptons donc le développement (5) et substituons-le dans l'équation (3) ; nous aurons en égalant à 0 le coefficient de $\sin \frac{n\omega}{2}$:

$$\frac{d^2 P_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dP_n}{d\rho} + P_n\left(\alpha^2 - \frac{n^2}{4\rho^2}\right) = 0,$$

d'où puisque P_n doit rester fini pour $\rho = 0$:

$$P_n = A_n J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho).$$

A_n étant une fonction de t. On a donc :

$$Z = \sum A_n J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin \frac{n\omega}{2}$$

ou en remplaçant les fonctions de Bessel par leur valeur approchée, ce qui est permis dès que $\alpha\rho$ est très grand, c'est-à-dire dès que ρ est beaucoup plus grand que la longueur d'onde :

$$(6) \qquad Z = \sum A_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right) \sin \frac{n\omega}{2}.$$

Rappelons que A_n doit être linéaire et homogène en $\cos pt$ et $\sin pt$.

Pour pousser plus loin cette étude, nous devons distinguer les diverses sortes de faisceaux lumineux dont la superposition produit le mouvement de l'éther représenté par l'équation (6).

Parmi ces faisceaux, il y en a un qui se rapproche du bord de l'écran, c'est-à-dire de l'axe des z, c'est le faisceau incident; les autres s'en éloignent; à savoir, le faisceau transmis directement, le faisceau réfléchi et les faisceaux diffractés. Le premier se rapprochant de l'écran, son équation peut s'écrire :

$$Z = \frac{f(\omega)}{\sqrt{\rho}} \cos(\alpha\rho + pt + h),$$

h étant une constante qui doit être indépendante de ω, si l'on suppose comme il y a peu d'inconvénient à le faire que la phase est la même en tous les points du faisceau. Nous pourrons alors choisir l'origine du temps de façon que cette constante soit égale à $-\frac{\pi}{4}$, ce qui nous permettra d'écrire :

$$(7) \qquad Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum B_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right) \sin \frac{n\omega}{2},$$

les B_n étant des constantes.

Les autres faisceaux qui s'éloignent de l'écran doivent avoir une équation de la forme :

$$Z = \frac{f_1(\omega)}{\sqrt{\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) + \frac{f_2(\omega)}{\sqrt{\rho}} \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right),$$

ce qui peut s'écrire encore :

$$(8) \qquad \begin{aligned} Z = {} & \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum C_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) \sin \frac{n\omega}{2} \\ & + \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum D_n \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) \sin \frac{n\omega}{2}. \end{aligned}$$

Le second membre de (6) doit être la somme des seconds membres de (7) et de (8). Si nous identifions en égalant les coefficients de

$$\cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{n\omega}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{n\omega}{2},$$

nous obtiendrons :

$$A_n \cos\frac{n\pi}{4} = B_n \cos pt + C_n \cos pt + D_n \sin pt,$$

$$A_n \sin\frac{n\pi}{4} = -B_n \sin pt + C_n \sin pt + D_n \cos pt,$$

d'où :

$$(9)\qquad \left.\begin{array}{l} \text{si } n \equiv 0 \\ \text{si } n \equiv 1 \\ \text{si } n \equiv 2 \\ \text{si } n \equiv 3 \end{array}\right\} \bmod 4, \qquad \begin{array}{ll} B_n = C_n, & D_n = 0, \\ B_n = D_n, & C_n = 0, \\ B_n = -C_n, & D_n = 0, \\ B_n = \quad D_n, & C_n = 0. \end{array}$$

C'est le faisceau incident qui nous est donné, nous connaissons donc B_n; les équations (9) nous permettent alors de calculer C_n et D_n et nous font ainsi connaître tous les éléments des faisceaux direct, réfléchi et diffractés.

Il est curieux de voir ce que donne ce même calcul quand on l'applique au cas où il n'y a pas d'écran. On a alors pour le mouvement total :

$$(6')\qquad Z = \sum (A_n^0 \cos n\omega + A_n^1 \sin n\omega)\, J_n(\alpha\rho)$$
$$= \sum (A_n^0 \cos n\omega + A_n^1 \sin n\omega)\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha\rho}}\cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right),$$

pour le faisceau incident :

$$(7')\qquad Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}}\sum \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)(B_n^0 \cos n\omega + B_n^1 \sin n\omega) = f(\rho, \omega, t)$$

et pour l'ensemble des faisceaux transmis :

$$(8')\qquad Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}}\sum \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)(C_n^0 \cos n\omega + C_n^1 \sin n\omega)$$
$$- \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}}\sum \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)(D_n^0 \cos n\omega + D_n^1 \sin n\omega) = f_1(\rho, \omega, t).$$

L'identification faite absolument de la même manière que plus haut nous donne alors :

$$(9')\qquad \left.\begin{array}{l} \text{si } n \equiv 0 \\ \phantom{\text{si }} n \equiv 1 \end{array}\right\} \bmod 2, \qquad \begin{array}{lll} C_n^0 = B_n^0, & C_n^1 = B_n^1, & D_n^0 = D_n^1 = 0, \\ C_n^0 = -B_n^0, & C_n^1 = -B_n^1, & D_n^0 = D_n^1 = 0, \end{array}$$

d'où :

$$f_1(\rho, \omega, t) = f(\rho, \omega + \pi, -t),$$

ce qui veut dire en somme qu'il n'y a pas d'autre faisceau transmis que le faisceau direct, c'est-à-dire qu'il n'y a ni réflexion, ni diffraction.

Revenons au cas où il y a un écran et cherchons à interpréter les équations (9). Supposons que le faisceau incident soit contenu entre les deux plans $\omega = \alpha$, $\omega = \beta$ et qu'entre ces deux plans son intensité soit constante, ou plutôt ne dépende que de ρ. Soit ensuite :

$$f(\omega) = \sum B_n \sin \frac{n\omega}{2}.$$

Alors $f(\omega)$ sera nulle, quand ω ne sera pas compris entre α et β, et sera une constante égale à 1 par exemple, quand ω sera compris entre α et β. Si l'on observe alors que $f(\omega)$ change de signe avec ω et est une fonction périodique de période 4π, on en concluera :

$$f(\omega) = +1 \quad \text{si} \quad 4k\pi + \alpha < \omega < 4k\pi + \beta \quad (k \text{ entier}),$$
$$f(\omega) = -1 \quad \text{si} \quad 4k\pi - \beta < \omega < 4k\pi - \alpha \quad (k \text{ entier}),$$
$$f(\omega) = 0 \quad \text{pour toutes les autres valeurs de } \omega.$$

Soit ensuite :

$$f_1(\omega) = \sum B_{2n} \sin n\omega = \frac{f(\omega) + f(\omega + 2\pi)}{2};$$

on voit que $f_1(\omega)$ a pour période 2π et est égale à

$$+\frac{1}{2} \quad \text{si } \omega \text{ est compris entre } 2k\pi + \alpha \text{ et } 2k\pi + \beta,$$
$$-\frac{1}{2} \quad \text{si } \omega \text{ est compris entre } 2k\pi - \beta \text{ et } 2k\pi - \alpha,$$
$$0 \quad \text{pour les autres valeurs de } \omega.$$

Posons de même :

$$f_2(\omega) = \sum B_{2n+1} \sin \frac{2n+1}{2} \omega = \frac{f(\omega) - f(\omega + 2\pi)}{2}.$$

Il résulte de cette définition :

1° Que $f_2(\omega) = -f_2(\omega + 2\pi)$;

2° Que $f_2(\omega)$ est égale à :

$+\frac{1}{2}$ si ω est compris entre $4k\pi+\alpha$ et $4k\pi+\beta$ ou entre $(4k+2)\pi-\beta$ et $(4k+2)\pi-\alpha$;

$-\frac{1}{2}$ si ω est compris entre $4k\pi-\beta$ et $4k\pi-\alpha$ ou entre $(4k+2)\pi+\alpha$ et $(4k+2)\pi+\beta$;

o pour les autres valeurs de ω.

Posons alors :

$$\frac{\pi}{2}\varphi(\omega)=\sin\omega+\frac{\sin 3\omega}{3}+\frac{\sin 5\omega}{3}+\ldots$$

de telle sorte que $\varphi(\omega)$ soit égale à :

$-\frac{1}{2}$ pour ω compris entre $2k\pi$ et $(2k+1)\pi$;

$\frac{1}{2}$ pour ω compris entre $(2k+1)\pi$ et $(2k+2)\pi$;

on aura alors

$$2f_2(\omega)=\varphi\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right)-\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)+\varphi\left(\frac{\omega+\beta}{2}-\pi\right)-\varphi\left(\frac{\omega+\alpha}{2}-\pi\right).$$

Posons maintenant :

$$(10)\quad \begin{cases} \psi_1(\omega)=\sum C_n\sin\dfrac{n\omega}{2}=\sum B_{2n}(-1)^n\sin n\omega, \\ \psi_2(\omega)=\sum D_n\sin\dfrac{n\omega}{2}=\sum B_{2n+1}(-1)^n\sin\dfrac{(2n+1)\omega}{2}; \end{cases}$$

l'équation (6) qui exprime le mouvement total de l'éther pourra s'écrire :

$$(11)\quad Z\sqrt{\frac{\pi\alpha\rho}{2}}= f_1(\omega)\cos\left(\alpha\rho-\frac{\pi}{4}+pt\right) + \psi_1(\omega)\cos\left(\alpha\rho-\frac{\pi}{4}-pt\right)+\psi_2(\omega)\sin\left(\alpha\rho-\frac{\pi}{4}-pt\right).$$

La première équation (10) nous montre que

$$\psi_1(\omega)=f_1(\omega+\pi)$$

et, par conséquent, est égale à :

$+\frac{1}{2}$ pour ω compris entre $\pi+\alpha$ et $\pi+\beta$ (faisceau direct);

$-\frac{1}{2}$ pour ω compris entre $\pi-\beta$ et $\pi-\alpha$ (faisceau réfléchi);

o pour les autres valeurs de ω (ω variant de o à 2π).

On voit ainsi que dans le second membre de (11), le premier terme correspond au faisceau incident, le second aux faisceaux direct et réfléchi et que le troisième terme qui reste correspondra aux faisceaux diffractés.

Nous sommes donc amené à calculer la fonction $\psi_2(\omega)$; car l'intensité de la lumière diffractée sera proportionnelle au carré de cette fonction.

Rappelons le développement connu :

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+e^{i\omega}}{1-e^{i\omega}} = \frac{e^{i\omega}}{1} + \frac{e^{3i\omega}}{3} + \frac{e^{5i\omega}}{5} + \dots$$

En égalant les parties imaginaires, on trouve :

$$\frac{\pi}{2}\varphi(\omega) = \frac{\sin\omega}{1} + \frac{\sin 3\omega}{3} + \dots$$

et en égalant les parties réelles

$$\frac{1}{2}\log\left|\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\right| = \frac{\cos\omega}{1} + \frac{\cos 3\omega}{3} + \frac{\cos 5\omega}{5} + \dots$$

Changeant ω en $\omega + \frac{\pi}{2}$, il vient :

$$\frac{1}{2}\log\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sin\omega}{1} + \frac{\sin 3\omega}{3} - \frac{\sin 5\omega}{5} + \dots$$

ou enfin

$$\frac{\pi}{2}\varphi_1(\omega) = \frac{1}{2}\log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sin\omega}{1} - \frac{\sin 3\omega}{3} + \frac{\sin 5\omega}{5} - \dots$$

en sorte que pour passer de $\varphi(\omega)$ à $\varphi_1(\omega)$ il suffit de changer le signe du coefficient de $\sin(4n+3)\omega$.

Il en résulte qu'on passera de $\varphi\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right)$ à $\varphi_1\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right)$ en changeant le signe du coefficient de $\sin\frac{4n+3}{2}\omega$ ou de $\cos\frac{4n+3}{2}\omega$.

De même, pour passer de $f_2(\omega)$ à $\psi_2(\omega)$, il suffit de changer le signe du coefficient de $\sin\frac{4n+3}{2}\omega$. Or, on a :

$$2f_2(\omega) = \varphi\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right) - \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right) + \varphi\left(\frac{\omega+\beta}{2} - \pi\right) - \varphi\left(\frac{\omega+\alpha}{2} - \pi\right).$$

On aura, par conséquent :

$$2\psi_2(\omega) = \varphi_1\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right) - \varphi_1\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right) + \varphi_1\left(\frac{\omega+\beta}{2} - \pi\right) - \varphi_1\left(\frac{\omega+\alpha}{2} - \pi\right)$$

on enfin :

$$(12) \qquad \psi_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega - \alpha + \pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\omega + \beta - \pi}{4}}{\operatorname{tg} \frac{\omega - \beta + \pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\omega + \alpha - \pi}{4}} \right|.$$

Telle est l'expression de la racine carrée de l'intensité de la lumière diffractée. Une chose nous frappera d'abord; c'est que cette expression peut devenir infinie. Elle le devient en effet pour les valeurs suivantes de ω :

$$\omega = \alpha + \pi, \qquad \omega = \beta + \pi, \qquad \omega = \pi - \alpha, \qquad \omega = \pi - \beta,$$

c'est-à-dire sur les bords du faisceau direct et du faisceau réfléchi. Cette circonstance pourrait d'abord provoquer des doutes.

En premier lieu au point de vue purement analytique; nous avons été amené à plusieurs reprises à supposer que la fonction Z restait finie; et si à la fin du calcul, nous trouvons un résultat contradictoire avec cette hypothèse, on peut se demander si tout notre échafaudage de raisonnements ne s'écroule pas; on sera rassuré si l'on observe que l'équation (11) n'est qu'approchée et qu'on l'obtient en remplaçant les fonctions de Bessel par leur valeur approchée; or cela n'est permis que si ρ est infini; pour toutes les valeurs finies de ρ, l'expression exacte de Z demeure finie.

Ensuite au point de vue physique, ce résultat n'est pas conforme aux observations. Il est vrai que comme on observe à l'aide d'un microscope, l'objectif de ce microscope a forcément une certaine ouverture et serait vu de l'axe des z sous un angle fini; de sorte que la racine carrée de l'intensité observée, n'est pas $\psi_2(\omega)$, mais :

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \psi_2(\omega)\, d\omega.$$

Or cette intégrale est évidemment toujours finie; la différence $\omega_1 - \omega_0$ était relativement assez grande, dans les expériences de M. Gouy elle était égale à $\beta - \alpha$.

Mais cette explication est insuffisante, ce résultat paradoxal tient aux hypothèses extrêmes que nous avons faites; nous nous en rendrons mieux compte dans les paragraphes suivants, quand nous abandonnerons successivement ces hypothèses. Mais dès maintenant je puis mettre en évidence l'effet d'une d'entre elles. Nous avons admis que l'intensité du faisceau incident était constante pour ω compris entre α et β et était nulle quand ω n'était pas com-

pris entre ces limites. Il en résultait que $f(\omega)$ était une fonction discontinue; c'est ce qui n'arrivera pas dans la réalité; or il est aisé de voir par une analyse toute pareille à celle qui précède et sur laquelle nous reviendrons à la fin de ce paragraphe que si $f(\omega)$ est continu, $\psi_2(\omega)$ est fini.

Ne nous arrêtons donc pas pour le moment à cette difficulté; et appliquons la même méthode au cas où la lumière est polarisée dans un plan perpendiculaire au plan de diffraction. Nous devons alors satisfaire à l'équation :

$$(3'') \qquad \frac{d^2\gamma}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\gamma}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\gamma}{d\omega^2} + \alpha^2\gamma = 0.$$

Sur le bord de l'écran, c'est-à-dire pour

$$\omega = 0, \qquad \omega = 2\pi,$$

on devra avoir :

$$\frac{d\gamma}{d\omega} = 0,$$

de sorte que γ sera de la forme :

$$\gamma = \sum P_n \cos\frac{n\omega}{2},$$

P_n étant fonction de ρ et de t. On verrait comme plus haut que :

$$P_n = A_n J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho),$$

A_n dépendant seulement de t; d'où l'équation approchée analogue à (6)

$$(6'') \qquad \gamma = \sum A_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right) \cos\frac{n\omega}{2}.$$

Les équations (7) et (8) qui donnent l'expression de la lumière incidente et celle des lumières transmise directement, réfléchie et diffractée seront encore vraies ici avec cette différence que Z sera remplacé par γ et $\sin\frac{n\omega}{2}$ par $\cos\frac{n\omega}{2}$.

On aura donc :

$$(7'') \qquad \gamma = \sum B_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right) \cos\frac{n\omega}{2},$$

$$(8'') \qquad \gamma = \sum C_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\theta \cos\frac{n\omega}{2} + \sum D_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sin\theta \cos\frac{n\omega}{2}$$

en posant pour abréger :

$$\theta = \alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt.$$

En identifiant le second membre de (6″) avec la somme des seconds membres de (7″) et de (8″) nous retrouverons les équations (9) qui sont donc encore vraies dans le cas qui nous occupe maintenant.

Posons encore

$$f(\omega)=\sum B_n \cos\frac{n\omega}{2}.$$

La fonction $f(\omega)$ aura pour période 4π, elle ne changera pas quand ω se changera en $-\omega$; d'autre part, ses valeurs entre o et 2π sont connues, elle est égale à 1 quand ω varie de α à β et à o pour les valeurs de ω comprises entre o et 2π et non comprises entre α et β. Nous aurons donc

$$f(\omega)=1$$

pour ω compris entre

$$4k\pi+\alpha \text{ et } 4k\pi+\beta \quad \text{ou entre} \quad 4k\pi-\beta \text{ et } 4k\pi-\alpha,$$

$$f(\omega)=0$$

pour les autres valeurs de ω.

Soit maintenant :

$$f_1(\omega)=\sum B_{2n}\cos n\omega=\frac{f(\omega)+f(\omega+2\pi)}{2},$$

$$f_2(\omega)=\sum B_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\omega}{2}=\frac{f(\omega)-f(\omega+2\pi)}{2},$$

il est clair que l'on aura :

$$f_2(\omega)=\frac{1}{2}$$

pour ω compris entre

$$4k\pi+\alpha \text{ et } 4k\pi+\beta \quad \text{ou entre} \quad 4k\pi-\beta \text{ et } 4k\pi-\alpha,$$

$$f_2(\omega)=-\frac{1}{2}$$

pour ω compris entre

$$(4k+2)\pi+\alpha \text{ et } (4k+2)\pi+\beta \quad \text{ou entre} \quad (4k+2)\pi-\beta \text{ et } (4k+2)\pi-\alpha,$$

$$f_2(\omega)=0$$

pour les autres valeurs de ω.

Cela peut s'exprimer par l'équation suivante :

$$2f_2(\omega)=\varphi\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right)-\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+\beta}{2}-\pi\right)+\varphi\left(\frac{\omega+\alpha}{2}-\pi\right).$$

Soit, comme plus haut :

$$\psi_1(\omega) = \sum C_n \cos\frac{n\omega}{2} = \sum B_{2n}(-1)^n \cos n\omega,$$

$$\psi_2(\omega) = \sum D_n \cos\frac{n\omega}{2} = \sum B_{2n+1}(-1)^n \cos\frac{2n+1}{2}\omega.$$

Nous aurons dans l'expression complète de γ un terme en $f(\omega)$ correspondant au faisceau incident, un terme en $\psi_1(\omega)$ correspondant aux faisceaux direct et réfléchi, un terme en $\psi_2(\omega)$ correspondant aux faisceaux diffractés. On voit d'abord que :

$$\psi_1(\omega) = f_1(\omega - \pi).$$

Quant à $\psi_2(\omega)$, on l'obtiendra en partant de $f_2(\omega)$ et en changeant le signe du coefficient de $\cos\frac{4n+3}{2}\omega$.

On trouvera ainsi :

$$2\psi_2(\omega) = \varphi_1\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right) - \varphi_1\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right) - \varphi_1\left(\frac{\omega+\beta}{2} - \pi\right) + \varphi_1\left(\frac{\omega+\alpha}{2} - \pi\right)$$

ou bien enfin :

$$\psi_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\omega-\alpha+\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\omega+\alpha-\pi}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\omega-\beta+\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\omega+\beta-\pi}{4}}\right|.$$

Telle est l'expression de la racine carrée de l'intensité de la lumière diffractée. On voit que cette expression n'est pas la même suivant que la lumière est polarisée dans le plan de diffraction ou perpendiculairement à ce plan. Par conséquent, si la lumière incidente est naturelle, la lumière diffractée sera polarisée.

Pour simplifier la discussion, supposons que α soit très peu différent de β et négligeons les termes en $(\beta - \alpha)^2$; il viendra pour les deux expressions de $\psi_2(\omega)$:

$$\frac{\beta-\alpha}{4\pi}\left|\frac{1}{\cos\frac{\omega-\alpha}{2}} - \frac{1}{\cos\frac{\omega+\alpha}{2}}\right| \quad \text{(polarisation parallèle au plan de diffraction),}$$

et

$$\frac{\beta-\alpha}{4\pi}\left|\frac{1}{\cos\frac{\omega-\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\omega+\alpha}{2}}\right| \quad \text{(polarisation perpendiculaire au plan de diffraction).}$$

Les circonstances de la polarisation dépendront donc de la valeur du rapport :

$$\left| \frac{\dfrac{1}{\cos\dfrac{\omega-\alpha}{2}} - \dfrac{1}{\cos\dfrac{\omega+\alpha}{2}}}{\dfrac{1}{\cos\dfrac{\omega-\alpha}{2}} + \dfrac{1}{\cos\dfrac{\omega+\alpha}{2}}} \right| = \left| \frac{\cos\dfrac{\omega+\alpha}{2} - \cos\dfrac{\omega-\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\omega+\alpha}{2} + \cos\dfrac{\omega-\alpha}{2}} \right|.$$

Plus ce rapport s'éloignera de 1, plus la polarisation sera intense. S'il est plus grand que 1, le plan de polarisation sera parallèle au plan de diffraction; s'il est plus petit que 1, ces deux plans seront perpendiculaires.

La condition pour que le rapport soit plus grand que 1, c'est que ω soit compris entre $\alpha + \pi$ et $\pi - \alpha$, c'est-à-dire que le rayon diffracté soit compris entre le faisceau direct et le faisceau réfléchi. On aura donc :

Entre l'écran et le faisceau direct (diffraction intérieure), de la lumière polarisée perpendiculairement au plan de diffraction;

Entre le faisceau direct et le faisceau réfléchi (diffraction extérieure), de la lumière polarisée parallèlement au plan de diffraction.

Ces résultats sont conformes à l'observation; les expériences n'ont pas porté sur le troisième cas où ω serait compris entre o et $\pi - \alpha$.

Pour $\omega = 2\pi$, le rapport s'annule, la polarisation est donc complète, ce qui est encore conforme à l'observation. Pour $\omega = \pi$, le rapport devient infini et la polarisation devrait encore être complète; il est probable que le mélange des rayons réfléchis sur les bords qui sont toujours arrondis, s'oppose à ce qu'on puisse l'observer.

M. Gouy a observé que l'intensité totale de la lumière diffractée est maximum à déviation égale quand les axes optiques du collimateur et du microscope font des angles égaux avec l'écran. Notre formule donne un résultat contraire, l'intensité totale qui est proportionnelle à :

$$\frac{1}{\cos^2\dfrac{\omega-\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos^2\dfrac{\omega+\alpha}{2}}$$

est, au contraire, minimum quand les conditions que je viens d'énoncer sont remplies, c'est-à-dire quand

$$\omega + \alpha = 2\pi.$$

Nous chercherons plus loin, quand nous abandonnerons successivement nos hypothèses simples, à expliquer cette divergence. Il ne sera pas inutile néanmoins de voir ce que deviennent nos formules quand on suppose $\omega + \alpha = 2\pi$. J'appellerai δ la déviation $\omega - \alpha - \pi$ qui sera positive à l'intérieur.

Je trouve alors que la racine carrée de l'intensité de la lumière diffractée est proportionnelle à

$$\left| \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} - 1 \right|$$

si le plan de polarisation est parallèle au plan de diffraction et à

$$\left| \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} + 1 \right|$$

si ces deux plans sont perpendiculaires.

L'intensité totale sera proportionnelle à

$$1 + \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Elle ne change donc pas quand on change δ en $-\delta$, ce qui est conforme à l'une des lois de M. Gouy, celle que nous avons énoncée plus haut sous le n° 4.

Nous rendrons donc compte déjà des principales circonstances observées par M. Gouy; mais en revanche il en est d'autres qui échappent à notre explication comme la coloration des rayons diffractés et la différence de marche entre les deux composantes (lois énoncées plus haut sous les n°s 5 et 6). Nous verrons dans les paragraphes suivants si nous pouvons en rendre compte.

J'ai dit plus haut que si la fonction $f(\omega)$ était continue, la fonction $\psi_2(\omega)$ ne deviendrait pas infinie; il est aisé de s'en assurer, on trouve en effet si $f(\omega)$ est nul pour $\omega = 2\pi$ et si l'on suppose par exemple que le plan de polarisation soit parallèle au plan de diffraction :

$$\psi_2(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} f'(\alpha) \log \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega - \alpha + \pi}{4}}{\operatorname{tg} \frac{\omega + \alpha - \pi}{4}} \right| d\alpha.$$

Il est clair que si $f'(\omega)$ est fini, cette intégrale ne pourra devenir infinie.

IV.

Voyons maintenant comment les résultats précédents sont modifiés quand on ne suppose plus que l'angle du biseau soit infiniment petit. Soit

$$\omega = 0, \qquad \omega = \lambda\pi$$

les deux plans qui limitent le biseau.

Supposons d'abord que le plan de polarisation soit parallèle au plan de diffraction, Z qui doit s'annuler pour $\omega = 0$ et pour $\omega = \lambda\pi$ sera de la forme :

$$Z = \sum A_n J_{\frac{n\pi}{\lambda}}(\alpha\rho) \sin\frac{n\omega}{\lambda};$$

en se bornant à la valeur approchée on retrouvera l'équation

$$(6) \qquad Z = \sum A_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2\lambda}\right) \sin\frac{n\omega}{\lambda}.$$

Soit

$$(7) \qquad Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum B_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right) \sin\frac{n\omega}{\lambda},$$

l'équation du faisceau incident et

$$(8) \qquad Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum \sin\frac{n\omega}{\lambda} \left[C_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) + D_n \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)\right]$$

celle des faisceaux qui s'éloignent de l'écran. On trouvera par un calcul tout pareil à celui du paragraphe précédent :

$$A_n \cos\frac{n\pi}{2\lambda} = \quad B_n \cos pt + C_n \cos pt - D_n \sin pt,$$

$$A_n \sin\frac{n\pi}{2\lambda} = \quad B_n \sin pt + C_n \sin pt + D_n \cos pt,$$

d'où les équations

$$(9) \qquad \begin{cases} C_n = \cos\dfrac{n\pi}{\lambda} B_n, \\ D_n = \sin\dfrac{n\pi}{\lambda} B_n. \end{cases}$$

Il est aisé de voir qu'en y faisant $\lambda = 2$, on retrouve les équations (9) du paragraphe précédent.

L'équation (8) devient alors :

$$Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum B_n \sin\frac{n\omega}{\lambda} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt - \frac{n\pi}{\lambda}\right).$$

Si nous posons alors comme dans le paragraphe précédent :

$$f(\omega) = \sum B_n \sin\frac{n\omega}{\lambda},$$

fonction proportionnelle à la racine carrée de l'intensité du faisceau incident, nous aurons à calculer les fonctions

$$\psi_1(\omega) = \sum B_n \cos\frac{n\pi}{\lambda} \sin\frac{n\omega}{\lambda},$$

$$\psi_2(\omega) = \sum B_n \sin\frac{n\pi}{\lambda} \sin\frac{n\omega}{\lambda},$$

et l'intensité de la lumière transmise soit directement, soit par réflexion, soit par diffraction sera proportionnelle à :

$$\psi_1^2(\omega) + \psi_2^2(\omega).$$

Remarquons d'abord que la fonction $f(\omega)$ est périodique de période $2\lambda\pi$, qu'elle change de signe avec ω, et quelle est égale à o quand ω varie de o à α ou de β à $\lambda\pi$; et égale à 1 quand ω varie de α à β. La fonction $f(\omega)$ et, par conséquent, les coefficients B_n sont entièrement déterminés. Considérons alors la fonction suivante $\eta(z)$ de la variable imaginaire z ; soit :

$$\eta(z) = \sum B_n z^n.$$

La fonction $\eta(z)$ est évidemment égale à :

$$\eta(z) = \frac{-1}{\pi} \log \frac{\left(z - e^{\frac{i\alpha}{\lambda}}\right)\left(z - e^{-\frac{i\alpha}{\lambda}}\right)}{\left(z - e^{\frac{i\beta}{\lambda}}\right)\left(z - e^{-\frac{i\beta}{\lambda}}\right)}.$$

On vérifie, en effet, que la partie imaginaire de

$$\eta\left(e^{\frac{i\omega}{\lambda}}\right)$$

est bien égale à $f(\omega)$; je désignerai par $f_1(\omega)$ la partie réelle qui est évidemment égale à

$$f_1(\omega) = \frac{-1}{\pi} \log \left| \frac{\sin\frac{\omega-\alpha}{2\lambda} \sin\frac{\omega+\alpha}{2\lambda}}{\sin\frac{\omega-\beta}{2\lambda} \sin\frac{\omega+\beta}{2\lambda}} \right| = \sum B_n \cos\frac{n\omega}{\lambda}.$$

Il vient ensuite :

$$2\psi_1(\omega)=\sum B_n\sin\frac{n(\omega+\pi)}{\lambda}+\sum B_n\sin\frac{n(\omega-\pi)}{\lambda}=f(\omega+\pi)+f(\omega-\pi),$$

ce qui montre que le terme $\psi_1(\omega)$ correspond encore aux faisceaux direct et réfléchi, à savoir le terme $f(\omega+\pi)$ au faisceau direct et le terme $f(\omega-\pi)$ au faisceau réfléchi. Quant au terme $\psi_2(\omega)$, il représentera comme dans le paragraphe précédent les faisceaux diffractés; étudions-le de plus près.

Il vient :

$$2\psi_2(\omega)=\sum B_n\cos\frac{n(\omega-\pi)}{\lambda}+\sum B_n\cos\frac{n(\omega+\pi)}{\lambda}=f_1(\omega-\pi)-f_1(\omega+\pi)$$

ou

$$(10)\quad \psi_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\sin\frac{\omega+\pi-\alpha}{2\lambda}\sin\frac{\omega+\pi+\alpha}{2\lambda}\sin\frac{\omega-\pi-\beta}{2\lambda}\sin\frac{\omega-\pi-\beta}{2\lambda}}{\sin\frac{\omega-\pi-\alpha}{2\lambda}\sin\frac{\omega-\pi+\alpha}{2\lambda}\sin\frac{\omega+\pi-\beta}{2\lambda}\sin\frac{\omega+\pi+\beta}{2\lambda}}\right|.$$

On retrouverait la formule du paragraphe précédent en faisant $\lambda=2$. Si nous supposons que la différence $\beta-\alpha$ soit infiniment petite, cette formule se simplifie un peu et on voit que $\psi_2(\omega)$ est égal à un facteur près à :

$$(11)\qquad \left|\frac{1}{\sin\frac{\omega+\pi-\alpha}{2\lambda}\sin\frac{\omega-\pi-\alpha}{2\lambda}}\quad\frac{1}{\sin\frac{\omega+\pi+\alpha}{2\lambda}\sin\frac{\omega-\pi+\alpha}{2\lambda}}\right|.$$

Je ferai observer que les expressions (10) et (11) s'annulent pour $\omega=0$ et pour $\omega=\lambda\pi$, c'est-à-dire sur le bord de l'écran; c'est le résultat auquel nous étions déjà parvenu dans le paragraphe précédent.

L'expression peut d'ailleurs s'écrire au facteur constant 2 près :

$$\left|\frac{1}{\cos\frac{\pi}{\lambda}-\cos\frac{\omega-\alpha}{\lambda}}-\frac{1}{\cos\frac{\pi}{\lambda}-\cos\frac{\omega+\alpha}{\lambda}}\right|.$$

Sous cette forme on voit aisément que les seules valeurs de ω pour lesquelles cette expression puisse s'annuler sont :

$$\omega=0\qquad\text{et}\qquad\omega=\lambda\pi.$$

Passons maintenant au cas où la lumière est polarisée perpendiculairement au plan de diffraction; on doit alors avoir :

$$\frac{d\varphi}{d\omega}=0$$

pour $\omega = 0$ et pour $\omega = \lambda\pi$; il en résulte que γ sera de la forme :

$$\gamma = \sum A_n J_{\frac{n}{\lambda}}(\alpha\rho) \cos\frac{n\pi}{\lambda},$$

la partie de γ qui correspond au faisceau incident sera, si ρ est assez grand :

$$(7') \qquad \gamma = \sum \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} B_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right) \cos\frac{n\omega}{\lambda}$$

et l'équation des faisceaux qui s'éloignent de l'écran sera :

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum B_n \cos\frac{n\omega}{\lambda} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt - \frac{n\pi}{\lambda}\right).$$

Si alors nous posons, comme plus haut :

$$f(\omega) = \sum B_n \cos\frac{n\omega}{\lambda},$$

$$\psi_1(\omega) = \sum B_n \cos\frac{n\pi}{\lambda} \cos\frac{n\omega}{\lambda}, \qquad \psi_2(\omega) = \sum B_n \sin\frac{n\pi}{\lambda} \cos\frac{n\omega}{\lambda},$$

la racine carrée de l'intensité de la lumière sera proportionnelle à

$f(\omega)$ pour le faisceau incident;

$\psi_1(\omega)$ pour les faisceaux direct et réfléchi;

$\psi_2(\omega)$ pour les faisceaux diffractés.

On trouve d'ailleurs :

$$2\psi_1(\omega) = \sum B_n \cos\frac{n(\omega+\pi)}{\lambda} + \sum B_n \cos\frac{n(\omega-\pi)}{\lambda} = f(\omega+\pi) + f(\omega-\pi),$$

ce qui montre que les propriétés des faisceaux direct et réfléchi sont les mêmes que dans le cas précédent.

Reste à étudier $\psi_2(\omega)$.

Si nous posons comme plus haut :

$$\eta(z) = \sum B_n z^n,$$

il viendra :

$$\eta(z) = \frac{i}{\pi} \log \frac{\left(z - e^{\frac{i\alpha}{\lambda}}\right)\left(z - e^{-\frac{i\beta}{\lambda}}\right)}{\left(z - e^{\frac{i\beta}{\lambda}}\right)\left(z - e^{-\frac{i\alpha}{\lambda}}\right)} + \frac{\alpha - \beta}{\pi\lambda},$$

car pour $z = e^{\frac{i\omega}{\lambda}}$ la partie réelle de $\eta(z)$ doit être égale à $f(\omega)$, c'est-à-dire à $+1$ pour ω compris entre α et β ou entre $-\beta$ et $-\alpha$, et à 0 pour toutes les autres valeurs de ω depuis $-\lambda\pi$, jusqu'à $+\lambda\pi$.

On aura alors :

$$\eta\left(e^{\frac{i\omega}{\lambda}}\right) = f(\omega) + i f_1(\omega)$$

en posant

$$f_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{\sin\frac{\omega-\alpha}{2\lambda} \sin\frac{\omega+\beta}{2\lambda}}{\sin\frac{\omega-\beta}{2\lambda} \sin\frac{\omega+\alpha}{2\lambda}} \right| = \sum B_n \sin\frac{n\omega}{\lambda}.$$

D'autre part :

$$2\psi_2(\omega) = \sum B_n \sin\frac{n(\omega+\pi)}{\lambda} - \sum B_n \sin\frac{n(\omega-\pi)}{\lambda} = f_1(\omega+\pi) - f_1(\omega-\pi),$$

d'où enfin :

$$\psi_2(\omega) = \frac{-1}{2\pi} \log \left| \frac{\sin\frac{\omega-\pi-\alpha}{2\lambda} \sin\frac{\omega+\pi-\beta}{2\lambda} \sin\frac{\omega-\pi+\beta}{2\lambda} \sin\frac{\omega+\pi+\alpha}{2\lambda}}{\sin\frac{\omega+\pi-\alpha}{2\lambda} \sin\frac{\omega-\pi-\beta}{2\lambda} \sin\frac{\omega+\pi+\beta}{2\lambda} \sin\frac{\omega-\pi+\alpha}{2\lambda}} \right|.$$

En faisant $\lambda = 2$, on retrouve la formule du paragraphe précédent; si nous supposons $\beta - \alpha$ très petit, cette formule se simplifie un peu et l'on trouve que $\psi_2(\omega)$ est égal à un facteur constant près à :

$$\left| \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\lambda} - \cos\frac{\omega-\alpha}{\lambda}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\lambda} + \cos\frac{\omega+\alpha}{\lambda}} \right|.$$

Les circonstances de la polarisation dépendent alors de la valeur du rapport :

$$\left| \frac{\cos\frac{\omega-\alpha}{\lambda} - \cos\frac{\omega+\alpha}{\lambda}}{\cos\frac{\omega-\alpha}{\lambda} + \cos\frac{\omega+\alpha}{\lambda} - 2\cos\frac{\pi}{\lambda}} \right|.$$

Ce rapport s'annule pour $\omega = 0$ et pour $\omega = \lambda\pi$; il est plus petit que 1 pour $\omega > \alpha + \pi$, c'est-à-dire dans le cas de la diffraction intérieure; il est plus grand que 1 pour ω compris entre $\pi - \alpha$ et $\pi + \alpha$, c'est-à-dire dans le cas de la diffraction extérieure.

Les résultats sont donc absolument les mêmes que ceux du paragraphe précédent; nous rendrons compte des lois les plus importantes de la diffraction, mais il y quelques circonstances que nous ne pouvons encore expliquer; c'est

donc seulement dans les paragraphes suivants que nous pouvons espérer en trouver la clef.

V.

Nous aurons maintenant à tenir compte de ce fait que l'écran n'est pas formé d'un conducteur parfait, mais d'un métal et que la force électrique n'est, par conséquent, pas rigoureusement normale à la surface de cet écran.

Supposons d'abord que la lumière soit polarisée dans le plan de diffraction et voyons quelles sont les équations auxquelles nous devrons satisfaire.

Dans l'air, c'est-à-dire de $\omega = 0$ à $\omega = \lambda\pi$, nous aurons :

$$(1) \qquad \frac{d^2 Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dZ}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2 Z}{d\omega^2} + \alpha^2 Z = 0.$$

Pour pouvoir appliquer les formules de la réflexion métallique, nous emploierons la méthode des exponentielles imaginaires. Par hypothèse, la lumière étant homogène, Z sera de la forme :

$$Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt,$$

ce sera donc la partie réelle de

$$(Z_0 - iZ_1)e^{ipt}.$$

Cette quantité complexe satisfait aux mêmes équations que Z. C'est elle que nous appellerons Z, quitte à ne conserver à la fin du calcul que la partie réelle.

Dans le métal, c'est-à-dire de $\omega = \lambda\pi$ à $\omega = 2\pi$, on aura :

$$(2) \qquad \frac{d^2 Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dZ}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2 Z}{d\omega^2} + \beta^2 Z = 0,$$

β étant une constante complexe.

D'autre part, Z et $\frac{dZ}{d\omega}$ doivent être continues quand on passe du métal à l'air et réciproquement, c'est-à-dire que les valeurs de ces deux quantités pour $\omega = \lambda\pi - \varepsilon$ doivent très peu différer des valeurs de ces deux quantités pour $\omega = \lambda\pi + \varepsilon$ et que leurs valeurs pour $\omega = 2\pi - \varepsilon$ doivent très peu différer de leurs valeurs pour $\omega = +\varepsilon$.

Tel est le résultat auquel conduisent toutes les théories de la réflexion métallique que nous n'avons pas à discuter ici. Le problème ainsi posé est très

compliqué, mais une circonstance permet de le simplifier; c'est que la lumière est éteinte à une profondeur excessivement faible au-dessous de la surface du métal. Il en résulte que dans l'intérieur du métal, Z doit être représentée par une somme d'exponentielles où l'exposant est la distance du point considéré à la surface du métal, multipliée par un coefficient très grand et négatif. Pour mieux nous en rendre compte, rappelons ce qui se passe dans le cas simple et bien connu de la réflexion d'une onde plane sur une surface métallique plane. Il convient pour cela de revenir aux coordonnées rectangulaires, en prenant par exemple la surface du métal comme plan des yz, et le plan de polarisation coïncidant avec le plan d'incidence comme plan des xy. Nos équations deviennent alors :

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2} + \alpha^2 Z = 0 \quad \text{dans l'air,}$$

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2} + \beta^2 Z = 0 \quad \text{dans le métal,}$$

et à la surface de séparation Z et $\frac{dZ}{dx}$ devront être continues.

Soit φ l'angle d'incidence; il viendra :

$$\frac{d^2Z}{dy^2} = -\alpha^2 \sin^2\varphi\, Z,$$

d'où :

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \alpha^2 \cos^2\varphi\, Z = 0 \quad \text{dans l'air,}$$

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + (\beta^2 - \alpha^2 \sin^2\varphi)\, Z = 0 \quad \text{dans le métal.}$$

Si donc nous faisons pour abréger :

$$\alpha^2 \sin^2\varphi - \beta^2 = \delta^2$$

en choisissant le signe de δ de telle façon que la partie réelle de δ soit positive, nous devrons avoir dans le métal :

$$Z = f(y)\, e^{\delta x} + f_1(y)\, e^{-\delta x}$$

comme la lumière doit s'éteindre dès que x a une valeur positive sensible (en supposant par exemple que le métal soit du côté des x positifs et l'air du côté des x négatifs), la première fonction de y, $f(y)$ doit être nulle et il restera :

$$Z = f_1(y)\, e^{-\delta x},$$

d'où :

$$\frac{dZ}{dx} = -\delta Z. \tag{3}$$

Comme Z et $\frac{dZ}{dx}$ sont continues, cette même relation (3) devra être encore vraie dans l'air dans le voisinage du plan de séparation $x = 0$. Telle est la condition aux limites à laquelle nous avons à satisfaire.

Pour un métal parfaitement conducteur, β et par conséquent δ sont très grands et la relation (3) se réduit à $Z = 0$, c'est-à-dire à la relation que nous avons admise dans le paragraphe III.

Passons maintenant au cas où le plan de polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence et où, par conséquent, la force magnétique γ est parallèle à l'axe des z; nous retrouvons alors les deux équations :

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} + \alpha^2\gamma = 0, \qquad \frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} + \beta^2\gamma = 0,$$

d'où nous pourrons déduire encore que l'on a dans le métal

$$\gamma = f_1(y)e^{-\delta x}$$

et

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\delta\gamma.$$

Seulement ici les conditions aux limites ne sont plus les mêmes; γ doit être continu, mais il n'en est pas de même de $\frac{d\gamma}{dx}$; si l'on considère deux points très voisins de la surface de séparation et de part et d'autre de cette surface, les valeurs de $\frac{d\gamma}{dx}$ en ces deux points, dans l'air et dans le métal seront entre elles comme α^2 est à β^2. Nous aurons donc dans l'air et dans le voisinage du plan $x = 0$:

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\frac{\alpha^2\delta}{\beta^2}\gamma. \tag{4}$$

Si le métal est parfaitement conducteur et β très grand, cette condition se réduit à

$$\frac{d\gamma}{dx} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\gamma}{dn} = 0$$

qui est celle que nous avons adoptée au paragraphe III.

Ces formules sont celles de la réflexion métallique; toutes les théories de

cette réflexion, entre lesquelles nous n'avons pas à choisir, conduisent à des équations qui n'en diffèrent que par quelques termes très petits que nous pouvons négliger. Mais nous allons faire de ces formules un usage différent de celui qu'on en fait d'ordinaire. On s'en sert en effet pour comparer le rayon réfléchi au rayon incident. Soit, par exemple, en supposant le rayon polarisé dans le plan d'incidence,

$$(5) \qquad Z = \text{partie réelle de } A\, e^{i(\alpha \sin\varphi y - \alpha\cos\varphi x + pt)}$$

l'équation du rayon incident et

$$(6) \qquad Z = \text{partie réelle de } B\, e^{i(\alpha \sin\varphi y + \alpha\cos\varphi x + pt)}$$

celle du rayon réfléchi. Le rapport $\frac{B}{A}$ est une quantité imaginaire dont le carré du module représente le pouvoir réflecteur et dont l'argument représente la différence de phase entre le rayon réfléchi et le rayon incident. En substituant dans l'équation (3) et remarquant que la valeur totale de Z dans l'air doit être la somme des deux expressions (5) et (6) nous trouvons :

$$(7) \qquad i(A - B)\alpha\cos\varphi = \delta(A + B).$$

En faisant le même calcul dans le cas où le rayon est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, c'est-à-dire en faisant la substitution non plus dans l'équation (3), mais dans l'équation (4) nous trouvons :

$$(8) \qquad i(A - B)\beta^2\cos\varphi = \delta\alpha(A + B).$$

On se sert ordinairement des équations (7) et (8) pour calculer le rapport $\frac{B}{A}$; nous allons au contraire nous en servir pour étudier le rapport

$$\frac{A + B}{A} = \eta.$$

L'étude de η nous fera ainsi connaître le rapport des amplitudes de la vibration totale en un point du plan des yz, et de la vibration partielle que l'on aurait en ce même point si le rayon incident existait seul; elle nous fera connaître également la différence de phase de ces deux vibrations; en d'autres termes, elle nous renseignera sur les circonstances de l'interférence du rayon réfléchi avec le rayon incident.

Dans le cas extrême des métaux parfaitement conducteurs auxquels nous nous étions restreints dans les deux paragraphes précédents, β est infiniment

grand et les deux équations (7) et (8) se réduisent respectivement à

$$A + B = 0, \qquad A - B = 0.$$

On a alors dans les deux cas

$$\left|\frac{B}{A}\right| = 1,$$

ce qui veut dire que si le rayon incident est naturel, il en sera de même du rayon réfléchi.

Au contraire, on a :

$$\left|\frac{A+B}{A}\right| = 0 \quad \text{dans le premier cas}$$

et

$$\left|\frac{A+B}{A}\right| = 2 \quad \text{dans le second cas},$$

de sorte que si l'on fait interférer les deux rayons et que l'on étudie la vibration dans le plan des yz lui-même, le rayon résultant de cette interférence sera complètement polarisé.

M. Fizeau, dans le Mémoire que nous avons cité plus haut, a déjà fait remarquer que deux rayons naturels peuvent par leur interférence produire un rayon polarisé, et c'est ainsi qu'il expliquait les phénomènes qu'il avait découverts et qui ont, comme nous l'avons dit, les plus grands rapports avec ceux dont nous nous occupons.

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons vu que dans le voisinage immédiat de la surface métallique la polarisation est complète; et cela tient, comme on pourra s'en assurer en revoyant le calcul, à ce que nous avons supposé que sur cette surface même la valeur totale de Z est nulle. Cette valeur totale est égale à $A + B$ dans le cas simple que nous venons de traiter et qui est celui de la réflexion d'une onde plane. On voit ainsi une analogie qui pourrait échapper au lecteur inattentif, mais qui n'en est pas moins profonde entre l'analyse des deux paragraphes précédents et l'explication de M. Fizeau, fondée sur ce fait que l'interférence des deux rayons produit une polarisation beaucoup plus complète que la simple réflexion.

Revenons au cas des métaux ordinaires à pouvoir réflecteur considérable pour lesquels β est très grand, sans être infini. Appelons η et η' les valeurs du rapport $\frac{A+B}{A}$ tirées respectivement des équations (7) et (8). Il viendra :

$$\eta = \frac{2i\alpha\cos\varphi}{i\alpha\cos\varphi + \delta}, \qquad \eta' = \frac{2i\alpha\cos\varphi}{i\alpha\cos\varphi + \frac{\delta\alpha^2}{\beta^2}}.$$

L'intensité de la polarisation, c'est-à-dire le rapport des intensités des deux composantes principales, est mesurée par le rapport $\left|\frac{\eta'^2}{\eta^2}\right|$.

Ce rapport sous une incidence voisine de l'incidence rasante peut devenir égal à $\left|\frac{\beta^4}{\alpha^4}\right|$, c'est-à-dire plus grand que la 4e puissance du coefficient d'absorption.

Ajoutons que l'argument de η varie plus rapidement avec φ que celui de η'; et rappelons que cet argument de η représente la différence de phase entre la vibration résultant de l'interférence des rayons incident et réfléchi et la vibration incidente.

Dans les expériences de M. Gouy, on se trouve placé dans des conditions bien différentes puisque non seulement l'onde incidente n'est pas plane, mais que la surface réfléchissante qui est celle du tranchant, loin d'être plane a un rayon de courbure très petit.

On conçoit néanmoins que les choses doivent se passer à peu près de même. En effet ce qu'il y a d'essentiel dans notre raisonnement subsiste. Si la force électrique Z est parallèle à l'axe des z, Z et $\frac{dZ}{dn}$ sont continus $\Big($j'appelle $\frac{dZ}{dn}$ comme je l'ai expliqué à la fin du paragraphe I la dérivée de Z estimée suivant la normale à la surface réfléchissante$\Big)$. Mais comme la lumière doit s'éteindre très rapidement dans l'intérieur du métal, le rapport de $\frac{dZ}{dn}$ à Z doit être très grand, dans le métal et par conséquent dans l'air; par conséquent, Z est très petit.

Si, au contraire, c'est la force magnétique γ qui est parallèle à l'axe des z, γ est encore continu, mais $\frac{d\gamma}{dn}$ ne l'est plus. La valeur de $\frac{d\gamma}{dn}$ dans l'air est à celle de $\frac{d\gamma}{dn}$ dans le métal comme α^2 est à β^2. Le rapport de $\frac{d\gamma}{dn}$ à γ est encore très grand dans le métal et du même ordre de grandeur que β; mais dans l'air ce rapport est au contraire très petit et du même ordre de grandeur que $\frac{\alpha^2}{\beta}$ (quantité qui est petite si on prend une unité de longueur comparable à la longueur d'onde) et, par conséquent, $\frac{d\gamma}{dn}$ est très petit.

Je me contenterai de cet aperçu et ne tenterai pas d'évaluation numérique. Je me bornerai à dire que l'on doit se rapprocher des conditions de l'incidence rasante.

Comment maintenant vont varier dans les deux cas Z et γ à une distance finie de la surface métallique. C'est ce que va nous apprendre l'application du principe de Huyghens sous la forme que lui a donnée Kirchhoff.

Soit S la surface de l'écran, S' celle d'un cylindre de révolution ayant pour axe l'axe des z et un rayon très grand.

Soit $d\omega'$ un élément quelconque d'une de ces deux surfaces, x', y', z' les coordonnées du centre de gravité de cet élément.

Soit x, y, z un point intérieur au volume limité par les deux surfaces S et S' et situé par conséquent dans l'air.

Soit r la distance des deux points x, y, z et x', y', z'.

Soit

$$\varphi = \frac{e^{-i\alpha r}}{r}.$$

Nous avons vu qu'en supposant la lumière homogène la force électrique sera de la forme

$$Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt = \text{partie réelle} (Z_0 - iZ_1) e^{ipt}.$$

Nous poserons :

$$Z = (Z_0 - iZ_1) e^{ipt},$$

de sorte que ce que nous désignerons par la lettre Z ce sera non pas la force électrique elle-même, mais une exponentielle imaginaire dont cette force électrique sera la partie réelle.

De même, dans le cas où la force magnétique est parallèle à l'axe des z, cette force est la partie réelle d'une exponentielle de la forme

$$(\gamma_0 - i\gamma_1) e^{ipt}$$

et nous poserons :

$$\gamma = (\gamma_0 - i\gamma_1) e^{ipt}.$$

Nous conserverons les lettres Z et γ sans accent pour représenter les valeurs de ces fonctions au point x, y, z, et nous désignerons par Z' et γ' les valeurs de ces fonctions au point x', y', z'. Les notations

$$\frac{d\varphi}{dn}, \quad \frac{dZ'}{dn}, \quad \frac{d\gamma'}{dn}$$

représenteront les dérivées de φ, Z' et γ' estimées suivant la normale à l'élément $d\omega'$.

Le principe de Huyghens-Kirchhoff nous donne alors :

$$(9)\quad \begin{cases} 4\pi Z = \int \left(\varphi \dfrac{dZ'}{dn} - \dfrac{d\varphi}{dn} Z' \right) d\omega', \\ 4\pi\gamma = \int \left(\varphi \dfrac{d\gamma'}{dn} - \dfrac{d\varphi}{dn} \gamma' \right) d\omega'. \end{cases}$$

Les intégrales doivent être étendues aux deux surfaces S et S'.

On voit aisément :

1° Que l'intégrale prise le long de S' ne dépend que du faisceau incident, et nullement des divers faisceaux divergents, ni par conséquent de la forme et de la nature de l'écran.

2° Que l'intégrale prise le long des portions de l'écran qui ne sont pas très voisines du tranchant est négligeable.

Tout dépend donc de la valeur de l'intégrale prise le long des portions de S très voisines du tranchant.

Observons que α, avec nos unités habituelles de longueur est très grand de sorte que l'exponentielle $e^{-i\alpha r}$ qui entre en facteur dans φ varie très rapidement.

La quantité sous le signe $\int$ est donc de la forme $e^{-i\alpha r}$ F, F étant une fonction de x, y et z qui varie beaucoup moins rapidement que cette exponentielle. Nous pouvons adopter pour définir la position du point x', y', z' sur la surface S tel système de coordonnées que nous voulons; nous prendrons par exemple la distance r de ce point au point x, y, z et la différence

$$z - z' = \zeta$$

et nous aurons :

$$d\omega' = \mathrm{M}\, dr\, d\zeta,$$

M étant une fonction de r et de ζ qui n'est pas très grande non plus que ses dérivées. L'intégration par parties nous donne alors

$$\int e^{-i\alpha r} \mathrm{F}\, d\omega' = \iint e^{-i\alpha r} \mathrm{FM}\, dr\, d\zeta = \frac{-1}{i\alpha} \int e^{-i\alpha r} \mathrm{FM}\, d\zeta + \frac{1}{i\alpha} \iint e^{-i\alpha r} \frac{d\mathrm{FM}}{dr} dr\, d\zeta.$$

La présence de α au dénominateur nous montre quelle est la condition pour que notre intégrale ne soit pas négligeable. C'est que F soit très grand de l'ordre de α.

Or φ est fini, tandis que $\frac{d\varphi}{dn}$ est de l'ordre de α. Le rapport de $\frac{dZ'}{dn}$ à Z' est de

l'ordre de β. Le rapport des deux termes

$$\varphi \frac{dZ'}{dn} \quad \text{et} \quad Z' \frac{d\varphi}{dn}$$

est donc de l'ordre de $\frac{\beta}{\alpha}$. Si le pouvoir réflecteur du métal est très grand, ce rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ est très grand et tout se passe comme si Z' était nul.

D'autre part, le rapport de $\frac{d\gamma'}{dn}$ à γ' est de l'ordre de $\frac{\alpha^2}{\beta}$. Le rapport des deux termes

$$\varphi \frac{d\gamma'}{dn} \quad \text{et} \quad \gamma' \frac{d\varphi}{dn}$$

est donc de l'ordre de $\frac{\alpha}{\beta}$, c'est-à-dire très petit si le métal est très réfléchissant.

Ainsi tout se passera à peu près comme si l'on avait

$$Z' = \frac{d\gamma'}{dn} = 0.$$

Or c'est là l'hypothèse que nous avons faite dans les paragraphes III et IV. Nous avons le droit d'en conclure que la polarisation sera dans le même sens que dans le cas où nous nous étions placé dans ces deux paragraphes.

L'aperçu qui précède est beaucoup trop grossier pour me permettre une comparaison numérique même approchée. Toutefois il semble que la polarisation observée est notablement plus forte que celle à laquelle conduiraient les valeurs de β ordinairement adoptées, bien que, la phase de Z' variant plus rapidement que celle de γ' d'un point à l'autre du tranchant, on puisse supposer que les différents termes de l'intégrale

$$\int Z' \frac{d\varphi}{dn} d\omega'$$

se détruisent par une sorte d'interférence, ce qui expliquerait au moins en partie l'intensité de la polarisation. Au surplus, notre analyse est beaucoup trop imparfaite pour que de cette divergence on ait le droit de ne rien conclure contre les hypothèses d'où nous sommes partis, et qui sont généralement admises. Quoi qu'il en soit, on voit que nous nous rapprocherons d'autant plus des conditions des deux paragraphes précédents que le pouvoir réflecteur du métal sera plus considérable. La polarisation sera donc plus marquée pour les couleurs pour lesquelles ce pouvoir réflecteur est le plus grand, c'est-à-dire pour les couleurs qu'affecte la lumière réfléchie par ce métal. C'est sans doute

pour cette raison que dans la composante la plus forte, celle qui est polarisée perpendiculairement au plan de diffraction, ce sont ces couleurs qui dominent. Il semble, au contraire, que dans la composante la plus faible, les couleurs complémentaires $\left(\text{pour lesquelles } \frac{\beta}{\alpha} \text{ est moins grand et pour lesquelles, par conséquent, la polarisation devrait être moins complète}\right)$ devraient dominer à leur tour. Ce n'est pas tout à fait ce qui a été observé puisque cette composante paraît blanche. Peut-être une cause secondaire vient-elle neutraliser cette coloration complémentaire de la composante faible et accentuer au contraire la coloration de la composante forte, c'est que les rayons qui dominent dans cette seconde composante sont en général de grande longueur d'onde et par conséquent plus diffrangibles que les autres. Tout cela n'est encore qu'un aperçu bien insuffisant et bien des détails restent inexpliqués.

VI.

Je me propose maintenant de tenir compte de ce fait que le tranchant du biseau n'est pas parfait, de telle façon que la surface S de l'écran se compose de deux faces planes raccordées par une sorte de cylindre de rayon très petit.

Si nous supposons de nouveau β infini et le métal parfaitement conducteur, de façon à ne pas accumuler toutes les difficultés à la fois, nous devrons avoir le long de la surface S

$$Z' = \frac{d\gamma'}{dn} = 0,$$

de sorte que les équations de Huyghens-Kirchhoff se réduiront à :

$$(10) \qquad 4\pi Z = \int \varphi \frac{dZ'}{dn} d\omega',$$

$$(11) \qquad -4\pi\gamma = \int \frac{d\varphi}{dn} \gamma' d\omega'.$$

En effet, les intégrales des équations (9) du paragraphe précédent doivent être prises le long des surfaces S et S'. Le long de la surface S' elles sont, ainsi que nous l'avons vu, les mêmes que s'il n'y avait pas d'écran. Elles sont donc nulles, sauf à l'intérieur du faisceau directement transmis, et en dehors duquel

nous nous supposerons placé. Le long de S, les termes en Z' et en $\frac{d\varphi'}{dn}$ sont nuls. Les équations (9) peuvent donc être remplacées par les équations (10) et (11).

Soit alors ψ l'angle que fait la normale à la surface S avec le rayon vecteur qui joint le point x, y, z au point x', y', z', il viendra :

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\varphi}{dr}\cos\psi.$$

Si le point x', y', z' est voisin du tranchant mais situé cependant sur les faces planes du biseau, et si le point x, y, z est voisin de la surface S, c'est-à-dire si la déviation est grande et dirigée vers l'intérieur de l'ombre géométrique, l'angle ψ différera peu de 90° et $\cos\psi$ sera petit. Donc $\frac{d\varphi}{dn}$ sera petit. Il en résulte que les parties de l'intégrale du second membre de (11) qui auront le plus d'influence sur la valeur de γ, seront celles qui appartiennent à la portion cylindrique du tranchant. Il n'en sera pas de même pour l'intégrale du second membre de (10).

Peut-être peut-on s'expliquer de cette manière que la composante la plus forte et la plus colorée, soit plus affectée que l'autre par les irrégularités que ce tranchant peut présenter.

Mais le fait que le tranchant est plus ou moins arrondi peut avoir encore une autre influence dont nous rendrons grossièrement compte de la façon suivante :

Représentons-nous la surface de l'écran comme prismatique et formée, par exemple, par les deux faces du biseau AB et CD et par une très petite face plane BC faisant des angles égaux avec AB et CD.

Si la largeur de la face BC était nulle, nous retomberions sur le cas du paragraphe IV et la polarisation qui serait presque complète pour de grandes déviations, serait moins grande pour les déviations médiocres que ne l'indique l'observation.

Si la largeur de la face BC était très grande par rapport à la longueur d'onde, on devrait se considérer comme étant en présence d'un biseau très ouvert BCD et l'on pourrait encore appliquer les formules du paragraphe IV. La polarisation serait complète quand le rayon diffracté serait parallèle à BC, c'est-à-dire pour une déviation relativement faible, et pour des déviations plus grandes, il n'y aurait plus du tout de lumière diffractée.

Si la largeur de la face BC est petite sans être nulle (ce qui se rapproche du cas qui est effectivement réalisé), on trouverait sans doute des résultats intermédiaires : est-ce pour cette raison qu'on observe pour des déviations médiocres, moins de lumière et une polarisation plus intense que ne l'indiqueraient les formules du paragraphe IV ? Ce qui tendrait à le faire croire, c'est que la polarisation croît d'autant plus vite avec la déviation que le tranchant du biseau est plus arrondi.

Nous avons dit plus haut que, d'après l'observation, la lumière diffractée est maximum à déviation égale quand le rayon incident et le rayon diffracté font des angles égaux avec l'écran. L'explication doit probablement, comme le fait très bien observer M. Gouy, être cherchée aussi dans la courbure du tranchant.

Les paragraphes V et VI où le problème abordé est beaucoup plus complexe que celui qui a été traité dans les paragraphes III et IV ne contiennent que des aperçus qui peuvent grossièrement nous faire prévoir le sens de certains phénomènes, mais qui sont dénués de toute précision. Une analyse plus rigoureuse serait donc nécessaire. Ce sera l'objet de la seconde partie de ce travail.

SUR

LA POLARISATION PAR DIFFRACTION

(SECONDE PARTIE.)

Acta mathematica, t. 20, p. 313-355 (1896-1897).

VII.

Je reprends, après un assez long intervalle, mon Mémoire sur la polarisation par diffraction (¹). Depuis, ce problème a été l'objet d'un travail très important de M. Sommerfeld, qui a paru dans les *Mathematische Annalen*, et dans lequel cet auteur retrouve et complète mes résultats par une méthode extrêmement ingénieuse. J'aurai donc, dans ce qui va suivre, non seulement à compléter les résultats précédemment obtenus, mais à les comparer à ceux de M. Sommerfeld.

Je vais examiner dans ce paragraphe ce qui arrive quand j'abandonne la quatrième hypothèse énoncée dans la première partie de ce travail (p. 305) (²) à la fin du paragraphe II; c'est-à-dire quand je ne suppose plus que la lentille ait une ligne focale coïncidant exactement avec le bord du biseau.

Conservons d'ailleurs les autres hypothèse, et imaginons que l'angle du biseau soit infiniment petit et que l'écran soit parfaitement conducteur.

Voyons comment les résultats du paragraphe III vont se trouver modifiés. Nous aurons toujours (*cf.* 1re partie, p. 308) (³) :

$$Z = \sum A_n J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin\frac{n\omega}{2}$$

(¹) Ce journal, t. 16, p. 297-340; Ce tome p. 293.

(²) Ce tome p. 300.

(³) Ce tome p. 303.

ou si ρ est très grand :

$$(b) \qquad Z = \sum A_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right) \sin\frac{n\omega}{2}.$$

Le coefficient A_n doit dépendre du temps et, d'après nos hypothèses, être de la forme :

$$A_n^0 \cos pt + A_n^1 \sin pt \qquad (p = \alpha V).$$

Mais si Z est de la forme

$$Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt \quad (cf. \text{ 1}^{\text{re}} \text{ partie, p. 306}) \text{ (}^1\text{)},$$

ce sera la partie réelle de

$$Z' = (Z_0 - iZ_1) e^{ipt}.$$

Comme Z' satisfait aux mêmes équations que Z, il sera plus simple de considérer Z' au lieu de Z et d'écrire :

$$Z = \sum (A_n^0 - iA_n^1) J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin\frac{n\omega}{2} e^{ipt}$$

ou

$$Z' = \sum a_n e^{ipt} J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin\frac{n\omega}{2} \qquad (a_n = A_n^0 - iA_n^1)$$

ou en supprimant l'accent de Z' devenu inutile :

$$Z = \sum a_n e^{ipt} J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin\frac{n\omega}{2}.$$

En supposant ρ très grand, on a :

$$J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right) = \frac{e^{i\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right)} + e^{-i\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right)}}{\sqrt{2\alpha\pi\rho}},$$

d'où :

$$(1) \qquad Z = \sum \frac{a_n \sin\frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} e^{i\left(\alpha\rho + pt - \frac{n+1}{4}\pi\right)} + \sum \frac{a_n \sin\frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} e^{i\left(pt - \alpha\rho + \frac{n+1}{4}\pi\right)}.$$

Le premier terme correspond au faisceau incident, et le second aux divers faisceaux transmis.

Nous avons supposé jusqu'ici que la lentille avait sa ligne focale sur l'axe des z, ce qui se traduisait analytiquement par cette condition que a_n était essentiellement réel; car il ne devait pas y avoir de différence de phase entre les divers rayons incidents.

---

(1) Ce tome p. 301.

Mais il n'en est plus de même si la ligne focale ne coïncide pas exactement avec l'axe des z.

Soit en effet O l'origine des coordonnées, soient FM et FM′ deux rayons venant se croiser au point F sur la ligne focale. Prenons FM très grand par rapport à OF et FM′ = FM; la phase du mouvement lumineux devra être la même en M et en M′, puisque ces deux points sont à la même distance de la ligne focale. Mais ces deux points ne sont pas à la même distance du point O.

Prenons, au contraire, sur les deux rayons FM et FM′ deux points M_1 et M'_1 situés à une même distance ρ du point O, ρ étant très grand. Si la distance OM_1 est très grande, OM_1 fera un angle très petit avec FM; mais les deux points M_1 et M'_1 n'étant pas à la même distance du point F, la phase ne sera pas la même en ces deux points.

La phase au point M_1 sera proportionnelle à la distance OF multipliée par le cosinus de l'angle de OF avec FM.

L'expression $a_n \sin\frac{n\omega}{2}$ sera donc imaginaire et l'argument de

$$F(\omega) = \sum \frac{a_n \sin\frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{4}}$$

sera

$$l\cos(\omega - \omega_0),$$

l étant proportionnel à OF et ω_0 représentant l'angle de OF avec l'axe des x.

L'intensité et la phase de la lumière incidente sera ainsi définie par la fonction $F(\omega)$, l'intensité et la phase de la lumière transmise, tant directement que par réflexion ou par diffraction sera alors définie par la fonction :

$$F_1(\omega) = \sum \frac{a_n \sin\frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} e^{+i\frac{(n+1)\pi}{4}}.$$

Posons maintenant

$$\Phi(\omega) = \sum \frac{a_n \cos\frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} e^{-i\frac{(n+1)\pi}{4}},$$

$$\Phi_1(\omega) = \sum \frac{a_n \cos\frac{n\omega}{2}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} e^{+i\frac{(n+1)\pi}{4}},$$

il viendra :

$$\Phi + i\mathrm{F} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} \sum a_n \, e^{in\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{4}\right)},$$

$$\Phi - i\mathrm{F} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} \sum a_n \, e^{in\left(-\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{4}\right)},$$

$$\Phi_1 + i\mathrm{F}_1 = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} \sum a_n \, e^{in\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right)},$$

$$\Phi_1 - i\mathrm{F}_1 = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi\alpha\rho}} \sum a_n \, e^{in\left(-\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{4}\right)},$$

d'où :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Phi(\omega) + i\mathrm{F}(\omega) &= \Phi(-\omega) - i\mathrm{F}_1(-\omega), \\ i\Phi(\omega+\pi) - \mathrm{F}(\omega+\pi) &= \Phi_1(\omega) + i\mathrm{F}_1(\omega), \\ i\Phi(\pi-\omega) - \mathrm{F}(\pi-\omega) &= \Phi_1(\omega) - i\mathrm{F}_1(\omega), \end{aligned} \right.$$

d'où, enfin :

$$(3) \qquad \mathrm{F}_1(\omega) = \frac{\Phi(\omega+\pi) - \Phi(\pi-\omega)}{2} + i\,\frac{\mathrm{F}(\omega+\pi) - \mathrm{F}(\pi-\omega)}{2}.$$

Le calcul, sous une autre forme, est tout à fait pareil à celui du paragraphe III; $\mathrm{F}(\omega)$ dans les notations de la page 308 [1] du paragraphe III s'écrirait :

$$\mathrm{F}(\omega) = \frac{f(\omega)\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\rho}}.$$

On aurait de même (*cf.* 1re partie, p. 309) [2]

$$\mathrm{F}_1(\omega) = \frac{f_1(\omega) - i f_2(\omega)}{\sqrt{\rho}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et avec les notations de la page 312 [3] :

$$\mathrm{F}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}}\, f(\omega)\, e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

$$\mathrm{F}_1(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}}\,[\psi_1(\omega) - i\psi_2(\omega)]\, e^{+\frac{i\pi}{4}}.$$

La seule différence, c'est que la fonction $\mathrm{F}(\omega)$ n'est plus supposée réelle.

Le problème est ainsi ramené à la détermination de $\Phi(\omega)$ quand on connaît $\mathrm{F}(\omega)$.

---

(1) Ce tome, p. 303.

(2) Ce tome, p. 304.

(3) Ce tome, p. 306.

Or la formule de Fourier nous donne :

$$F(\omega)=\sum \frac{\sin\frac{n\omega}{2}}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\sin\frac{n\alpha}{2}\,d\alpha,$$

d'où :

$$\Phi(\omega)=\sum \frac{\cos\frac{n\omega}{2}}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\sin\frac{n\alpha}{2}\,d\alpha,$$

d'où l'on tire :

$$(4)\qquad \Phi(\omega)=\int_0^{2\pi} F(\alpha)\frac{d\alpha}{4\pi}\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega+\alpha}{4}-\operatorname{cotg}\frac{\alpha-\omega}{4}\right).$$

Mais cette formule demande une interprétation : en effet, la fonction sous le signe $\int$ devient infinie pour $\alpha=\omega$ (je suppose ω compris entre o et 2π); l'intégrale semble donc indéterminée à moins qu'on n'en précise le sens.

L'intégrale $\int_0^{2\pi}$ est indéterminée, mais l'intégrale :

$$\int_0^{\omega-\varepsilon}+\int_{\omega+\varepsilon}^{2\pi}$$

est parfaitement déterminée et tend vers une limite déterminée quand ε tend vers zéro.

C'est cette limite que Cauchy appelle *valeur principale* de l'intégrale.

C'est cette valeur principale qu'il faut prendre pour $\Phi(\omega)$.

D'après notre hypothèse, l'argument de $F(\omega)$ est égal à

$$l\cos(\omega-\omega_0)$$

et l est égal à 2πOF divisé par la longueur d'onde; ce sera donc un très grand nombre, à moins que OF ne soit très petit.

Nous conviendrons donc de considérer les quantités qui contiennent en facteurs $\frac{1}{\sqrt{l}}$ comme très petites du premier ordre, et celles qui contiennent en facteur $\frac{1}{l}$ comme très petites du second ordre.

L'intégrale

$$\int_a^b e^{il\alpha}f(\alpha)\,d\alpha$$

est alors du second ordre, pourvu que $f(\alpha)$ soit finie dans l'intervalle de a à b

ainsi que sa dérivée ; car elle est égale à :

$$\frac{e^{ilb}}{il} f(b) - \frac{e^{ila}}{il} f(a) - \frac{1}{il}\int_a^b e^{il\alpha} f'(\alpha)\, d\alpha.$$

Dans les mêmes conditions, l'intégrale :

$$\int_0^b e^{il\alpha^2} f(\alpha)\, d\alpha$$

sera du premier ordre ; en effet, la dérivée de $f(\alpha)$ étant finie, nous pourrons poser :

$$f(\alpha) = f(0) + \alpha\varphi(\alpha),$$

$\varphi(\alpha)$ restant finie, et notre intégrale peut alors s'écrire (en posant $\alpha^2 = \beta$) :

$$\int_0^\infty e^{il\alpha^2} f(0)\, d\alpha - \int_b^\infty e^{il\beta} \frac{f(0)\, d\beta}{2\sqrt{\beta}} + \int_0^b e^{il\beta} \varphi(\sqrt{\beta}) \frac{d\beta}{2}.$$

La première intégrale est du premier ordre et égale à

$$f(0)\frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2l}}$$

et les deux autres sont du second ordre en vertu du théorème précédent.

L'intégrale

(5) $$\int_a^b e^{il\varphi(\alpha)} f(\alpha)\, d\alpha$$

sera du second ordre si dans l'intervalle d'intégration $f(\alpha)$ est finie ainsi que sa dérivée et que $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$ et $\frac{1}{\varphi'(\alpha)}$; et en effet en posant

$$\varphi(\alpha) = \beta; \qquad \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} = f_1(\beta),$$

l'intégrale devient :

$$\int e^{il\beta} f_1(\beta)\, d\beta.$$

Supposons maintenant que $\varphi'(\alpha)$ s'annule dans l'intervalle d'intégration, par exemple pour $\alpha = \alpha_0$; posons :

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha_0) + \beta^2,$$

d'où

$$\varphi'(\alpha)\, d\alpha = 2\beta\, d\beta,$$

l'intégrale (5) deviendra :

$$e^{il\varphi(\alpha_0)} \int e^{il\beta^2} f_1(\beta)\, d\beta,$$

où

$$f_1(\beta) = f(\alpha) \frac{2\beta}{\varphi'(\alpha)}.$$

D'après les hypothèses faites $\left[f(\alpha),\ f'(\alpha),\ \varphi'(\alpha),\ \varphi''(\alpha),\ \frac{1}{\varphi'(\alpha)} \text{ finis} \right]$, $f_1(\beta)$ et sa dérivée

$$\frac{df_1}{d\beta} = \frac{4\beta^2 f'}{\varphi'^2} + \frac{2f}{\varphi'} - \frac{4f\varphi''\beta^2}{\varphi'^3}$$

restent finies.

Donc l'intégrale (5) est égale à des quantités près du second ordre à l'intégrale :

$$f_1(0)\, e^{il\varphi(\alpha_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{il\beta^2}\, d\beta = \frac{f_1(0)\, e^{il\varphi(\alpha_0)}}{\sqrt{2l}} \sqrt{\pi}(1+i).$$

Supposons maintenant que nous envisagions l'intégrale

(6) $$\int e^{il\alpha} f(\alpha)\, d\alpha,$$

où nous supposerons que $f(\alpha)$ devienne infinie pour $\alpha = \alpha_0$. Soit, par exemple,

(7) $$f(\alpha) = \frac{A}{\alpha - \alpha_0} + \varphi(\alpha),$$

$\varphi(\alpha)$ étant finie et continue. L'intégrale (6) n'a par elle-même aucun sens; mais nous envisagerons sa valeur principale; cette valeur sera évidemment égale à des quantités près du second ordre à la valeur principale de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{il\alpha} \frac{A\, d\alpha}{\alpha - \alpha_0}$$

qu'il est aisé de trouver et qui est égale à :

$$A\pi\, e^{il\alpha_0}.$$

De même, l'intégrale

$$\int e^{il\varphi(\alpha_0)} f(\alpha)\, d\alpha,$$

où $f(\alpha)$ est de la forme (7), où $\varphi(\alpha)$ est finie et continue et où $\varphi'(\alpha)$ ne s'annule pas, sera égal e à des quantités du second ordre près à

$$A\pi\, e^{il\varphi(\alpha_0)}.$$

Appliquons ces principes à l'intégrale (4) qui peut s'écrire :

$$\int_0^{2\pi} e^{il\cos(\alpha-\omega_0)} F_0(\alpha)\frac{d\alpha}{4\pi}\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega+\alpha}{4}+\operatorname{cotg}\frac{\alpha-\omega}{4}\right),$$

où $F_0(\alpha)$ qui est le module de $F(\alpha)$ a une valeur finie; nous pouvons même supposer que $F_0(\alpha)$ soit continu.

La fonction

$$F_0(\alpha)\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega+\alpha}{4}+\operatorname{cotg}\frac{\alpha-\omega}{4}\right)$$

ne cesse d'être finie et continue que pour $\alpha=\omega$. L'exposant

$$il\cos(\alpha-\omega_0)$$

a sa dérivée qui s'annule pour

$$\alpha=\omega_0, \qquad \alpha=\omega_0+\pi.$$

Si donc nous négligeons les quantités du second ordre, nous n'aurons à envisager que les éléments de l'intégrale qui sont voisins de $\alpha=\omega$, $\alpha=\omega_0$, $\alpha=\omega_0+\pi$.

Considérons d'abord les premiers; la valeur principale de l'intégrale dans le voisinage de $\alpha=\omega$, sera :

$$e^{il\cos(\omega-\omega_0)} F_0(\omega)=F(\omega).$$

Tenons compte enfin des éléments voisins de $\alpha=\omega_0+\pi$, il viendra

$$\alpha_0=\omega_0+\pi, \qquad \varphi(\alpha)=\cos(\alpha-\omega_0), \qquad \varphi'(\alpha)=-\sin(\alpha-\omega_0);$$

$$\beta^2=\varphi(\alpha)-\varphi(\alpha_0)=\cos(\alpha-\omega_0)-\cos\pi=2\cos^2\left(\frac{\alpha-\omega_0}{2}\right),$$

$$\frac{2\beta}{\varphi'(\alpha)}=\frac{2\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha-\omega_0}{2}}{-\sin(\alpha-\omega_0)}=\frac{-\sqrt{2}}{\sin\dfrac{\alpha-\omega_0}{2}};$$

$$f(\alpha)=\frac{F_0(\alpha)}{4\pi}\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega+\alpha}{4}+\operatorname{cotg}\frac{\alpha-\omega}{4}\right),$$

$$f_1(\beta)=f(\alpha)\frac{-\sqrt{2}}{\sin\dfrac{\alpha-\omega_0}{2}};$$

$$f_1(0)=\frac{-\sqrt{2}F_0(\omega_0+\pi)}{4\pi}\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega+\omega_0+\pi}{4}+\operatorname{cotg}\frac{\pi+\omega_0-\omega}{4}\right).$$

La partie correspondante de l'intégrale sera donc :

$$-\frac{e^{-it}(1+i)}{\sqrt{t}}\,\frac{4}{\sqrt{\pi}}\,F_0(\omega_0+\pi)\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi-\omega_0+\omega}{4}+\operatorname{cotg}\frac{\pi+\omega_0-\omega}{4}\right).$$

La partie de l'intégrale qui correspond à $\omega=\omega_0$ se calculerait de la même manière.

On trouverait

$$\frac{e^{it}(1-i)}{\sqrt{t}}\,\frac{4}{\sqrt{\pi}}\,F_0(\omega_0)\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega+\omega_0}{4}+\operatorname{cotg}\frac{\omega_0-\omega}{4}\right);$$

mais pour mener à bien ce calcul il faudrait observer que $\varphi(\alpha)$ pour $\alpha=\omega_0$ atteint non pas un minimum, mais un maximum ; et poser, non pas :

$$\varphi(\alpha)=\varphi(\alpha_0)+\beta^2,$$

mais bien

$$\varphi(\alpha)=\varphi(\alpha_0)-\beta^2.$$

L'interprétation de ces résultats est aisée.

Négligeons d'abord les termes du premier ordre et ne tenons compte que des termes finis ; il vient alors :

$$\Phi(\omega)=F(\omega),$$

d'où :

$$(8)\qquad F_1(\omega)=(1+i)\frac{F(\omega+\pi)-F(\pi-\omega)}{2}.$$

Comparons ce résultat avec celui que nous avons obtenu au n° 3, c'est-à-dire dans les conditions d'une mise au point parfaite.

Nous devions alors diviser $F_1(\omega)$ en deux termes dont le premier :

$$\frac{\Phi(\omega+\pi)-\Phi(\pi-\omega)}{2}$$

représente la lumière diffractée, tandis que l'autre

$$(9)\qquad i\,\frac{F(\omega+\pi)-F(\pi-\omega)}{2}$$

représente la lumière transmise directement ou réfléchie.

Alors on retrouvait une moitié de l'énergie incidente dans la lumière diffractée, un quart dans la lumière transmise et un quart dans la lumière réfléchie.

Pour passer de l'expression (9) à l'expression (8), il suffit de la multiplier par $(1-i)$. Les intensités correspondantes se trouvent doublées et l'on retrouve la moitié de l'énergie incidente dans la lumière transmise et une moitié dans la lumière réfléchie. La portion de l'énergie qui se transforme en lumière diffractée est de l'ordre des quantités négligées, c'est-à-dire du premier ordre.

Tenons compte maintenant des termes du premier ordre.

On voit qu'en ce qui concerne ces termes, tout se passe comme si l'intégrale qui donne $\Phi(\omega)$ se réduisait à deux éléments, celui qui est voisin de $\alpha=\omega_0$ et celui qui est voisin de $\alpha=\omega_0+\pi$. Dans chacun de ces éléments, l'argument de $F(\alpha)$ qui passe par un maximum ou un minimum demeure sensiblement constant; de sorte que pour chacun d'eux tout se passe comme dans le paragraphe III.

Le rôle prépondérant joué par ces éléments est aisé à comprendre et la signification physique de cette prépondérance est manifeste; les seuls rayons qui subissent l'effet de la diffraction sont ceux qui passent près du bord de l'écran. Évidemment, d'ailleurs, ceux qui se rapprochent le plus du bord de l'écran, c'est-à-dire de O, sont ceux dont la direction est voisine de OF, puisque tous passent par le foyer, c'est-à-dire par F.

Dans les expériences telles qu'elles sont ordinairement faites, un seul de ces éléments interviendra. En effet, le faisceau concentré par la lentille aura une ouverture limitée, en tout cas inférieure à π. Par conséquent, la fonction $F(\alpha)$ qui définit l'intensité et la phase du faisceau incident sera nulle sauf quand α sera compris entre deux limites α_0 et α_1, conformément aux inégalités

$$\alpha_0<\alpha<\alpha_1.$$

Si ω_0 est compris entre α_0 et α_1, il n'en sera pas de même de $\omega_0+\pi$. Si donc $F(\omega_0)$ n'est pas nul, $F(\omega_0+\pi)$ sera nul; de sorte que l'élément correspondant à ω_0 interviendra seul.

En résumé, dans le calcul des termes du premier ordre, tout se passera comme si le faisceau au lieu d'avoir une ouverture égale à $\alpha_1-\alpha_0$ avait une ouverture beaucoup plus petite et si l'angle α variait seulement de $\omega_0-\varepsilon$ à $\omega_0+\varepsilon$. A cela près, il n'y aura rien de changé aux conclusions du paragraphe III.

Dans le Mémoire que j'ai cité, M. Sommerfeld retrouve les mêmes résultats que moi, bien qu'il traite un problème en apparence bien différent. Après ce qui précède, nous ne devons plus nous en étonner; le cas qu'il traite et qui est

celui de la lumière parallèle peut être regardé comme le cas extrême de la mauvaise mise au point, et nous venons de voir que le défaut de mise au point n'influait pas sur nos résultats les plus essentiels.

VIII.

Je voudrais maintenant indiquer le moyen de tenir compte de la courbure du tranchant du biseau. Pour cela, j'attribuerai à la section droite de ce biseau une forme aussi simple que possible, à savoir celle d'une hyperbole dont le sommet sera très voisin du centre. Alors cette hyperbole se confondra sensiblement avec ses asymptotes sauf dans la partie très voisine du sommet qui présentera au contraire un rayon de courbure très faible. Nous nous rapprocherons ainsi suffisamment du cas réalisé par un biseau dont le tranchant est imparfait.

Soit

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

l'équation d'un système d'ellipses et d'hyperboles homofocales. Soient x et y les coordonnées rectangulaires d'un point; soient λ et μ ses coordonnées elliptiques, λ étant le paramètre correspondant à l'ellipse et μ à l'hyperbole.

Soit alors

$$\mu = \mu_0$$

l'équation de la section droite du biseau.

Comme l'angle de ce biseau doit être très aigu et son tranchant presque parfait, il faut que c soit très petit et $\mu_0 < c$, mais très voisin de c; je veux dire que $\frac{c - \mu_0}{c}$ doit être très petit; car cette dernière quantité est de l'ordre de l'angle des deux asymptotes.

Il vient alors :

$$x = \frac{\lambda\mu}{c}, \qquad y = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}}{c};$$

$$dx^2 + dy^2 = d\lambda^2 \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} + d\mu^2 \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2},$$

$$(\lambda^2 - \mu^2)\Delta u = (\lambda^2 - c^2)\frac{d^2 u}{d\lambda^2} + \lambda\frac{du}{d\lambda} + (c^2 - \mu^2)\frac{d^2 u}{d\mu^2} - \mu\frac{du}{d\mu}.$$

Si maintenant nous considérons, soit Z dans l'hypothèse où le plan de polarisation est le plan d'incidence, soit la force magnétique γ, si ces deux plans sont rectangulaires, nous verrons que Z ou γ devra être la partie réelle de $u\,e^{ipt}$; u satisfaisant à l'équation

$$\Delta u + \alpha^2 u = 0,$$

et cette équation devient :

$$(\lambda^2 - c^2)\frac{d^2 u}{d\lambda^2} + \lambda\frac{du}{d\lambda} + (c^2 - \mu^2)\frac{d^2 u}{d\mu^2} - \mu\frac{du}{d\mu} + \alpha^2(\lambda^2 - \mu^2)u = 0.$$

Nous pourrons satisfaire à cette équation en posant :

$$u = \mathrm{LM},$$

L étant fonction de λ seulement et M de μ seulement et en supposant que L et M satisfassent aux équations :

$$(1)\qquad (\lambda^2 - c^2)\frac{d^2\mathrm{L}}{d\lambda^2} + \lambda\frac{d\mathrm{L}}{d\lambda} + \alpha^2(\lambda^2 - k)\mathrm{L} = 0,$$

$$(2)\qquad (\mu^2 - c^2)\frac{d^2\mathrm{M}}{d\mu^2} + \mu\frac{d\mathrm{M}}{d\mu} + \alpha^2(\mu^2 - k)\mathrm{M} = 0,$$

où k est une constante quelconque.

Il faut voir comment doit être choisie la constante k et aussi parmi toutes les intégrales des équations du second ordre (1) et (2) quelles sont celles qu'il faut choisir.

D'abord λ peut varier depuis c jusqu'à $+\infty$ et μ depuis $-c$ jusqu'à μ_0.

Nous étudierons donc l'équation (1) dans le voisinage de $\lambda = c$ et nous verrons que cette équation admet deux intégrales, la première développable suivant les puissances entières de $\lambda - c$, la seconde suivant les puissances impaires de $\sqrt{\lambda - c}$. La première pourra s'appeler la solution paire et la seconde la solution impaire.

Nous étudierons de même l'équation (2) dans le voisinage de $\mu = -c$ et nous trouverons de même deux solutions, une solution paire développable suivant les puissances entières de $\mu + c$ et une solution impaire développable suivant les puissances impaires de $\sqrt{\mu + c}$.

Si l'on veut que LM soit une fonction uniforme de x et de y, il faut choisir pour L soit la solution paire, soit la solution impaire de (1), et pour M la solution de même parité de (2).

Ainsi, L devra être soit la solution paire, soit la solution impaire et non pas une combinaison linéaire de ces deux solutions, et l'on obtiendra M en changeant dans L la variable λ en $-\mu$. Pour déterminer la constante k, on aura l'une des deux conditions suivantes :

1° Si le plan de polarisation est parallèle au plan d'incidence on devra avoir

$$M = 0 \quad \text{pour} \quad \mu = \mu_0;$$

2° Si, au contraire, le plan de polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence, on devra avoir :

$$\frac{dM}{d\mu} = 0 \quad \text{pour} \quad \mu = 0.$$

Si nous posons

$$\mu = -c\cos\omega,$$

l'équation qui donne u devient :

$$(3) \qquad (\lambda^2 - c^2)\frac{d^2u}{d\lambda^2} + \lambda\frac{du}{d\lambda} + \frac{d^2u}{d\omega^2} + \alpha^2(\lambda^2 - c^2\cos^2\omega)u = 0$$

et l'équation (2) devient

$$(2') \qquad \frac{d^2M}{d\omega^2} = \alpha^2 M(c^2\cos^2\omega - k).$$

Nous désignerons par ω_0 la valeur de ω qui correspond à $\mu = \mu_0$.

Si l'on avait supposé $c = 0$, on serait retombé sur les conditions du paragraphe IV, l'écran aurait été un biseau parfait limité par les deux plans

$$\omega = \quad \omega_0, \qquad \omega = \omega_0,$$

tandis que dans le paragraphe IV, nous avions pris comme plans limites de notre biseau

$$\omega = 0, \qquad \omega = \lambda\pi;$$

(cf. *loc. cit.*, p. 321) (¹); mais ce n'est qu'une différence de notation.

Si nous supposons, en outre, $\omega_0 = \pi$, nous retombons sur les conditions du paragraphe III, c'est-à-dire sur le cas d'un écran plan infiniment mince; seulement le plan de l'écran est $\omega = \pi$ et non $\omega = 0$, ce qui n'est encore qu'une différence de notation.

Enfin si ne supposant plus $c = 0$, nous faisons $\omega_0 = \pi$, d'où $\mu_0 = c$; l'hyper-

---

(¹) Ce tome, p. 314.

bole $\mu = \mu_0$ se réduit à une droite et nous retombons encore sur le cas du paragraphe III.

Supposons maintenant que le plan de polarisation soit perpendiculaire au plan d'incidence; ce n'est plus M, mais $\frac{dM}{d\omega}$ qui doit s'annuler pour $\omega = \pm \omega_0$.

Disons quelques mots du cas de $\omega_0 = \pi$ qui, comme nous l'avons vu, se ramène au cas du paragraphe III. Nous distinguerons alors quatre sortes de solutions.

1[re] *sorte* : Plan de polarisation parallèle au plan d'incidence; M est une fonction impaire de ω; c'est de plus une fonction périodique de ω de période 2π.

On a alors

$$M_0 = \sin\frac{m\pi\omega}{\omega_0} = \sin m\omega \qquad (m \text{ entier}).$$

2[e] *sorte* : Plan de polarisation parallèle au plan d'incidence; M est une fonction paire de ω; elle se change en $-$M quand ω se change en $\omega + 2\pi$

$$M_0 = \cos\frac{m\pi\omega}{\omega_0} = \cos m\omega \qquad (2m \text{ impair}).$$

3[e] *sorte* : Plan de polarisation perpendiculaire au plan d'incidence; M est une fonction impaire de ω et se change en $-$M quand ω se change en $\omega + 2\pi$

$$M_0 = \sin\frac{m\pi\omega}{\omega_0} = \sin m\omega \qquad (2m \text{ impair}).$$

4[e] *sorte* : Plan de polarisation perpendiculaire au plan d'incidence; M fonction paire de ω, périodique de période 2π

$$M_0 = \cos\frac{m\pi\omega}{\omega_0} = \cos m\omega \qquad (m \text{ entier})$$

(ces quatre sortes de solution se retrouvent d'ailleurs dans le cas général où ω_0 n'est pas égal à π).

S'il n'y avait pas d'écran, les solutions de la 1[re] et de la 4[e] sorte subsisteraient seules.

Mais si nous examinons l'équation (2'), nous reconnaîtrons une équation que l'on rencontre fréquemment en Mécanique céleste et qu'ont étudiée MM. Gyldén, Bruns, Tisserand, Callandreau. J'ai résumé les principaux

résultats connus au sujet de cette équation dans le chapitre XVIII du tome II de mon Ouvrage sur les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.

Cette équation admet deux solutions qui sont de la forme

$$e^{a\omega}F(\omega), \quad e^{-a\omega}F_1(\omega),$$

$F(\omega)$ et $F_1(\omega)$ étant périodiques de période 2π.

Pour certaines valeurs des constantes, l'exposant a devient un multiple de $\frac{i}{2}$; alors une des deux solutions subsiste seule et elle est périodique de période 2π ou 4π. Ce sont précisément les solutions qui conviennent au cas de $\omega_0 = \pi$; les quatre sortes de solutions correspondent dans un ordre convenable aux cas où le nombre entier $\frac{2a}{i}$ est congru 0, 1, 2, ou 3 (mod 4).

Une autre remarque mérite de retenir un instant notre attention. On sait que M. Gyldén a ramené approximativement l'équation (2') à l'équation de Lamé. D'autre part, la façon dont nous l'avons obtenue la rattache également à l'équation de Lamé, mais il faut chercher à se rendre compte de la nature du lien qui les unit.

Soit

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

un système d'ellipsoïdes homofocaux; soient ρ, μ, ν les coordonnées elliptiques d'un point et soit :

$$\xi = \int \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}, \qquad \eta = \int \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}},$$

$$\zeta = \int \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)}}.$$

L'équation $\Delta V = 0$ devient alors :

$$(5) \qquad (\mu^2 - \nu^2)\frac{d^2 V}{d\xi^2} + (\nu^2 - \rho^2)\frac{d^2 V}{d\eta^2} + (\rho^2 - \mu^2)\frac{d^2 V}{d\zeta^2} = 0.$$

Si alors nous posons

$$V = RMN,$$

et que R soit défini par l'équation

$$(6) \qquad \frac{d^2 R}{d\xi^2} = R(A\rho^2 + B),$$

où A et B sont des constantes quelconques; si M et N se déduisent de R en changeant ρ en μ et en ν, l'équation (5) se trouvera satisfaite.

L'équation (6) n'est autre chose que ce qu'on appelle l'équation de Lamé.

Si l'on suppose b très grand, et que l'on ait :

$$\rho^2 > b^2 > \mu^2 > c^2 > \nu^2,$$

on voit que ρ sera également très grand et que l'on aura sensiblement

$$\mu = c\cos(b\eta), \qquad \nu = c\cos(b\zeta).$$

L'équation (6) ou plutôt l'équation analogue :

$$\frac{d^2 M}{d\eta^2} = M(A\mu^2 + B)$$

devient alors en posant $b\eta = \omega$:

$$\frac{d^2 M}{d\omega^2} = M\left(\frac{A}{b^2}\cos^2\omega + \frac{B}{b^2}\right),$$

de sorte que nous retrouvons l'équation (2').

Il nous reste à voir comment l'équation (5) se ramène à l'équation en u, c'est-à-dire à l'équation (3).

Nous avons supposé b et ρ très grands ; posons

$$V = Ru,$$

R dépendant seulement de ξ, u dépendant seulement de η et de ζ. Nous poserons

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} = b^2\alpha^2\rho^2 R, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d^2 V}{d\xi^2} = b^2\alpha^2\rho^2 V\,;$$

nous voyons que α^2 ne dépend que de ξ ; ce sera donc une constante, si nous regardons ρ et ξ comme des constantes ; je supposerai que α^2 est fini et $b^2\alpha^2\rho^2$ très grand et je ne conserverai dans l'équation (5) que les termes qui contiennent ρ^2 en facteur. Il viendra en divisant par $\rho^2 R$:

$$b^2\alpha^2(\mu^2 - \nu^2)u + \frac{d^2 u}{d\zeta^2} - \frac{d^2 u}{d\eta^2} = 0$$

ou, en divisant par b^2 :

$$\frac{d^2 u}{d\mu^2}(c^2 - \mu^2) - \mu\frac{du}{d\mu} + \frac{d^2 u}{d\nu^2}(\nu^2 - c^2) + \nu\frac{du}{d\nu} + \alpha^2(\nu^2 - \mu^2)u = 0,$$

ce qui est bien notre équation en u à la différence des notations près, λ étant remplacé par ν.

IX.

Nous avons étudié dans le paragraphe précédent les fonctions M; les fonctions L, comme nous l'avons vu, s'en déduisent en changeant μ en $-\lambda$.

Mais j'ai surtout besoin de connaître les propriétés de ces fonctions L pour les valeurs très grandes de λ.

Il est clair, d'après la forme de l'équation (1) que la valeur approchée de cette fonction pour λ très grand sera :

$$A\frac{e^{i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + B\frac{e^{-i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}},$$

où A et B sont des constantes, et le principal problème qu'il nous reste à résoudre est la détermination du rapport $\frac{B}{A}\cdot$

Il y a des cas où nous savons faire cette détermination.

1° Si $c=0$; la fonction L n'est alors autre chose que la fonction de Bessel; et l'on a :

$$L = J_{\alpha\sqrt{k}}(\alpha\lambda),$$

d'où, pour λ très grand

$$L = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\lambda}}\cos\left[\alpha\lambda - \left(\frac{\alpha\sqrt{k}}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi\right].$$

Le rapport $\frac{B}{A}$ est alors égal à

$$e^{i\pi\left(\alpha\sqrt{k} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Quant à la valeur de k, il est aisé de la déduire de celle de ω_0; on voit que $\alpha\sqrt{k}$ doit être un multiple de $\frac{\pi}{2\omega_0}\cdot$ En résumé, le rapport $\frac{B}{A}$ devra être égal à

$$e^{\frac{i\pi}{2}\left(\frac{m\pi}{\omega_0}+1\right)},$$

m étant entier.

2° Si $\omega_0=\pi$; l'écran se réduit alors à un plan infiniment mince et les conclusions du paragraphe III doivent s'appliquer. La fonction L n'est plus une fonction J_n, mais elle est développable en série procédant suivant les fonctions J_n.

Supposons d'abord que L (et M) soit une solution de la 1re sorte. Alors

LM est une fonction de λ et de μ qui change de signe quand on change $\sqrt{c^2-\mu^2}$ en $-\sqrt{c^2-\mu^2}$ ou quand on change $\sqrt{\lambda^2-c^2}$ en $-\sqrt{\lambda^2-c^2}$; on peut également l'exprimer en fonction de x et de y ; on voit alors que c'est une fonction uniforme de x et de y qui change de signe avec y.

Mais il vaut mieux poser :

$$x = c + \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega$$

de façon à introduire des coordonnées polaires ρ et ω ; l'angle ω n'est pas alors le même que celui qu'on a introduit en posant $\mu = -c\cos\omega$.

On voit alors que l'on doit avoir :

$$\text{LM} = A_1 J_1(\alpha\rho)\sin\omega + A_2 J_2(\alpha\rho)\sin 2\omega + A_3 J_3(\alpha\rho)\sin 3\omega + \ldots ;$$

A_1, A_2, A_3 étant des coefficients quelconques.

Pour ρ très grand, on a sensiblement :

$$\mu = -c\cos\omega, \qquad \lambda = \rho + c\cos\omega,$$

$$J_n(\alpha\rho) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}}\cos\left(\alpha\rho - \frac{2n+1}{4}\pi\right)$$

ou approximativement :

$$J_n(\alpha\rho) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\lambda}}\cos\left(\alpha\lambda - \alpha c\cos\omega - \frac{2n+1}{4}\pi\right),$$

d'où :

$$\text{LM} = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\lambda}}\,e^{\alpha i\lambda - \alpha i c\cos\omega}\left[A_1\sin\omega\, e^{-\frac{3i\pi}{4}} + A_2\sin 2\omega\, e^{-\frac{5i\pi}{4}} + A_3\sin 3\omega\, e^{-\frac{7i\pi}{4}} + \ldots\right]$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\lambda}}\,e^{-\alpha i\lambda + \alpha i c\cos\omega}\left[A_1\sin\omega\, e^{+\frac{3i\pi}{4}} + A_2\sin 2\omega\, e^{\frac{5i\pi}{4}} + \ldots\right].$$

Le rapport $\frac{B}{A}$ est donc égal à

$$e^{2\alpha i c\cos\omega}\,\frac{A_1\sin\omega\, e^{+\frac{3i\pi}{4}} + A_2\sin 2\omega\, e^{\frac{5i\pi}{4}} + A_3\sin 3\omega\, e^{\frac{7i\pi}{4}} + \ldots}{A_1\sin\omega\, e^{-\frac{3i\pi}{4}} + A_2\sin 2\omega\, e^{-\frac{5i\pi}{4}} + A_3\sin 3\omega\, e^{-\frac{7i\pi}{4}} + \ldots}$$

et il doit être indépendant de ω.

Si nous faisons dans l'expression précédente $\omega = \frac{\pi}{2}$, les termes qui contiennent les sinus d'un multiple pair de ω disparaissent et il reste :

$$\frac{B}{A} = -i.$$

Si L et M étaient des solutions de la 4e sorte on aurait eu :

$$\text{LM} = A_1 J_1(\alpha\rho)\cos\omega + A_2 J_2(\alpha\rho)\cos 2\omega + \ldots$$

et après un calcul tout pareil au précédent :

$$\frac{B}{A} = e^{2\alpha ic\cos\omega}\,\frac{A_0 e^{\frac{i\pi}{4}} + A_1\cos\omega\, e^{\frac{3i\pi}{4}} + A_2\cos 2\omega\, e^{\frac{5i\pi}{4}} + \ldots}{A_0 e^{-\frac{i\pi}{4}} + A_1\cos\omega\, e^{-\frac{3i\pi}{4}} + A_2\cos 2\omega\, e^{-\frac{5i\pi}{4}} + \ldots}.$$

En faisant $\omega = \frac{\pi}{2}$, on aurait vu disparaître les termes qui contenaient en facteur un cosinus d'un multiple impair de ω et l'on aurait trouvé :

$$\frac{B}{A} = i.$$

Si L et M étaient des solutions de la seconde sorte, on aurait eu :

$$LM = \Sigma A_m J_m(\alpha\rho)\cos m\omega,$$

m étant la moitié d'un nombre impair; d'où :

$$\frac{B}{A} = e^{2\alpha ic\cos\omega}\,\frac{\Sigma A_m \cos m\omega\, e^{\frac{2m+1}{4}i\pi}}{\Sigma A_m \cos m\omega\, e^{-\frac{2m+1}{4}i\pi}}.$$

En faisant $\omega = \frac{\pi}{2}$, il vient :

$$\frac{B}{A} = \frac{\Sigma A_k + i\Sigma A_p}{\Sigma A_k - i\Sigma A_p},$$

où ΣA_k est la somme des coefficients A_m tels que $2m \equiv 3 \pmod 4$, tandis que ΣA_p est la somme des coefficients A_m tels que $2m \equiv 1 \pmod 4$.

On voit que le rapport $\frac{B}{A}$ dépend de c et il en serait encore de même en ce qui concerne les solutions de la 3[e] sorte.

Revenons aux solutions de la 1[re] sorte; on voit que la série

$$A_1 \sin\omega\, e^{-\frac{3i\pi}{4}} + A_2 \sin 2\omega\, e^{-\frac{5i\pi}{4}} + \ldots$$

représente le développement par la formule de Fourier de

$$K\, e^{\alpha ic\cos\omega} M,$$

K désignant une constante et où dans la fonction M on a remplacé μ par $-c\cos\omega$.

Je dis maintenant que le rapport $\frac{B}{A}$ a toujours pour module l'unité. En effet, d'après ce que nous avons vu plus haut, L est développable suivant les puissances de

$$\sqrt{\frac{i-c}{i+c}};$$

le développement est convergent pour toutes les valeurs de λ dont la partie réelle est positive; il contient seulement des puissances impaires ou seulement des puissances paires. Le rapport d'un coefficient au précédent est facile à calculer; on peut sans restreindre la généralité supposer que le premier coefficient est égal à 1; alors tous les autres seront réels et L sera une fonction réelle.

La valeur approchée de L devra donc être aussi une fonction réelle, c'est-à-dire que A et B devront être imaginaires conjugués; donc leur rapport aura pour module l'unité. Nous poserons donc :

$$\frac{B}{A} = e^{i\theta},$$

où θ est un nombre réel qui fait connaître l'excès de la marche optique sur la marche géométrique des rayons correspondant au mouvement lumineux représenté par la fonction LM près de l'écran.

Ce nombre θ est une fonction continue de $\alpha^2 c^2$ et de $\alpha^2 k$.

X.

Reprenons l'équation

$$(1)\qquad (\lambda^2 - c^2)\frac{d^2 L}{d\lambda^2} + \lambda\frac{dL}{d\lambda} + \alpha^2(\lambda^2 - k)L = 0.$$

Parmi les solutions de cette équation, nous en distinguerons deux : la solution paire qui est développable suivant les puissances paires de

$$\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}},$$

le premier coefficient se réduisant à l'unité. Nous la représenterons par la notation

$$L = F_1\left(\frac{\lambda}{c},\ \alpha^2 c^2,\ \alpha^2 k\right);$$

et la solution impaire qui est développable suivant les puissances impaires de

$$\sqrt{\frac{\lambda - c}{\lambda + c}},$$

le premier coefficient se réduisant à l'unité. Nous la représenterons par

$$L = F_2\left(\frac{\lambda}{c},\ \alpha^2 c^2,\ \alpha^2 k\right).$$

Pour une valeur donnée de $\frac{\lambda}{c}$, F_1 et F_2 sont des fonctions *entières* de $\alpha^2 c^2$ et $\alpha^2 k$.

Ce n'est pas tout. Reprenons les coefficients que nous avons appelés A et B dans le paragraphe précédent; et qui, nous l'avons vu, sont imaginaires conjugués.

Voici alors comment se présentent les diverses solutions de notre problème :

1° *Solutions de la* 1[re] *sorte :* Plan de polarisation parallèle à celui d'incidence; M fonction impaire de ω.

On déterminera k_i par l'équation :

$$(A_1) \qquad F_2\left(-\frac{\mu_0}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k_i\right) = 0$$

dont le premier membre est une fonction entière de k_i; et l'on prendra :

$$L_i = F_2\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k_i\right), \qquad M_i = F_2\left(-\frac{\mu}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k_i\right),$$

$$u = L_i M_i.$$

2[e] *sorte :* Les deux plans parallèles; M pair.

On déterminera k_i par

$$(A_2) \qquad F_1\left(-\frac{\mu_0}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k_i\right) = 0$$

et l'on prendra

$$L_i = F_1\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2 k_i\right), \qquad M_i = F_1\left(-\frac{\mu}{c}, \alpha^2 k_i\right).$$

3[e] *sorte :* Les deux plans perpendiculaires, M impair.

On déterminera k_i par

$$(A_3) \qquad F'_2\left(-\frac{\mu_0}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k_i\right) = 0.$$

Je désigne par F'_1 et F'_2 les dérivées de F_1 et F_2 par rapport à $\frac{\lambda}{c}$; on prendra

$$L_i = F_2\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2 k_i\right), \qquad M_i = F_2\left(-\frac{\mu}{c}, \alpha^2 k_i\right).$$

4[e] *sorte :* Les deux plans perpendiculaires; M pair.

On détermine k_i par

$$(A_4) \qquad F'_1\left(-\frac{\mu_0}{c}, \alpha^2 c^2, \alpha^2 k_i\right) = 0$$

et l'on prend

$$L_i = F_1\left(\frac{\lambda}{c}, \alpha^2 k_i\right), \qquad M_i = F_1\left(-\frac{\mu}{c}, \alpha^2 k_i\right).$$

Soient M_i et M_n deux solutions *de la même sorte*, soient M'_i, M'_n, M''_i, M''_n leurs dérivées premières et secondes par rapport à ω.

On aura les équations :

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} M''_i = \alpha^2 M_i (c^2 \cos^2 \omega - k_i), \\ M''_n = \alpha^2 M_n (c^2 \cos^2 \omega - k_n). \end{array} \right.$$

L'expression

$$(3)\qquad M_i M'_n - M_n M'_i$$

a pour dérivée :

$$M_i M''_n - M_n M''_i.$$

Mais pour $\omega = \pm \omega_0$, M_i et M_n s'annulent toutes deux, à moins que ce ne soient leurs dérivées M'_i et M'_n; dans tous les cas, l'expression (3) s'annule de sorte que l'on a :

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} (M_i M''_n - M_n M''_i)\, d\omega = 0$$

ou, en tenant compte des équations (2),

$$(k_i - k_n) \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} M_i M_n \, d\omega = 0$$

ou (si l'on suppose $k_i \gtrless k_n$) :

$$(4)\qquad \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} M_i M_n \, d\omega = 0.$$

Cela montre que M_i et M_n ne peuvent être imaginaires conjuguées et, par conséquent, que les équations (A_1), (A_2), (A_3), (A_4) ne peuvent avoir de racines imaginaires.

Soit maintenant l'expression $M_i M'_i$ dont la dérivée est

$$M'^2_i + M_i M''_i.$$

Cette expression s'annulant pour $\omega = \pm \omega_0$, on aura :

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} (M'^2_i + M_i M''_i)\, d\omega = 0,$$

ou en tenant compte de (2) :

$$\alpha^2 k_i \int M^2_i \, d\omega = \alpha^2 c^2 \int M^2_i \cos^2 \omega \, d\omega + \int M'^2_i \, d\omega,$$

ce qui montre que k_i ne peut être négatif.

Les équations (A_1), (A_2), (A_3), (A_4) ne peuvent donc avoir que des racines réelles positives.

Les équations (A_1) et (A_3) ne peuvent avoir de racine commune car si pour $\lambda = -\mu_0$, la fonction F_2 s'annulait ainsi que sa dérivée; cette fonction en vertu de l'équation (1) serait identiquement nulle.

Les équations (A_1) et (A_2) ne peuvent avoir de racine commune, car si pour $\lambda = -\mu_0$, les deux fonctions F_1 et F_2 s'annulaient, la solution générale de l'équation (1) qui n'est qu'une combinaison linéaire de F_1 et de F_2 devrait s'annuler également, ce qui est absurde, puisque l'équation (1) doit admettre une solution dont la valeur pour $\lambda = -\mu_0$, ainsi que celle de sa dérivée première, doit pouvoir être choisie arbitrairement.

On démontrerait de même que (A_2) et (A_4), (A_3) et (A_4) ne peuvent avoir de solution commune.

Mais pour $\alpha^2 c^2 = 0$, les équations (A_1) et (A_4) admettent pour racines

$$\alpha^2 k^2 = \frac{m^2 \pi^2}{\omega_0^2} \qquad (m \text{ entier})$$

et les équations (A_2) et (A_3) admettent

$$\alpha^2 k^2 = \frac{m^2 \pi^2}{\omega_0^2} \qquad (2m \text{ entier impair}).$$

On voit que pour $\alpha^2 c^2 = 0$ les racines de (A_1) et de (A_3) sont réelles et se séparent mutuellement. Mais comme ces racines ne peuvent jamais cesser d'être réelles et que deux d'entre elles ne peuvent jamais se confondre, elles ne pourront jamais cesser de se séparer.

Donc quel que soit $\alpha^2 c^2$, les racines de (A_1) et de (A_3) se sépareront mutuellement et il en sera de même de celles de (A_1) et de (A_2); de celles de (A_2) et de (A_4); de celles de (A_3) et de (A_4).

Nous admettons que toute fonction impaire de ω, $f(\omega)$, peut pour $-\omega_0 < \omega < \omega_0$ être développée en série procédant suivant les diverses solutions $M_i(\omega)$ de la 1re sorte correspondant aux diverses racines de (A_1). Soit alors :

$$f(\omega) = \Sigma A_i M_i(\omega);$$

il s'agit de calculer les coefficients A_i; en intégrant de $-\omega_0$ à $+\omega_0$ après avoir multiplié par $M_i(\omega)$ et tenant compte des relations (4), on trouve :

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} M_i f \, d\omega = A_i \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} M_i^2(\omega) \, d\omega;$$

désignons pour abréger par H_i les constantes

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} M_i^2(\omega)\,d\omega,$$

il viendra :

$$f(\omega) = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} f(\alpha)\,d\alpha \sum \frac{M_i(\alpha) M_i(\omega)}{H_i}. \tag{5}$$

De même, nous admettrons :

1° Que toute fonction paire $f(\omega)$ peut se développer suivant les solutions $M_i(\omega)$ de la 2e sorte correspondant aux racines de (A_2);

2° Que toute fonction impaire $f(\omega)$ peut se développer suivant les solutions $M_i(\omega)$ de la 3e sorte correspondant aux racines de (A_3);

3° Que toute fonction paire $f(\omega)$ peut se développer suivant les solutions $M_i(\omega)$ de la 4e sorte correspondant aux racines de (A_4).

Tous ces développements, on le verrait par la même analyse, seraient encore représentés par la formule (5).

Cela posé, envisageons une solution du problème de la diffraction; nous supposerons d'abord que le plan de polarisation est parallèle au plan d'incidence, et que le champ présente une symétrie telle que Z ait des valeurs égales et de signe contraire en deux points symétriques l'un de l'autre par rapport au plan des xz.

On aura alors :

$$Z = \text{partie réelle } u\, e^{ipt}$$

et

$$u = \Sigma C_n L_n M_n.$$

Les M_n sont des solutions de la 1re sorte de nos équations, les L_n sont les fonctions L correspondantes, les C_n des coefficients constants.

En un point très éloigné, on aura sensiblement (*cf.* § IX, au début) :

$$L_n = A_n \frac{e^{i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + B_n \frac{e^{-i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Les deux constantes A_n et B_n sont imaginaires conjuguées et leur rapport est égal à $e^{i\theta_n}$; nous pourrons poser

$$A_n = |A_n|\, e^{\frac{i\theta_n}{2}}, \qquad B_n = |A_n|\, e^{-\frac{i\theta_n}{2}}.$$

A chaque racine k_n de l'équation (A_1) correspond une fonction M_n, une fonction L_n et trois constantes A_n, B_n et θ_n.

Nous tirerons de là :

$$u = \frac{e^{i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \Sigma A_n C_n M_n + \frac{e^{-i\alpha\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \Sigma B_n C_n M_n. \tag{6}$$

Le premier terme correspond à la lumière incidente, le second à la lumière diffractée, réfléchie ou transmise. Si donc nous posons :

$$\Sigma A_n C_n M_n = F(\omega), \qquad \Sigma B_n C_n M_n = F_1(\omega),$$

la fonction $F(\omega)$ pourra être regardée comme donnée et c'est $F_1(\omega)$ qu'il s'agit de calculer.

D'après la formule (5), on aura :

$$F(\omega) = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} F(\psi)\, d\psi \sum \frac{M_n(\psi) M_n(\omega)}{H_n} \tag{7}$$

et

$$F_1(\omega) = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} F(\psi)\, d\psi \sum \frac{e^{i\theta_n} M_n(\psi) M_n(\omega)}{H_n} \tag{8}$$

[j'emploie la lettre ψ au lieu de α comme dans la formule (5) afin d'éviter toute confusion avec le coefficient α qui figure dans l'exponentielle $e^{i\alpha\lambda}$].

Nous avons supposé que la force électrique Z était une fonction impaire de y et que les deux plans d'incidence et de polarisation étaient parallèles.

Qu'y aurait-il à changer :

1° Si Z était une fonction paire de y et si les deux plans restaient parallèles;

2° Si les deux plans étaient perpendiculaires et si la force magnétique N était une fonction impaire de y;

3° Si les deux plans étaient perpendiculaires et si N était une fonction paire de y.

Il est clair que dans ces trois cas les formules (6), (7) et (8) subsisteraient sauf que les fonctions M_n de la 1re sorte devraient être remplacées par des fonctions de la 2e, de la 3e et de la 4e sorte.

On voit le rôle que jouent les deux séries

$$\sum \frac{M_n(\psi) M_n(\omega)}{H_n}, \tag{9}$$

$$\sum \frac{e^{i\theta_n} M_n(\psi) M_n(\omega)}{H_n}. \tag{10}$$

Malheureusement, ces deux séries sont divergentes et c'est de là que vient toute la difficulté. Pour nous en rendre compte, examinons le cas de $c = 0$ et considérons d'abord le cas des solutions de la 1[re] sorte.

On a alors :

$$M_n(\omega) = \frac{\sin n\beta\omega}{n\beta}, \qquad H_n = \frac{\omega_0^3}{n^2\pi^2}, \qquad \theta_n = \pi\left(n\beta + \frac{1}{2}\right),$$

où n est la moitié d'un nombre impair et où

$$\beta = \frac{\pi}{\omega_0}.$$

Les deux séries que nous avons à examiner sont donc au facteur constant près, $\frac{1}{\omega_0}$:

$$\Sigma \sin(n\beta\psi)\sin(n\beta\omega), \qquad \Sigma\, e^{in\beta\pi}\sin(n\beta\psi)\sin(n\beta\omega).$$

La somme des premiers termes de ces séries se calcule aisément; la somme

$$\Sigma \cos p\eta,$$

où $2p$ prend toutes les valeurs impaires depuis 1 jusqu'à $2n$ est évidemment :

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\eta}{\sin\frac{1}{2}\eta}$$

et plus généralement la somme

$$\Sigma\, e^{ip\xi}\cos p\eta$$

est égale à

$$\frac{e^{i(n+1)(\xi+\eta)} - e^{\frac{i}{2}(\xi+\eta)}}{e^{i(\xi+\eta)} - 1} + \frac{e^{i(n+1)(\xi-\eta)} - e^{\frac{i}{2}(\xi-\eta)}}{e^{i(\xi-\eta)} - 1}$$

ou

$$h(\xi + \eta) + h(\xi - \eta)$$

en désignant par $h(\xi + \eta)$ le premier terme de l'expression précédente.

On aura alors :

$$(1) \qquad 4\Sigma \sin(p\beta\psi)\sin(p\beta\omega) = h(\beta\psi - \beta\omega) + h(\beta\omega - \beta\psi) - h(\beta\omega + \beta\psi) - h(-\beta\omega - \beta\psi)$$

et

$$(2) \qquad 4\Sigma \sin(p\beta\psi)\sin(p\beta\omega)\, e^{ip\beta\pi} = h(\beta\pi + \beta\psi - \beta\omega) + h(\beta\pi - \beta\psi + \beta\omega) \\ h(\beta\pi + \beta\psi + \beta\omega) - h(\beta\pi - \beta\psi - \beta\omega).$$

Or la fonction h peut se mettre sous la forme suivante :

$$(13) \qquad h(\xi) = \frac{-1}{2i\sin\frac{1}{2}\xi} + \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}{2i\sin\frac{1}{2}\xi} + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}{2\sin\frac{1}{2}\xi}.$$

Le premier terme ne dépend pas de n; mais les deux autres termes dépendent de n et ne tendent pas vers une limite déterminée quand n augmente indéfiniment. C'est de ces termes que provient la divergence de nos séries.

D'autre part, $h(\xi)$ est fini, mais les deux premiers termes du second membre deviennent infinis pour $\xi = 0$.

Soit alors $f(\xi)$ une fonction quelconque qui reste finie; on aura :

$$\int f(\xi)h(\xi)\,d\xi = \int \frac{-f(\xi)\,d\xi}{2i\sin\frac{1}{2}\xi} + \int \frac{f\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi\,d\xi}{2i\sin\frac{1}{2}\xi} + \int \frac{f\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi\,d\xi}{2\sin\frac{1}{2}\xi}.$$

Les deux premières intégrales du second membre n'ont par elles-mêmes aucun sens, si zéro est compris dans le champ d'intégration, puisque la fonction sous le signe $\int$ devient infinie pour $\xi = 0$. Pour leur en donner un, nous conviendrons de prendre pour chacune d'elles la *valeur principale* de l'intégrale.

Alors la seconde intégrale tend vers zéro et la troisième vers $\pi f(0)$ quand n croît indéfiniment.

Reprenons la relation (12), divisons-la par $2\omega_0$ et écrivons-la sous la forme suivante :

$$S_1 = S'_1 + S''_1 + S'''_1.$$

S_1 sera le premier membre de (12) divisé par $2\omega_0$, c'est-à-dire la série (10) dans le cas de $c = 0$ et des solutions de la première sorte.

Quant à S'_1, S''_1, S'''_1, on les formera de la façon suivante. Après avoir divisé le second membre de (12) par $2\omega_0$, on y remplacera chaque fonction h par sa valeur (13); alors S'_1 sera ce que devient ce second membre quand on y remplace chaque fonction h par le premier terme de sa valeur (13); S''_1 et S'''_1 seront ce qu'il devient quand on y remplace chaque h par le second ou par le troisième terme de sa valeur (13).

Nous désignerons d'ailleurs par S_2, S'_2, S''_2, S'''_2; S_3, S'_3, ...; S_4, S'_4, ...; les quantités analogues obtenues en supposant toujours $c = 0$, mais en considérant respectivement le cas des solutions de la 2e, de la 3e ou de la 4e sorte.

La formule (7) devient alors :

$$(7) \qquad F_1(\omega) = \int F(\psi)S'_1\, d\psi + \int F(\psi)S''_1\, d\psi + \int F(\psi)S'''_1\, d\psi.$$

La première de ces intégrales est indépendante de n, la seconde tend vers zéro quand n croît indéfiniment et la troisième tend vers :

$$\frac{1}{4}[F(\omega - \pi) + F(\omega + \pi) - F(-\omega - \pi) - F(-\omega + \pi)].$$

Supposons maintenant $c > 0$ et appelons Σ_1 la somme des premiers termes de la série (10) de telle façon que la formule (7) devienne :

$$(7') \qquad F_1(\omega) = \lim \int F(\psi)\Sigma_1\, d\psi.$$

Pour aller plus loin, étudions comment se comportent les termes d'ordre élevé de la série Σ_1 ; ces termes dépendront d'une fonction M_n définie par l'équation :

$$M''_n = M_n(\alpha^2 c^2 \cos^2\omega - \alpha^2 k_n),$$

où k_n est une constante *très grande*.

Nous aurons alors une valeur approchée de M_n en remplaçant l'équation proposée par la suivante :

$$M''_n = -\alpha^2 k_n M_n;$$

car le terme $\alpha^2 c^2 \cos^2\omega$ est négligeable devant le terme $\alpha^2 k_n$.

On aura donc approximativement :

$$M_n = \frac{\sin \alpha \sqrt{k_n}\, \omega}{\alpha \sqrt{k_n}}.$$

Rendons-nous compte du degré de l'approximation. On voit que l'intégrale M_n dépend de c et peut être développée suivant les puissances croissantes de c^2. Le développement est d'ailleurs convergent quel que soit c^2 et quel que soit ω. En étudiant ensuite les divers termes de ce développement, on reconnaîtrait que la différence de M_n et de sa valeur approchée est de même ordre de grandeur que

$$\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{k_n}}\right)^2.$$

Maintenant k_n est défini par l'égalité

$$M_n(\omega_0) = 0.$$

Si M_n se réduisait à sa valeur approchée, cette équation donnerait

$$k_n = \frac{n^2\pi^2}{\alpha^2\omega_0^2}$$

et l'on verrait que l'erreur commise est encore de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$. En résumé, on a :

$$M_n = \frac{\sin\frac{n\pi\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right)}$$

avec une erreur de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$.

Si l'on supposait $c = 0$, on aurait, comme nous l'avons vu,

$$\theta_n = \pi\left(n\beta + \frac{1}{2}\right).$$

Ce sera encore là une valeur approchée de θ_n pour une grande valeur de k_n; je crois, sans l'avoir rigoureusement démontré, que l'erreur commise est encore de l'ordre de $\frac{1}{n}$ ou de $\frac{\log n}{n}$.

Donc le $n^{\text{ième}}$ terme de la série Σ_1 [c'est-à-dire de la série (10) où $c \gtrless 0$] diffère du terme correspondant de la série S_1 [c'est-à-dire de la série (10) où $c = 0$] d'une quantité qui est de l'ordre de $\frac{1}{n}$.

Je dis qu'on peut en conclure que la série $\Sigma_1 - S_1$ est convergente.

Et, en effet, le terme général peut se mettre sous la forme suivante :

$$H_n + H'_n,$$

où H_n est une somme de termes de la forme suivante : chacun d'eux est le produit de trois facteurs : 1° $\frac{1}{n}$ ou $\frac{\log n}{n}$; 2° un coefficient constant indépendant de n; 3° le sinus ou le cosinus de n fois un angle constant.

Quant à H'_n, il est de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$.

Il résulte de là que ΣH_n est semi-convergente et $\Sigma H'_n$ absolument convergente.

Par conséquent, $\Sigma_1 - S_1$ converge.

Reprenons la formule

$$(7'') \qquad F_1(\omega) = \lim \int F(\psi)\Sigma_1\, d\psi;$$

elle peut s'écrire :

$$F_1(\omega) = \int F(\psi)(\Sigma_1 - S_1)\,d\psi + \lim \int F(\psi) S_1\,d\psi$$

ou

$$F_1 = \int F(\Sigma_1 - S_1)\,d\psi + \int F S'_1\,d\psi + \lim \int F(S''_1 + S'''_1)\,d\psi$$

ou

(14) $$F_1 = \int F(\psi)(\Sigma_1 - S_1 + S'_1)\,d\psi$$
$$+ \frac{1}{4}[F(\omega - \pi) + F(\omega + \pi) - F(-\omega - \pi) - F(-\omega + \pi)].$$

Dans le second membre de (14), le premier terme représente la lumière diffractée et le second représente la lumière réfléchie ou directement transmise.

Nous poserons :

$$A_1(\omega, \psi) = \Sigma_1 - S_1 + S'_1.$$

A_1 sera une fonction parfaitement définie de ω et de ψ, puisque S'_1 ne dépend pas de n et que la série $\Sigma_1 - S_1$ est convergente; la lumière diffractée sera alors représentée par l'intégrale

(15) $$\int F(\psi) A_1(\omega, \psi)\,d\psi.$$

Nous représenterons par A_2, A_3, A_4 les fonctions formées avec les solutions de la 2e, 3e ou 4e sorte comme A_1 l'est avec celles de la 1re sorte.

Si $F(\psi)$ était une fonction paire de ψ, au lieu d'être une fonction impaire comme nous l'avons supposé jusqu'ici, la lumière diffractée serait représentée par l'intégrale

(16) $$\int F(\psi) A_2(\omega, \psi)\,d\psi.$$

Si enfin $F(\psi)$ était quelconque, elle serait représentée par l'intégrale

(17) $$\int \frac{F(\psi) - F(-\psi)}{2} A_1\,d\psi + \int \frac{F(\psi) + F(-\psi)}{2} A_2\,d\psi.$$

Les formules (16) et (17) supposent comme la formule (15) que le plan de polarisation est parallèle au plan d'incidence.

Supposons que la lumière incidente se réduise à un faisceau extrêmement délié, compris entre les directions $\psi_0 - \varepsilon$ et $\psi_0 + \varepsilon$ et de telle façon que

$$\int_{\psi_0 - \varepsilon}^{\psi_0 + \varepsilon} F(\psi)\,d\psi = 1,$$

la lumière diffractée dans la direction ω sera représentée par la formule :

$$\frac{1}{2}[A_1(\omega, \psi_0) - A_1(\omega, -\psi_0) + A_2(\omega, \psi_0) + A_2(\omega, -\psi_0)]$$

ou, puisque A_1 est une fonction impaire et A_2 une fonction paire de ψ_0 :

$$(18) \qquad A_1(\omega, \psi_0) + A_2(\omega, \psi_0).$$

Si le plan de polarisation était perpendiculaire au plan d'incidence, la lumière diffractée serait représentée par la formule

$$(19) \qquad A_3(\omega, \psi_0) + A_4(\omega, \psi_0).$$

Je m'arrête, bien que ces résultats soient bien incomplets ; je chercherai, dans la suite de ce travail, à combler les lacunes qui y subsistent ; mais je voudrais, avant de passer outre, examiner plus en détail ce qui arrive quand $\alpha^2 c^2$ est un très grand nombre ; et en effet si c est seulement d'un centième de millimètre, $\alpha^2 c^2$ peut être égal à 16 000.

Reprenons l'équation

$$(1) \qquad M'' = M(\alpha^2 c^2 \cos^2\omega - \alpha^2 k)$$

et posons :

$$z = \frac{M'}{M},$$

il viendra :

$$z' + z^2 = \alpha^2 c^2 \cos^2\omega - \alpha^2 k.$$

Le second membre étant très grand, z est très grand et par conséquent on aura une intégrale approchée de l'équation en négligeant z' devant z^2, ce qui donne

$$z = \alpha\sqrt{c^2\cos^2\omega - k}.$$

Posons alors :

$$y = \alpha\int_0^{\omega}\sqrt{c^2\cos^2\omega - k}\,d\omega ;$$

nous aurons alors deux intégrales approchées de l'équation (1)

$$M = e^y, \qquad M = e^{-y}$$

et, par conséquent, nous pourrons écrire l'intégrale générale approchée de cette équation

$$M = A e^y + B e^{-y},$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

Nous avons à distinguer la solution paire et la solution impaire; pour cela observons que y est une fonction impaire de ω; alors nous prendrons pour la solution paire :

$$M = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$$

et pour la solution impaire :

$$M = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2\alpha\sqrt{c^2 - k}}.$$

Dans le cas des solutions de la première et de la seconde sorte, le plan de polarisation est parallèle au plan d'incidence et on doit avoir :

$$M(\omega_0) = 0,$$

de sorte que l'équation (A_1) prend la forme

$$e^{2y} = 1$$

ou

$$(A_1) \qquad \alpha\int_0^{\omega_0} \sqrt{c^2\cos^2\omega - k}\, d\omega = mi\pi \qquad (m \text{ entier}).$$

De même, l'équation (A_2) prend la forme

$$e^{2y} = -1$$

ou

$$(A_2) \qquad \alpha\int_0^{\omega_0} \sqrt{c^2\cos^2\omega - k}\, d\omega = \frac{2m+1}{2} i\pi \qquad (m \text{ entier}).$$

Dans l'un et l'autre cas, la valeur de l'intégrale doit être purement imaginaire, ce qui montre que $c^2\cos^2\omega - k$ ne peut jamais être positif, d'où

$$k > c^2.$$

Il serait aisé de former les équations (A_3) et (A_4); je me bornerai à rappeler que leurs racines sont séparées par celles de (A_1) et (A_2); toutes les valeurs de k, sauf peut-être deux d'entre elles, doivent donc être plus grandes que c^2.

L'approximation ne sera convenable que si la partie imaginaire de ω n'est pas très grande, ce qui empêche de déterminer facilement θ_n.

XI.

Nous avons jusqu'ici supposé qu'on avait affaire à des ondes cylindriques; voyons comment les résultats seront modifiés si nous supposons que la lumière est concentrée par une lentille *sphérique* en un *point* du tranchant du biseau.

Nous adopterons d'ailleurs les hypothèses les plus simples, c'est-à-dire que nous supposerons l'écran réduit à un demi-plan mathématique et parfaitement conducteur et la lentille bien mise au point sur le bord de cet écran.

Reprenons l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + \alpha^2 V = 0$$

à laquelle doivent satisfaire la composante Z de la force électrique, et la composante γ de la force magnétique. [Rapprocher de l'équation (2), p. 306 [1] de la 1re partie de ce travail.]

Passons aux coordonnées polaires en posant :

$$x = \rho \cos\varphi \sqrt{1-\mu^2},$$

$$y = \rho \sin\varphi \sqrt{1-\mu^2},$$

$$z = \rho\mu.$$

Nous prenons, bien entendu, pour axe des z le bord de l'écran, et pour origine le point où la lumière est concentrée par la lentille.

Notre équation devient alors :

$$(2) \qquad \frac{d^2V}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dV}{d\rho} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2V}{\rho^2 d\varphi^2} + \frac{1-\mu^2}{\rho^2}\frac{d^2V}{d\mu^2} - \frac{2\mu}{\rho^2}\frac{dV}{d\mu} + \alpha^2 V = 0.$$

L'écran a pour équation $\varphi = 0$ ou $\varphi = 2\pi$.

La fonction V, quelle qu'elle soit, sera développable en série trigonométrique procédant suivant les sinus ou les cosinus de $\frac{m\varphi}{2}$, m étant entier.

S'il n'y avait pas d'écran, le développement ne devrait contenir que des termes où m est pair.

S'il y a un écran et si le plan de polarisation est dans le plan d'incidence, on doit prendre $V = Z$ et Z doit s'annuler pour $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$. Le développement ne contiendra donc que des sinus, m pouvant être pair ou impair (*c'est l'hypothèse à laquelle nous nous restreindrons, pour plus de brièveté*).

Si le plan de polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence, on doit prendre $V = \gamma$ et $\frac{dV}{dn}$ doit s'annuler pour $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$. Le développement ne contiendra donc que des cosinus, m pouvant être pair ou impair.

Revenons à l'hypothèse, $V = Z$, $Z = 0$ pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$. Soit

$$A \sin\frac{m\varphi}{2}$$

---

[1] Ce tome, p. 301.

l'un des termes du développement. Nous serons conduit à supposer que A est de la forme suivante : RM, R étant fonction de ρ seulement et M de μ seulement.

Cherchons donc la condition pour que

$$V = RM \sin \frac{m\varphi}{2}$$

satisfasse à l'équation (2).

Cette équation se décomposera en deux autres :

$$(3)\qquad \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \alpha^2 R + \frac{bR}{\rho^2} = 0,$$

$$(4)\qquad (1-\mu^2)^2\frac{d^2M}{d\mu^2} - 2\mu(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu} - bM(1-\mu^2) - \frac{m^2}{4}M = 0;$$

b est une constante arbitraire.

Étudions d'abord l'équation (4).

Elle admet deux intégrales procédant suivant les puissances croissantes de $\mu - 1$, les exposants augmentant d'une unité à chaque terme; l'un des développements commence par un terme en $(\mu-1)^{\frac{m}{4}}$, l'autre par un terme en $(\mu-1)^{-\frac{m}{4}}$; cette dernière si m est pair peut être remplacée par une intégrale dont le développement contient des logarithmes. De même, nous aurons deux intégrales procédant suivant les puissances de $\mu+1$; l'un des développements commencera par un terme en $(\mu+1)^{\frac{m}{4}}$, l'autre par un terme en $(\mu+1)^{-\frac{m}{4}}$. Cette dernière si m est pair peut être remplacée par une intégrale dont le développement contient des logarithmes. Pour qu'une intégrale convienne, il faut qu'elle ne devienne infinie, ni pour $\mu = 1$, ni pour $\mu = -1$.

Il faut donc que ce soit la *même* intégrale dont le développement suivant les puissances de $\mu+1$ commence par $(\mu+1)^{\frac{m}{4}}$ et dont le développement suivant celles de $\mu - 1$ commence par $(\mu-1)^{\frac{m}{4}}$.

Dans ce cas, la fonction

$$(5)\qquad M(\mu^2-1)^{-\frac{m}{4}} = P$$

devra être holomorphe dans tout le plan. Comme, d'autre part, toute intégrale de l'équation (4) doit être développable pour μ assez grand suivant les puissances croissantes, entières ou fractionnaires de $\frac{1}{\mu}$, P doit admettre ce mode de

développement; or les seules fonctions holomorphes qui jouissent de cette propriété sont les polynomes entiers.

Donc P est un polynome entier; soit n son degré; alors le développement de P suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{\mu}$ commencera par un terme en μ^n, d'où

$$b = -\left(\frac{m}{2} + n\right)\left(\frac{m}{2} + n + 1\right).$$

Si m est pair, l'expression

$$\mathrm{M} \sin \frac{m\varphi}{2}$$

n'est autre chose qu'une fonction sphérique ordinaire. L'équation (3) s'intègre très aisément; si nous posons

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{4} - b} = \frac{m+1}{2} + n,$$

on trouve :

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \mathrm{J}_\lambda(\alpha\rho).$$

Les autres intégrales de (3) deviennent infinies pour $\rho = 0$.

L'expression approchée de R pour ρ très grand est donc :

$$\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Nous aurons donc pour ρ très grand :

$$\mathrm{Z} = \sum \mathrm{A}_{m,n} \sin \frac{m\varphi}{2} (\mu^2 - 1)^{\frac{m}{4}} \mathrm{P}_{m,n} \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \frac{1}{\rho} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$\mathrm{P}_{m.n}$ étant le polynome P défini par l'équation (5) et les $\mathrm{A}_{m.n}$ étant des coefficients indépendants de ρ, de φ et de μ et linéaires en $\cos pt$ et $\sin pt$.

Nous pourrons d'ailleurs, comme à la page 309 de la 1re partie (¹), séparer les différents faisceaux et écrire :

$$\mathrm{Z} = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sum \mathrm{B}_{m,n} \sin \frac{m\varphi}{2} (\mu^2 - 1)^{\frac{m}{4}} \mathrm{P}_{m,n} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right)$$

pour le faisceau incident et

$$\mathrm{Z} = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sum \mathrm{C}_{m,n} \sin \frac{m\varphi}{2} (\mu^2 - 1)^{\frac{m}{4}} \mathrm{P}_{m.n} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)$$
$$+ \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sum \mathrm{D}_{m.n} \sin \frac{m\varphi}{2} (\mu^2 - 1)^{\frac{m}{4}} \mathrm{P}_{m.n} \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)$$

pour les faisceaux divergents.

(¹) Ce tome, p. 304.

Si nous égalons les coefficients, il viendra :

$$A_{m.n} \cos \frac{\lambda \pi}{2} = \quad B_{m.n} \cos pt + C_{m.n} \cos pt - D_{m.n} \sin pt,$$

$$A_{m.n} \sin \frac{\lambda \pi}{2} = - B_{m.n} \sin pt + C_{m.n} \sin pt + D_{m.n} \cos pt,$$

d'où

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si} \quad m+1+2n \equiv 0 \\ \phantom{\text{si}} \quad m+1+2n \equiv 1 \\ \phantom{\text{si}} \quad m+1+2n \equiv 2 \\ \phantom{\text{si}} \quad m+1+2n \equiv 3 \end{array} \right\} \bmod 4, \quad \left\{ \begin{array}{ll} B_{m.n} = C_{m.n}, & D_{m.n} = 0, \\ B_{m.n} = D_{m.n}, & C_{m.n} = 0, \\ B_{m.n} = - C_{m.n}, & D_{m.n} = 0, \\ B_{m.n} = - D_{m.n}, & C_{m.n} = 0. \end{array} \right.$$

Nous distinguerons d'abord le cas où tout est symétrique par rapport au plan des xy, c'est-à-dire où l'on ne change rien en changeant μ en $-\mu$. C'est le cas des expériences de M. Gouy où l'axe du microscope se meut dans un plan perpendiculaire au bord de l'écran.

Le polynome $P_{m.n}$ est une fonction paire de μ si n est pair et une fonction impaire de μ si n est impair.

Dans le cas auquel nous nous restreignons, nous n'aurons donc que des termes où n est pair.

Nous aurons donc :

$$\begin{array}{llll} \text{si} & m \equiv 0, & B = D, & C = 0, \\ & m \equiv 1, & B = - C, & D = 0, \\ & m \equiv 2, & B = - D, & C = 0, \\ & m \equiv 3, & B = C, & D = 0. \end{array}$$

Dans le paragraphe III, nous avions trouvé

$$\begin{array}{llll} \text{si} & m \equiv 0, & B = C, & D = 0, \\ & m \equiv 1, & B = D, & C = 0, \\ & m \equiv 2, & B = - C, & D = 0, \\ & m \equiv 3, & B = - D, & C = 0. \end{array}$$

Nous retrouvons donc le même résultat que dans ce paragraphe III, mais en changeant C en D et D en $-$C. La lumière diffractée se comportera donc comme dans le cas du paragraphe III, mais avec une différence de phase égale à $\frac{\pi}{2}$.

Supposons maintenant que le champ possède une symétrie telle que Z se change en $-$Z quand on change μ en $-\mu$; alors nous n'aurons que des termes

où n sera impair; il vient alors :

$$\begin{aligned} \text{si}\quad m &= 0, & B &= -D, & C &= 0, \\ m &= 1, & B &= \ \ C, & D &= 0, \\ m &= 2, & B &= \ \ D, & C &= 0, \\ m &= 3, & B &= -C, & D &= 0. \end{aligned}$$

Nous retrouvons encore les résultats du paragraphe III, en y changeant C en $-$D et D en C. La lumière diffractée se comporte donc encore comme dans le cas du paragraphe III, mais avec une différence de phase égale à $-\frac{\pi}{2}$.

Si nous passons maintenant au cas général, nous pourrons toujours considérer le faisceau incident comme la superposition de deux autres, dont le premier admettra le premier genre de symétrie (c'est-à-dire sera tel que Z ne change pas quand μ se change en $-\mu$) et dont le second admettra le second genre de symétrie (c'est-à-dire sera tel que Z se change en $-$Z quand μ se change en $-\mu$). On étudiera donc séparément les effets de ces deux faisceaux, ainsi que je l'ai dit plus haut, et on n'aura plus ensuite qu'à les combiner.

Supposons que les rayons incidents forment un faisceau extrêmement délié, de telle façon que l'intensité de la lumière incidente soit nulle toutes les fois que μ et φ ne satisfont pas aux inégalités

$$\mu_0 - \varepsilon < \mu < \mu_0 + \varepsilon, \qquad \varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon,$$

μ_0 et φ_0 étant deux constantes données et ε une constante très petite.

Posons pour abréger :

$$B_m = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_{m.n} P_{m.n}, \qquad C_m = \Sigma C_{m.n} P_{m.n}, \qquad D_m = \Sigma D_{m.n} P_{m.n}$$

d'où pour le faisceau incident

$$Z = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sum B_m \sin\frac{m\varphi}{2} (\mu^2-1)^{\frac{m}{2}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right)$$

et pour les autres faisceaux

$$\begin{aligned} Z = {} & \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sum C_m \sin\frac{m\varphi}{2} (\mu^2-1)^{\frac{m}{2}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) \\ & + \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sum D_m \sin\frac{m\varphi}{2} (\mu^2-1)^{\frac{m}{2}} \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right). \end{aligned}$$

On devra alors avoir $B_m = 0$, pour toutes les valeurs de m, à moins que

$$\mu_0 - \varepsilon < \mu < \mu_0 + \varepsilon.$$

B_m est une fonction de μ. On a

$$B_m(\mu) + B_m(-\mu) = 2\Sigma' B_{m.n} P_{m.n},$$

la sommation du second membre, indiquée par le signe Σ', ne s'étendant qu'aux valeurs paires de n. Les deux membres de l'égalité (7) doivent s'annuler à moins que l'on ait

$$(8) \qquad \mu_0 - \varepsilon < \mu < \mu_0 + \varepsilon \quad \text{ou} \quad -\mu_0 - \varepsilon < \mu < -\mu_0 + \varepsilon.$$

On en conclut à l'aide des égalités (6) que l'on doit avoir :

$$2\Sigma' C_{m.n} P_{m.n} = 2\Sigma' D_{m.n} P_{m.n} = 0,$$

à moins que l'une des deux inégalités (8) ne soit satisfaite.

De même, on aura :

$$(7') \qquad B_m(\mu) - B_m(-\mu) = 2\Sigma'' B_{m.n} P_{m.n},$$

la sommation indiquée par le signe Σ'' s'étendant aux valeurs impaires de n. Les deux membres de (7′) s'annulent, si l'une des deux inégalités (8) n'est pas satisfaite. On en conclut

$$2\Sigma'' C_{m.n} P_{m.n} = 2\Sigma'' D_{m.n} P_{m.n} = 0.$$

On aura donc :

$$C_m = D_m = 0,$$

à moins que l'une des inégalités (8) ne soit satisfaite. Cela veut dire que la lumière diffractée sera répartie sur un cône de révolution ayant pour axe l'axe des z et sur le prolongement de ce cône. C'est d'ailleurs sur ce même cône que se trouve le faisceau incident.

Je ne crois pas que l'on ait fait d'expérience avec le faisceau incident oblique au bord de l'écran. Il serait curieux de vérifier dans quelle mesure la conclusion simple qui précède est confirmée par l'expérience, malgré les irrégularités du tranchant du biseau et bien que les conditions théoriques où nous nous sommes supposés placés dans ce paragraphe soient beaucoup plus simples que les conditions réelles.

A PROPOS

DE LA

THÉORIE DE M. LARMOR

L'Éclairage électrique, t. 3, p. 5-13 (6 avril 1895).

Cet article, comme ceux qui suivront, ne peut être regardé, ni comme un exposé, ni comme une critique du travail que M. Larmor a récemment présenté à la Société royale de Londres, sous le titre suivant : *A Dynamical Theory of the electric and luminiferous medium* (¹). Il contiendra simplement le résumé des réflexions que m'a suggérée la lecture de cette importante communication et qui m'entraîneront souvent bien loin de la théorie de M. Larmor. C'est ce qui justifie le titre que j'ai choisi.

1. — Théories optiques.

Et d'abord je suis conduit, comme M. Larmor lui-même, à débuter par un résumé des diverses théories proposées par les savants qui se sont occupés d'optique. Les expériences sur l'Optique physique ont mis en évidence l'importance de deux vecteurs que j'introduirai ici sans faire aucune hypothèse sur leur signification théorique. Dans les milieux isotropes, auxquels je me bornerai toujours, pour ne pas compliquer cette exposition, le premier de ces vecteurs est perpendiculaire au plan de polarisation; j'en désignerai les composantes

(¹) LARMOR, *Proceedings of Royal Society*, t. LIV, p. 438 (7 déc. 1893); *La Lumière élect.*, t. LII, p. 351.

par X, Y et Z et je l'appellerai *vecteur de Fresnel*. Le second vecteur est perpendiculaire au rayon lumineux et parallèle au plan de polarisation; je l'appellerai *vecteur de Neumann* et je le désignerai par L, M et N.

Il y a, entre ces deux vecteurs, dans un milieu isotrope et transparent, des relations très simples. Si l'on désigne par A l'inverse de la vitesse de la lumière dans le vide et par ε le carré de l'indice de réfraction, on aura :

$$(1)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{dY}{dz}, \\ A\varepsilon\dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dM}{dz} - \dfrac{dN}{dy} \end{cases}$$

et quatre autres équations analogues que l'on déduirait des premières en permutant circulairement les lettres x, y et z; X, Y et Z; L, M et N, c'est-à-dire que la dérivée par rapport au temps de chacun des vecteurs est proportionnelle au « *curl* » de l'autre vecteur pour employer l'expression anglaise.

Il est aisé de voir que les équations (1) résument, pour ainsi dire, les principaux faits expérimentaux relatifs à l'Optique et cela indépendamment de toute théorie.

C'est dans l'interprétation théorique que les divergences commencent. Pour Fresnel, la vitesse d'une molécule d'éther est représentée en grandeur, direction et sens, par le vecteur X, Y, Z; pour Mac Cullagh et Neumann, elle est représentée par le vecteur L, M, N. En d'autres termes, pour Fresnel, la vibration est perpendiculaire au plan de polarisation; pour Neumann, elle est parallèle à ce plan.

Dans toutes les théories mécaniques de la lumière, les vibrations de l'éther sont attribuées à son élasticité; mais on peut faire sur cette élasticité plusieurs hypothèses; la plus simple est de la supposer analogue à celle des solides qui tendent à reprendre leur forme primitive, quand une force extérieure les en a écartés. Pour forcer les molécules d'éther à s'éloigner de leur situation d'équilibre, il faut donc dépenser un certain travail qui s'emmagasine dans le fluide et qu'il restitue, quand rendu à lui-même, il revient à l'équilibre. C'est ainsi qu'un ressort bandé est un réservoir d'énergie. Le travail ainsi emmagasiné est ce qu'on appelle l'énergie potentielle d'élasticité de l'éther.

Dans l'hypothèse de Fresnel, la force vive de l'éther a pour expression :

$$(2)\qquad \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon(X^2+Y^2+Z^2)\,d\tau.$$

et son énergie potentielle :

$$(3)\qquad \frac{1}{8\pi}\int (L^2 + M^2 + N^2)\,d\tau.$$

Les intégrations sont étendues à tous les éléments de volume $d\tau$ de l'espace. Cela revient à dire que la densité de l'éther est proportionnelle à ε; la masse de l'élément $d\tau$ est alors proportionnelle à $\varepsilon\,d\tau$; comme la vitesse, dans l'hypothèse de Fresnel, est représentée par le vecteur X, Y, Z, la force vive de l'élément $d\tau$ est proportionnelle à

$$\varepsilon\,d\tau(X^2 + Y^2 + Z^2).$$

D'autre part, tout se passera comme si l'énergie potentielle localisée dans un élément $d\tau$ très petit, était proportionnelle au volume de cet élément multiplié par le carré du vecteur de Neumann.

Dans l'hypothèse de Neumann, au contraire, c'est l'expression (2) qui représentera l'énergie potentielle et l'expression (3) qui représentera la force vive.

Le carré de la vitesse est, dans cette hypothèse, $L^2 + M^2 + N^2$; l'expression de la force vive montre que la densité de l'éther est supposée constante.

Quant à l'énergie potentielle localisée dans un élément très petit de l'espace, elle est proportionnelle au carré du vecteur de Fresnel multiplié par le facteur ε qui représente alors l'élasticité de l'éther.

Dans l'hypothèse de Neumann, l'élasticité est donc variable et la densité constante; c'est l'inverse dans la théorie de Fresnel.

Cette variabilité de l'élasticité donne lieu à une difficulté qui est spéciale à la théorie de Neumann et de Mac Cullagh. La pression de l'éther dans l'état d'équilibre ne peut être nulle, ce que l'autre hypothèse aurait permis de supposer. Elle ne peut non plus être constante, elle doit dépendre de ε, et, par conséquent, elle n'est pas la même dans deux milieux différents. Pour que l'équilibre se maintienne malgré cette différence de pression, il faut admettre qu'à la surface de séparation de deux milieux, l'éther est soumis à une force particulière qui rappellerait dans une certaine mesure la capillarité des liquides. C'est ce qu'on appelle la « force de Kirchhoff ».

On peut échapper à cette hypothèse supplémentaire, qui n'est d'ailleurs pas très gênante, en adoptant les idées de lord Kelvin sur l'élasticité.

L'axe d'une toupie en rotation tend à rester dans la position verticale; si on l'en écarte, il décrira un petit cône autour de la verticale, comme le fait le fil

d'un pendule conique sous l'influence de la pesanteur qui tend à le ramener à sa position d'équilibre. Pour un observateur qui ignorerait son mouvement de rotation, la toupie semblerait obéir à une sorte de force élastique. On peut imaginer des appareils plus compliqués qui reproduisent plus exactement encore les propriétés des corps élastiques et c'est ce qu'a fait lord Kelvin. Supposons des systèmes articulés dont certaines pièces, jouant le rôle de gyrostats, sont animées d'une rotation rapide. Dans ces systèmes, aucune force n'est en jeu; et pourtant ils se comporteront comme s'ils étaient doués d'élasticité. En apparence, on peut y emmagasiner de l'énergie potentielle; mais ils ne possèdent, en réalité, que de l'énergie cinétique.

On peut donc se demander si l'éther n'est pas constitué de la sorte; si un observateur, disposant de moyens assez puissants pour pénétrer toutes les délicatesses de sa structure intime, ne découvrirait pas que toute son énergie est due à la force vive des tourbillons infinitésimaux qui y sont renfermés. Son élasticité, que la théorie ordinaire explique par des attractions à distances s'exerçant entre les molécules, serait due alors à de simples forces apparentes d'inertie, analogues dans une certaine mesure à la force centrifuge.

Il y a toutefois une différence entre l'élasticité ordinaire, celle des solides, et « l'élasticité rotationnelle » de lord Kelvin. Quand on déforme un solide, son élasticité est mise en jeu; mais elle ne l'est plus quand on le fait tourner en changeant son orientation dans l'espace, mais sans changer sa forme. Il n'en est pas ainsi des systèmes articulés de lord Kelvin.

On ne peut changer leur orientation sans avoir à vaincre une sorte de résistance élastique.

On peut donc, avec cette nouvelle manière de voir, supposer que les diverses parties de l'éther tendent à conserver leur orientation, qu'on ne peut les en écarter sans dépenser du travail, et qu'elles y reviennent quand la force extérieure cesse d'agir.

On peut greffer l'hypothèse de lord Kelvin, soit sur la théorie de Fresnel, soit sur celle de Neumann. Dans l'un et l'autre cas, l'énergie totale est représentée par la somme des expressions (2) et (3) et elle est tout entière cinétique.

Seulement, dans l'hypothèse de Fresnel, l'expression (2) représente la force vive des vibrations de l'éther qui sont relativement des mouvements d'ensemble; l'expression (3) représente la force vive de mouvements tourbillonnaires beaucoup plus intimes encore (ou plutôt la partie variable de cette force vive).

Dans l'hypothèse de Neumann, c'est l'inverse; on n'a plus d'ailleurs à supposer l'existence de la force de Kirchhoff.

Dans l'un et l'autre cas on peut appeler énergie potentielle apparente, la partie de l'énergie totale qui est due aux mouvements tourbillonnaires intimes.

On peut s'étonner qu'en partant de deux points de départ aussi différents, on arrive à la même expression de l'énergie. Dans la théorie ordinaire, une rotation sans déformation n'entraîne pas de résistance élastique, tandis que, dans la théorie de lord Kelvin elle en fait naître. Comment l'énergie totale a-t-elle même valeur dans les deux cas? c'est ce qu'au premier abord on a quelque difficulté à s'expliquer.

On s'en rend compte en remarquant que l'éther est un milieu indéfini; une perturbation ne peut atteindre qu'une partie finie de ce milieu, les parties les plus éloignées restant en repos. Il est aisé de se rendre compte que dans un pareil milieu une partie ne peut tourner sans se déformer, sans que d'autres parties subissent une déformation. Si l'on supposait, par exemple, un cylindre tournant autour de son axe tout d'une pièce pendant que le reste de l'éther demeure en repos, il y aurait là une discontinuité que l'on ne saurait admettre; il faut supposer entre le cylindre qui tourne avec une vitesse angulaire uniforme et l'éther extérieur en repos, une couche de passage, qui pourra d'ailleurs être aussi mince qu'on le voudra, et où la vitesse ira en décroissant d'une manière continue quand on ira vers l'extérieur. Cette couche de passage serait dans tous les cas, le siège de déformations.

2. — Théories électriques.

Les équations que résument les lois observées des phénomènes électriques présentent une remarquable analogie avec celles de l'Optique; Maxwell a le premier remarqué cette analogie et ce sera son éternel titre de gloire; mais l'analogie est peut-être plus frappante encore quand on adopte les notations de Hertz (*Wiedemann's Annalen*, t. LX, p. 577).

Désignons donc avec Hertz par X, Y, Z, les composantes de la force électrique; par L, M, N, celles de la force magnétique; par ε le pouvoir inducteur électrostatique du milieu.

Dans un milieu non magnétique et diélectrique, ces quantités seront liées par des équations identiques aux équations (1), le coefficient A ayant même valeur numérique dans les équations électriques optiques.

Dans un milieu magnétique et conducteur, les équations sont un peu plus compliquées et il faut y introduire deux autres paramètres : à savoir le coefficient de perméabilité magnétique μ et le coefficient de conductibilité λ. Les équations prennent alors la forme suivante (*voir* Hertz, *loc. cit.*)

$$(4)\quad \begin{cases} A\mu \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{dY}{dz}, \\ A\varepsilon \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dM}{dz} - \dfrac{dN}{dy} - 4\pi A\lambda X. \end{cases}$$

Les équations (4) contiennent les équations (1) comme cas particuliers, et l'on obtient ces dernières en faisant :

$$\mu = 1, \qquad \lambda = 0.$$

Il nous sera permis, dans ce qui va suivre, de supposer $\mu = 1$. Nous pouvons, en effet, adopter l'hypothèse d'Ampère. Alors les milieux qui nous semblent magnétiques devraient, pour un observateur dont les sens seraient assez subtils, apparaître comme dénué de magnétisme, mais comme parcouru par un très grand nombre de courants particulaires.

L'identité de la lumière et de l'électricité semble hors de doute d'après ces considérations que des expériences récentes ont confirmées et on y a d'abord cherché une explication nouvelle des phénomènes optiques destinée à faire oublier les anciennes explications mécaniques.

Puis on a cherché une explication mécanique commune de la lumière et de l'électricité, et alors l'idée la plus naturelle était de revenir aux théories élastiques dont j'ai parlé plus haut et qui avaient si longtemps paru tout à fait satisfaisantes. Puisqu'elles rendaient compte de la lumière, il s'agissait de les adapter à l'explication de l'électricité.

L'adaptation aurait été immédiate, si les équations de l'électricité n'étaient, comme nous venons de le voir, plus générales que celles de l'Optique. Malheureusement les équations (1) ne sont que des cas particuliers des équations (4).

Cette circonstance ne doit pas toutefois nous décourager; prenons une quelconque des théories optiques, celle de Fresnel par exemple; dans cette théorie, la vitesse de l'éther est représentée par le vecteur X, Y, Z; supposons, par conséquent, que la vitesse de l'éther soit représentée par la force électrique. Reprenons les équations (4) et interprétons-les en conséquence; elles exprimeront certaines propriétés de l'éther; ce seront les propriétés qu'il faudra attribuer à ce fluide, si l'on veut conserver la théorie de Fresnel.

Au lieu d'appliquer ce procédé d'adaptation à la théorie de Fresnel, on peut l'appliquer à Neumann et Mac Cullagh, et c'est ce qu'a fait M. Larmor.

Dans l'un et l'autre cas, on est conduit à attribuer à l'éther des propriétés assez étranges et faites pour nous surprendre au premier abord. Il convient en tout cas d'insister sur ces étrangetés, soit qu'on veuille familiariser les esprits avec elles, soit qu'on les regarde comme des obstacles insurmontables qui ne permettent pas d'adopter ces explications.

3. — Adaptation de la théorie de Fresnel.

La théorie électromagnétique de la lumière, aujourd'hui confirmée par l'expérience, nous apprend que ce qu'on appelle en optique le vecteur de Fresnel n'est autre chose que la force électrique, et que le vecteur de Neumann est identique avec la force magnétique. Si donc nous voulons conserver la théorie de Fresnel, il faut que nous admettions que la vitesse de l'éther est représentée en grandeur, direction et sens par la force électrique.

Mais cette hypothèse entraîne des conséquences singulières.

Considérons une petite sphère électrisée; la force électrique est partout dirigée suivant le rayon vecteur qui va au centre de la sphère; telle devrait donc être aussi la direction de la vitesse de l'éther.

Il en résulterait qu'une sphère électrisée positivement, par exemple, absorberait constamment de l'éther et qu'une sphère électrisée négativement en émettrait constamment.

Et cette absorption ou cette émission devrait durer tant que la sphère conserverait sa charge.

En d'autres termes, les parties de l'espace où nous disons qu'il y a de l'électricité positive ou négative seraient celles où la densité de l'éther va constamment en augmentant, ou constamment en diminuant.

Cela semble bien difficile à admettre; comment la densité de l'éther pourrait-elle varier si longtemps toujours dans le même sens, sans que les propriétés de cet éther en paraissent modifiées. Faudra-t-il donc supposer que la densité de cet éther est très grande et sa vitesse dans un champ électrique très petite, de sorte que, malgré la durée de l'électrisation, les variations relatives de la densité soient peu sensibles ?

Poursuivons néanmoins notre examen. Voyons si cette compressibilité indé-

finie de l'éther n'est pas, sinon plus intelligible, au moins plus conforme aux hypothèses habituelles qu'il ne semble au premier abord.

Un gaz ne transmet pas les vibrations transversales; cela tient à ce qu'un glissement intérieur entre les couches gazeuses ne provoque pas de résistance élastique; si même le gaz était dépourvu de viscosité, un mouvement de glissement, une fois commencé se poursuivrait indéfiniment.

De même l'éther ne transmet pas les vibrations longitudinales; et cela peut s'expliquer de deux manières : On peut supposer qu'il est absolument incompressible. On peut encore imaginer, et c'est là l'hypothèse que Fresnel est obligé de faire pour expliquer la réflexion; qu'il est au contraire incapable de résister à la compression.

La compression dans l'éther, de même que le glissement dans les gaz, ne doit donc pas provoquer de résistance élastique; et alors quand une particule d'éther a commencé à se contracter ou à se dilater, cette contraction ou cette dilatation se poursuivra indéfiniment.

Les hypothèses anciennement admises entraînaient donc déjà cette conséquence que nous jugeons invraisemblable; on les acceptait pourtant parce qu'on croyait qu'elles n'étaient qu'approchées; pour adapter la théorie de Fresnel aux phénomènes électriques, il faut au contraire les supposer très près d'être rigoureusement réalisées, et c'est de là que vient la difficulté.

Je ne chercherai pas à la lever; mais je ne puis passer sous silence l'analogie entre les considérations qui précèdent et les sphères pulsantes de Bjerknes. Pendant que l'une de ces sphères se contracte, le mouvement dans le liquide environnant est tout à fait pareil à celui que la théorie précédente attribue à l'éther dans le voisinage d'une charge électrique positive. Quand cette sphère se dilate, elle est au contraire assimilable à une masse électrique négative.

On sait que la représentation des phénomènes électrostatiques par les sphères de Bjerknes n'est qu'imparfaite et cela pour deux raisons. La première sur laquelle on a surtout insisté, c'est que le signe des phénomènes est changé.

La seconde n'est pas moins importante. Bjerknes fait agir l'une sur l'autre deux sphères dont les pulsations ont même période; de plus, les pulsations ont toujours même phase, ou bien phase opposée, de telle façon que la différence de phase est toujours égale à o ou à π.

En se restreignant ainsi, il représente les phénomènes électriques au signe près; il serait arrivé sans cela à des lois beaucoup plus compliquées; supposons, par exemple, trois sphères pulsantes A, B et C ayant même période,

mais ayant respectivement pour phase 0, $\frac{\pi}{2}$ et π; A n'agirait pas sur B, ni B sur C; mais A agirait sur C. On n'a plus du tout la reproduction des lois de l'électrostatique.

Or, si l'on admet que l'électricité est due à de semblables oscillations, on pourra supposer à la rigueur que ces oscillations aient toujours même période; mais il n'y a aucune raison pour que la différence de phase soit toujours 0 ou π.

Bjerknes était bien forcé de donner à ces sphères un mouvement alternatif, mais l'éther indéfiniment compressible de la théorie de Fresnel adaptée, nous donne l'image de sphères pulsantes dont la contraction ou la dilatation durerait indéfiniment et pour ainsi dire de sphères pulsantes de période infinie.

Les attractions électrostatiques seraient donc immédiatement expliquées, s'il ne restait la difficulté du changement de signe. Elle n'est pas insurmontable, nous y reviendrons.

Voici maintenant la signification des équations (4); adoptant l'hypothèse d'Ampère, je suppose $\mu = 1$. D'où provient le terme en λ qui s'introduit dans les milieux conducteurs?

L'interprétation en est aisée; dans les conducteurs qui sont le siège d'un courant voltaïque, il y a réellement un courant continu d'éther; il y en a un aussi à travers les diélectriques dans un champ électrique ainsi que je l'ai dit plus haut; mais tandis que l'éther pourrait se déplacer à travers les diélectriques sans subir aucun frottement, il frotterait sur la matière des conducteurs, et ce serait la force vive détruite par ce frottement qui se transformerait en chaleur et qui échaufferait le circuit voltaïque.

Parmi les mouvements dont l'éther peut être le siège, il y en a qui ne provoquent aucune résistance élastique; ce sont des mouvements de cette sorte qui se produisent dans le voisinage d'un circuit parcouru par un courant voltaïque permanent.

Mais on ne peut directement passer du repos à un semblable mouvement ou inversement; il y a nécessairement une phase transitoire où d'autres mouvements se produisent, qui eux sont transversaux et doivent mettre en jeu l'élasticité de l'éther.

Ce serait cette réaction élastique qui produirait les phénomènes d'induction.

Nous reviendrons plus loin en détail sur tous ces points.

4. — Théorie de Larmor.

La théorie de M. Larmor n'est autre chose que l'adaptation de la théorie de Neumann. La vitesse de l'éther est alors représentée en grandeur, direction et sens par le vecteur de Neumann, c'est-à-dire par la force magnétique.

Comme nous supposons $\mu = 1$, on a partout

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0$$

et l'éther apparaît comme incompressible.

Si l'on considère un fil rectiligne parcouru par un courant voltaïque, dans le voisinage de ce fil, l'éther est en rotation; chaque molécule décrivant une circonférence qui a pour axe l'axe même du fil; la vitesse angulaire de rotation est en raison inverse du carré du rayon de cette circonférence.

Les phénomènes d'induction électromagnétique sont dus simplement à l'inertie de l'éther.

L'éther est doué de l'élasticité rotationnelle telle que la comprend lord Kelvin; on ne peut donc écarter une particule d'éther de son orientation primitive sans avoir à dépenser du travail. Mais cette résistance n'est pas toujours de même nature.

Dans les diélectriques, c'est une résistance élastique, et une particule d'éther, écartée de son orientation primitive, y revient dès qu'on l'abandonne à elle-même; dans les conducteurs, c'est une résistance analogue à la viscosité des liquides, cette particule ne tend pas à revenir d'elle-même à son orientation primitive, et tout le travail dépensé pour l'en écarter a été transformé en chaleur.

Les choses malheureusement ne sont pas aussi simples que cela, et il y a une difficulté qui mérite quelque attention. Le couple, qui dans cette théorie, tend à ramener une particule d'éther à son orientation, est représenté en grandeur, direction et sens, par le vecteur de Fresnel, c'est-à-dire par la force électrique X, Y, Z.

Si l'élasticité rotationnelle de lord Kelvin demeurait inaltérée, au moins dans les diélectriques, on devrait avoir à un facteur constant près :

$$A\varepsilon X = \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}, \qquad A\varepsilon Y = \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}, \qquad A\varepsilon Z = \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx},$$

ξ, η, ζ désignant les composantes du déplacement d'une molécule d'éther à partir de sa position primitive.

Il en résulterait que le flux de force électrique qui traverse une surface fermée quelconque dans le diélectrique devrait être nul; en d'autres termes, la charge totale d'un conducteur isolé devrait être nulle.

Il est donc nécessaire d'introduire dans la théorie une modification profonde, et cette nécessité n'a pas échappé à M. Larmor qui s'explique sur ce point en quelques lignes (*Proceedings*, 7 décembre 1893, p. 447, lignes 7 à 24).

Pour voir quelle est la modification convenable, il n'y a qu'une chose à faire; reprenons les équations (4), interprétons-les dans le langage de la théorie de Larmor et voyons ce qu'elles signifient.

Posons :

$$A\varepsilon X' = \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy},$$

la seconde équation (4) deviendra :

$$(5) \qquad A\varepsilon\frac{d(X - X')}{dt} = -4\pi A\lambda X.$$

Si λ était constamment nul, on aurait $X = X'$, c'est-à-dire que le couple développé par l'élasticité de l'éther tendrait à ramener chaque particule d'éther à son orientation primitive.

Supposons maintenant que λ soit variable; d'abord nul, ce coefficient prendrait une valeur positive pendant quelque temps, puis redeviendrait nul. C'est à peu près ce qui arrive dans le cas d'une décharge disruptive; l'air d'abord isolant, cesse de l'être pendant quelques instants au moment de la décharge et perd ensuite de nouveau ses propriétés conductrices.

Quelle est alors la signification de l'équation (5) ? On aura :

$$X - X' = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\int \lambda X\, dt$$

l'intégrale $\int \lambda X\, dt$ devant être étendue à toute la durée de la décharge, et étant par conséquent proportionnelle à la quantité d'électricité qui a passé pendant cette décharge; je puis donc écrire :

$$X - X' = ks,$$

k étant un coefficient constant et s étant cette quantité d'électricité.

Après la décharge, le couple élastique ne tend plus à ramener la particule d'éther à son orientation primitive, c'est-à-dire à une orientation telle que $X' = 0$, mais à une orientation telle que $X = ks$.

Pendant la décharge, le diélectrique perd son élasticité rotationnelle; après la décharge, il la recouvre, *mais profondément modifiée par le passage de l'électricité*.

L'élasticité des solides nous offre des phénomènes tout semblables. Une barre d'acier soumise à une traction s'allonge, mais pour revenir à sa longueur primitive, dès que la traction cesse. Si on la chauffe au rouge, elle perd son élasticité et devient ductile; sous la traction, après s'être allongée, elle conservera la longueur qu'elle aura ainsi acquise, même quand cette traction aura cessé. Si ensuite on la refroidit, elle recouvrera son élasticité, mais cette élasticité sera modifiée, car elle ne tendra pas à ramener la barre à la longueur qu'elle possédait avant toutes ces opérations, mais à la longueur qu'elle avait au moment où l'élasticité a été recouvrée.

Que se passe-t-il alors dans l'éther qui entoure un corps électrisé? Chaque particule est soumise à un couple élastique qui tend à la ramener à une orientation donnée, différente (au moins pour celles qui ont été traversées par de l'électricité pendant la charge) de celle qu'elle possédait avant l'électrisation. Les particules étant solidaires les unes des autres, les orientations qu'elles tendent à prendre sont en général incompatibles. Il se produit alors un équilibre où chacune de ces particules est comparable à un petit ressort tendu. Le travail des forces électrostatiques n'est autre chose que l'énergie emmagasinée dans ces petits ressorts.

Cette explication ne me satisfait pas encore complètement, parce que nous n'avons envisagé que la décharge disruptive, et que nous avons laissé de côté le cas où, pour modifier les charges de deux conducteurs, on les met en communication à l'aide d'un fil métallique, pour les isoler ensuite de nouveau en écartant le fil.

Mais là on a affaire à des corps en mouvement, et la difficulté est plus grande. Au lieu des équations (4) qui sont celles de Hertz (Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper, *Wied. Ann.*, t. 40, p. 577) [1], il faut considérer les équations beaucoup plus compliquées du second Mémoire de Hertz sur les corps en mouvement (Grundgleichungen der Elektrodynamik

---

[1] *La Lumière électrique*, t. XXXVII, p. 137, 188 et 239.

für bewegte Körper. *Wied. Ann.*, t. 41) [1]. J'étudierai ces équations dans un prochain article et je chercherai quelle est leur signification quand on les interprète soit dans le langage de la théorie de Fresnel adaptée, soit dans le langage de la théorie de Larmor.

J'aurai ainsi, du même coup, l'explication dans l'une et l'autre théorie, des phénomènes mécaniques dont un champ électromagnétique est le siège, c'est-à-dire des attractions électrostatiques et des actions mutuelles des courants.

Pour achever de tracer le programme des questions que je veux traiter dans les articles qui suivront, j'attirerai encore l'attention sur deux autres difficultés que nous aurons à examiner en détail. Généralement dans les recherches sur l'élasticité, on admet que les déformations des corps élastiques sont très petites; ici une semblable hypothèse n'est plus permise; dans un champ magnétique constant, la vitesse de l'éther est également constante d'après l'hypothèse de Larmor, et toujours dans le même sens. Au bout d'un certain temps, les molécules d'éther doivent avoir éprouvé des déplacements sensibles, et cela même en supposant cette vitesse constante très petite; car dans les corps magnétiques, il faut supposer l'existence de courants particulaires permanents qui doivent durer depuis l'origine du monde, bien qu'ils ne se manifestent que quand le corps est « magnétisé », c'est-à-dire quand tous ces petits courants sont ramenés par une cause extérieure à une orientation commune. Quelque petite que soit la vitesse de l'éther, un mouvement qui se produit toujours dans le même sens depuis l'origine du monde, a nécessairement produit des déplacements considérables.

En second lieu, dans un champ magnétique, l'éther est supposé en mouvement et il devrait entraîner les ondes lumineuses.

M. Larmor dit à ce sujet à la fin de son travail :

« Le professeur O. Lodge a bien voulu examiner l'effet d'un champ magnétique sur la vitesse de la lumière; mais n'a pu en déceler aucun, bien que les moyens qu'il employait fussent extrêmement délicats; il en résulterait, dans notre théorie, que le mouvement dans un champ magnétique est très lent, et par conséquent la densité du milieu très grande ».

Ainsi ce mouvement était si lent que les expériences de M. Lodge, quoique

---

[1] *La Lumière électrique*, t. XXXVIII, p. 488 et 549.

très précises, ne l'étaient pas encore assez pour le mettre en évidence. Pour dire toute ma pensée, j'estime que, ces expériences eussent-elles été cent ou mille fois plus précises, le résultat aurait encore été négatif.

Je n'ai à donner à l'appui de cette opinion que des raisons de sentiment ; si le résultat avait été positif, on aurait pu mesurer la densité de l'éther et, si le lecteur veut bien me pardonner la vulgarité de cette expression, il me répugne de penser que l'éther soit si arrivé que cela.

(*A suivre*).

A PROPOS

DE LA

THÉORIE DE M. LARMOR[1]

L'Éclairage électrique, t. 3, p. 289-295 (18 mai 1895).

5. — Électrodynamique des corps en mouvement.

Ainsi que je l'ai dit précédemment, je ne peux poursuivre l'examen de la théorie de Larmor qu'en examinant ce qui se passe dans un champ électromagnétique où il y a des corps en mouvement.

Le plus simple paraît être de prendre comme point de départ les équations de Hertz (Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper, *Wied. Ann.*, t. 41) et de les traduire ensuite soit dans le langage de la théorie de Fresnel adaptée, soit dans celui de la théorie de Larmor.

Mais une première question se pose. Ces équations, qui ne reposent, en somme, que sur quelques inductions hardies, peuvent-elles être acceptées telles quelles ? cela est fort douteux.

Examinons, en effet, ces équations et commençons par transcrire les groupes (1 *a*) et (1 *b*) de Hertz (Ausbreitung der Elektrischen Kraft, Leipzig, Barth, 1892, p. 16). Je supposerai $\mu = 1$, de sorte que l'induction magnétique, comme la force magnétique sera représentée par le vecteur L, M, N; quant à l'induction électrique, elle aura pour composantes : εX, εY, εZ; les compo-

(1) Voir *L'Éclairage électrique* du 6 avril, t. 3, p. 5-13; ce tome, p. 369.

santes du courant sont désignées par u, v, w, celles de la vitesse de la matière par α, β, γ. Je n'écris que la première équation de chaque groupe.

$$A\left[\frac{dL}{dt}+\frac{d}{dy}(\beta L-\alpha M)-\frac{d}{dz}(\alpha N-\gamma L)+\alpha\left(\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}\right)\right]=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz},$$

$$A\left[\frac{d\varepsilon X}{dt}+\frac{d}{dy}(\beta\varepsilon X-\alpha\varepsilon Y)-\frac{d}{dz}(\alpha\varepsilon Z-\gamma\varepsilon X)+\alpha\left(\frac{d\varepsilon X}{dx}+\frac{d\varepsilon Y}{dy}+\frac{d\varepsilon Z}{dz}\right)\right]$$
$$=\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}-4\pi A u.$$

Dans un milieu diélectrique homogène, nous devons supposer : 1° que ε est constant ; 2° que le courant est nul ; 3° que le magnétisme permanent est nul ainsi que la densité électrique, ce qui s'écrit :

$$\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}=\frac{d\varepsilon X}{dx}+\frac{d\varepsilon Y}{dy}+\frac{d\varepsilon Z}{dz}=0, \qquad u=v=w=0.$$

Nos équations se simplifient alors beaucoup ; elles se simplifieront davantage encore, si je suppose que le mouvement se propage par ondes planes dont le plan est perpendiculaire à l'axe des z, c'est-à-dire que toutes nos quantités sont fonctions seulement de z et de t ; si je suppose en même temps que la vitesse de la matière est constante et parallèle à l'axe des z, d'où :

$$\alpha=\beta=0, \qquad \gamma=\text{const.}$$

Nos équations deviennent alors :

$$(1) \qquad A\left(\frac{dL}{dt}+\gamma\frac{dL}{dz}\right)=-\frac{dY}{dz},$$

$$(2) \qquad A\varepsilon\left(\frac{dX}{dt}+\gamma\frac{dX}{dz}\right)=\frac{dM}{dz}.$$

Celles que je viens d'écrire sont les premières de chaque groupe, j'en déduis par symétrie la seconde équation du groupe (1 b) :

$$(3) \qquad A\varepsilon\left(\frac{dY}{dt}+\gamma\frac{dY}{dz}\right)=-\frac{dL}{dz}.$$

De (1) et (3) on déduira :

$$(4) \qquad A^2\varepsilon\left(\frac{d^2L}{dt^2}+2\gamma\frac{d^2L}{dt\,dz}+\gamma^2\frac{d^2L}{dz^2}\right)=\frac{d^2L}{dz^2},$$

de sorte que la vitesse V de propagation des ondes sera donnée par l'équation :

$$A^2\varepsilon(V+\gamma)^2=1,$$

d'où :

$$V = \pm \sqrt{\frac{1}{A^2 \varepsilon}} - \gamma.$$

Il résulterait de là que les ondes lumineuses devraient être entraînées *totalement* par un milieu diélectrique en mouvement. Cela est absolument contraire à l'expérience célèbre de M. Fizeau qui nous apprend que l'entraînement n'est que partiel; on devrait avoir :

$$V = \pm \sqrt{\frac{1}{A^2 \varepsilon}} - \gamma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Les équations de Hertz doivent donc être modifiées. Mais quelle modification faut-il y introduire ? On peut être un peu embarrassé pour répondre à cette question. Aucune théorie optique ne rend compte d'une façon satisfaisante des phénomènes complexes qui se rattachent à l'aberration astronomique et à l'entraînement partiel de l'éther. Une de ces théories pourtant explique le plus important d'entre eux et rend compte des faits, non exactement, mais au degré d'approximation dont nous nous contentons ici, c'est-à-dire en négligeant la dispersion. Cette théorie est celle de Fresnel; malgré les doutes qui subsistent, nous l'adopterons provisoirement.

Nous allons donc suivre la marche inverse de celle que nous avons adoptée jusqu'ici; nous allons écrire les équations de la théorie optique de Fresnel, et les traduisant ensuite dans le langage électrique, nous rechercherons si elles peuvent rendre compte des phénomènes de l'électrodynamique des corps en mouvement.

Encore la théorie de Fresnel peut-elle prendre diverses formes; nous adopterons, par exemple, les hypothèses sur lesquelles Helmholtz fonde sa théorie de la dispersion.

6. — Théories de Helmholtz.

Représentons-nous deux milieux qui se pénètrent, l'éther et la matière; soit ρ la densité de l'éther, ρ_1 celle de la matière; soient ξ, η, ζ, les composantes du déplacement de l'éther; ξ_1, η_1, ζ_1 celles du déplacement de la matière.

Une particule d'éther est soumise à deux forces; l'une due à l'action de l'éther environnant et qui est la même que si la matière n'existait pas : soit P,

Q. R cette force; l'autre due à l'action de la matière sur l'éther et dont les composantes seront :

$$B(\xi_1-\xi), \quad B(\eta_1-\eta), \quad B(\zeta_1-\zeta).$$

Une particule de matière est soumise également à deux forces : l'une est la réaction de l'éther sur la matière et a pour composantes :

$$B(\xi-\xi_1), \quad B(\eta-\eta_1), \quad B(\zeta-\zeta_1).$$

L'autre est une sorte de frottement dont Helmholtz n'explique pas très bien l'origine et qui a pour composantes :

$$-C\frac{d\xi_1}{dt}, \quad -C\frac{d\eta_1}{dt}, \quad -C\frac{d\zeta_1}{dt}.$$

B et C sont des constantes qui dépendent de la nature du corps. Les équations du mouvement deviennent alors :

$$\rho\frac{d^2\xi}{dt^2} = P + B(\xi_1-\xi),$$

$$\rho_1\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = B(\xi-\xi_1) - C\frac{d\xi_1}{dt}.$$

C'est à l'aide de ces équations que Helmholtz rend compte de la dispersion. Mais tel n'est pas notre but; nous voulons au contraire nous en tenir au premier degré d'approximation où l'on néglige la dispersion, et pour cela il faut supposer que B étant très grand, on a sensiblement $\xi=\xi_1$.

En ajoutant les deux équations précédentes et faisant $\xi=\xi_1$, il vient :

$$(5) \qquad (\rho+\rho_1)\frac{d^2\xi}{dt^2} = P - C\frac{d\xi}{dt}.$$

Il nous reste à voir ce qui arrive si l'on suppose l'éther immobile (sauf son mouvement de vibration bien entendu) et la matière en mouvement.

Nous désignerons par α, β, γ les composantes de la vitesse de la matière.

Nous représenterons par $\frac{\partial\xi_1}{\partial t}$ et par $\frac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2}$, la projection sur l'axe des x de la vitesse et de l'accélération d'une molécule matérielle, de sorte que

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{d\xi}{dt} + \alpha\frac{d\xi}{dx} + \beta\frac{d\xi}{dy} + \gamma\frac{d\xi}{dz},$$

et en négligeant les carrés et les dérivées de α, β, γ :

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\alpha\frac{d^2\xi}{dx\,dt} + 2\beta\frac{d^2\xi}{dy\,dt} + 2\gamma\frac{d^2\xi}{dz\,dt}.$$

L'équation (5) devient alors :

$$(5\ bis)\qquad \rho\frac{d^2\xi}{dt^2}+\rho_1\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\mathrm{P}-\mathrm{C}\frac{\partial\xi}{\partial t}.$$

Il est aisé de voir d'abord que cette formule (5 *bis*) rend compte de l'expérience de M. Fizeau. Imaginons, en effet, que le milieu soit un diélectrique parfait (d'où $C=0$) et que les ondes lumineuses soient planes, le plan de l'onde étant parallèle au plan des xy; alors ξ est fonction de z et de t seulement, et l'on a :

$$\mathrm{P}=\lambda\frac{d^2\xi}{dt^2},$$

λ étant un coefficient constant.

Supposons, de plus, que la vitesse de la matière soit constante et parallèle à l'axe des z, de sorte que

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{d^2\xi}{dt^2}+2\gamma\frac{d^2\xi}{dz\,dt}+\gamma^2\frac{d^2\xi}{dz^2}.$$

On a d'ailleurs :

$$\lambda=\rho\mathrm{V}^2,$$

V étant la vitesse de la lumière dans le vide, et l'équation (5 *bis*) devient :

$$\rho\frac{d^2\xi}{dt^2}+\rho_1\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}+2\gamma\frac{d^2\xi}{dz\,dt}+\gamma^2\frac{d^2\xi}{dz^2}\right)=\rho\mathrm{V}^2,$$

d'où si l'on appelle pour un instant U la vitesse de propagation de l'onde :

$$(\rho+\rho_1)\mathrm{U}^2+2\gamma\rho_1\mathrm{U}+\gamma^2\rho_1=\rho\mathrm{V}^2;$$

d'où, en négligeant le carré de γ :

$$\mathrm{U}=\mathrm{V}\sqrt{\frac{\rho}{\rho+\rho_1}}-\frac{\rho_1\gamma}{\rho+\rho_1}.$$

Il est clair que

$$\frac{\rho+\rho_1}{\rho}=\varepsilon,$$

il vient donc finalement :

$$\mathrm{U}=\mathrm{V}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}-\gamma\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

On voit donc que cette théorie rend bien compte de l'entraînement partiel des ondes constaté par M. Fizeau.

Mais elle cessera de paraître satisfaisante si l'on veut l'appliquer aux phénomènes électriques.

Reprenons les équations (5 *bis*) en supposant C = o, il vient :

$$\rho\frac{d^2\xi}{dt^2} + \rho_1\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = P,$$

et, de même,

$$\rho\frac{d^2\eta}{dt^2} + \rho_1\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = Q,$$

$$\rho\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \rho_1\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = R.$$

Comme on a :

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} = o,$$

si l'on pose :

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz},$$

il viendra :

(6) $$\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + \rho_1\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = o.$$

Les d ordinaires représentent toujours les dérivées prises par rapport à t en supposant le point x, y, z fixe et les d ronds, en supposant le point x, y, z entraîné par la matière.

Pour nous rendre compte de la signification de cette équation, reportons-nous à ce que nous avons dit plus haut de la théorie de Fresnel adaptée. Nous avons vu que, dans cette théorie, aux points où il y a de l'électricité positive, la densité de l'éther va constamment en augmentant.

Or, d'après une formule bien connue, θ représente la condensation de l'éther, c'est-à-dire l'excès de sa densité actuelle sur sa densité normale. Dans cette manière de voir, la densité de l'électricité libre serait donc proportionnelle à $\frac{d\theta}{dt}$.

Il pourrait y avoir doute dans le cas où les corps chargés d'électricité sont en mouvement. On peut se demander alors si la densité de l'électricité doit être représentée par $\frac{d\theta}{dt}$ ou par $\frac{\partial\theta}{\partial t}$; mais le résultat que j'ai en vue n'en sera pas changé.

Supposons que $\alpha = \beta = o$, $\gamma =$ const.; l'équation (6) devient :

(6 *bis*) $$(\rho + \rho_1)\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\rho_1\gamma\frac{d^2\theta}{dt\,dz} + \rho_1\gamma^2\frac{d^2\theta}{dz^2} = o.$$

D'ailleurs, $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ satisferont comme θ à l'équation (6 *bis*). Cette équation est contredite par l'expérience, l'électricité devrait être entraînée avec la même vitesse que la matière puisqu'elle reste attachée aux corps qui en sont chargés, et on devrait avoir

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\gamma\frac{d^2\theta}{dt\,dz} + \gamma^2\frac{d^2\theta}{dz^2} = 0. \tag{6 ter}$$

$\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ satisfaisant comme θ à l'équation (6 *ter*).

Cette nouvelle théorie n'est donc pas plus satisfaisante que la première.

Mais ce n'est pas là la forme à laquelle Helmholtz s'est arrêté; à la théorie de la dispersion que nous venons de discuter et qu'il avait développée avant le triomphe de la doctrine de Maxwell, il en a substitué une autre qu'il a exposée sur la fin de sa vie dans le tome 48 des *Annales de Wiedemann* (Elektromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung). A ce Mémoire de Helmholtz se rattache un travail de Reif (*Wied. Ann.*, t. 50, Fortpflanzung des Lichtes), qui examine les conséquences de la théorie de Helmholtz précisément au point de vue qui nous occupe, c'est-à-dire au point de vue de l'entraînement partiel des ondes par un milieu en mouvement. Helmholtz suppose que dans les diélectriques, la polarisation électrique se décompose en deux parties : la polarisation de l'éther dont nous désignerons les composantes par F, G, H, et la polarisation de la matière que nous désignerons par f, g, h, et que le savant allemand attribue à une sorte d'électrolyse incomplète.

Le courant de déplacement total a alors pour composantes :

$$\frac{dF}{dt} + \frac{df}{dt}, \quad \frac{dG}{dt} + \frac{dg}{dt}, \quad \frac{dH}{dt} + \frac{dh}{dt}.$$

L'énergie électrostatique localisée dans le volume $d\tau$ est, d'autre part, la somme de trois termes, un terme en $F^2 + G^2 + H^2$, un terme en $f^2 + g^2 + h^2$, et un terme en $Ff + Gg + Hh$.

En partant de ces hypothèses, Helmholtz rend compte des lois de la dispersion; mais Reif a voulu voir comment on pourrait expliquer dans le même ordre d'idées, l'expérience de Fizeau, répétée par Michelson et Morley. Il a reconnu qu'il faudrait supposer que la matière transporte avec elle l'électricité qui engendre la seconde composante f, g, h de la polarisation, tandis que l'éther est entraîné partiellement en transportant avec lui l'électricité qui engendre la première composante F, G, H.

M. Reif a alors songé à modifier l'hypothèse de Helmholtz en supprimant

dans l'énergie électrostatique le terme en $Ff + Gg + Hh$. Le résultat est alors beaucoup plus simple. L'entraînement de l'éther est alors nul.

Je transcris les équations de Helmholtz [*Sitzungsberichte*, de Berlin, t. LIII, 1892, p. 1098, éq. (12 *b*), (12 *c*), (12 *d*)]. Seulement j'ai désigné par F, G, H, *f*, *g*, *h*, ce que Helmholtz représente par les lettres gothiques X, Y, Z, *x*, *y*, *z*; de plus, je supposerai $\mu = \varepsilon = 1$; je représenterai enfin par les lettres romaines L, M, N les lettres gothiques correspondantes. Il vient ainsi :

$$A\frac{dL}{dt} = \frac{d(H-h)}{dy} - \frac{d(G-g)}{dz}, \tag{7}$$

$$A\frac{d}{dt}(F+f) = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \tag{8}$$

avec les équations qu'on en déduirait par symétrie.

Avec l'hypothèse de Reif, il faut dans l'équation (7) et celles qu'on en déduit par symétrie remplacer $F-f$, $G-g$, $H-h$, par F, G, H.

Malheureusement, il y a un obstacle dont Reif ne se tire pas mieux que Helmholtz.

Si le milieu est en mouvement, la composante *f*, *g*, *h* est entraînée par la matière et l'équation (8) devient :

$$A\frac{dF}{dt} + A\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}.$$

On déduit de là :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}\right) = 0.$$

L'expression

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = \sigma,$$

est proportionnelle à la densité de l'électricité.

D'autre part, Helmholtz trouve :

$$F = a^2 f + m\frac{d^2 f}{dt^2} + k\frac{df}{dt}.$$

a^2, m et k étant des coefficients constants. Si les mouvements sont très lents, les deux derniers termes disparaissent et il reste :

$$F = a^2 f,$$

d'où :

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = a^2\sigma,$$

d'où, enfin :

$$a^2 \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0.$$

Si $\alpha = \beta = 0$, c'est-à-dire si la vitesse de la matière est parallèle à l'axe des z, il vient :

$$(a^2 + 1)\frac{d\sigma}{dt} + \gamma \frac{d\sigma}{dz} = 0,$$

ce qui veut dire que les charges électriques ne sont pas entraînées avec la matière, comme l'exige le principe de la conservation de l'électricité, mais qu'elle est entraînée avec une vitesse plus petite égale à $\frac{\gamma}{a^2 + 1}$.

La théorie de Helmholtz conduisant sous ce rapport au même résultat que celle de Reif, l'une et l'autre me paraissent devoir être rejetées.

7. — Théorie de Lorentz.

M. Lorentz a imaginé une théorie électrodynamique des corps en mouvement fondée sur des principes entièrement différents et à certains égards plus satisfaisante.

L'hypothèse fondamentale est la suivante :

Un très grand nombre de petites particules portant des charges électriques qui leur sont invariablement liées, sont disséminées dans le volume des conducteurs et des diélectriques. Elles parcourent les conducteurs dans tous les sens avec des vitesses très grandes. Dans les diélectriques, au contraire, elles ne peuvent subir que de petits déplacements, et les actions des particules voisines tendent à les ramener à leurs positions d'équilibre dès qu'elles s'en écartent.

Cette théorie rend compte du principe de la conservation de l'électricité, puisque l'hypothèse fondamentale n'est autre chose, après tout, qu'une traduction de ce principe lui-même. Elle rendrait compte également de l'entraînement partiel des ondes.

Malheureusement il reste une difficulté grave : il n'y a plus égalité entre l'action et la réaction.

Pour nous en rendre compte, sans entrer dans le détail des calculs, il nous suffira d'un exemple simple. Considérons un petit conducteur A chargé positivement et entouré d'éther. Supposons que l'éther soit parcouru par une onde

électromagnétique et qu'à un certain moment cette onde atteigne A, la force électrique due à la perturbation agira sur la charge de A et produira une force pondéromotrice agissant sur le corps A. Cette force pondéromotrice ne sera contrebalancée au point de vue du principe de l'action et de la réaction par aucune autre force agissant sur la matière pondérable. Car tous les autres corps pondérables peuvent être supposés très éloignés et en dehors de la région de l'éther qui est troublée.

On s'en tirerait en disant qu'il y a réaction du corps A sur l'éther; il n'en est pas moins vrai qu'on pourrait, sinon réaliser, au moins concevoir une expérience où le principe de réaction semblerait en défaut, puisque l'expérimentateur ne peut opérer que sur les corps pondérables et ne saurait atteindre l'éther. Cette conclusion semblera difficile à admettre.

La théorie de Hertz ne donnait pas lieu à cette difficulté et était parfaitement d'accord avec le principe de réaction. Dans cette théorie et dans l'exemple simple qui nous occupait plus haut, il y aurait réaction du corps A non seulement sur l'éther, mais sur l'air où se trouve cet éther; et, quelque raréfié que soit cet air, il y aurait égalité parfaite entre l'action subie par A et la réaction de A sur cet air.

Cela tenait à ce que dans la théorie de Hertz l'éther était entraîné totalement par la matière; dans la théorie de Lorentz, au contraire, il n'en est pas de même, la réaction subie par l'air n'est qu'une très faible fraction de l'action subie par le corps A, et cette fraction est d'autant plus faible que l'air est plus raréfié.

En réfléchissant à ce point, on voit que la difficulté n'est pas particulière à la théorie de Lorentz et qu'on aura beaucoup de peine à expliquer l'entraînement partiel des ondes sans violer le principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Nous verrons plus loin si la conciliation est possible.

8. — Théorie de J.-J. Thomson.

Dans ses *Recent Researches*, J.-J. Thomson consacre un paragraphe à la propagation de la lumière dans un diélectrique en mouvement (§ 440, p. 543). Ce travail a été analysé en détail par M. Blondin dans la *Lumière Électrique* du 4 novembre 1893 (p. 201), et je n'y reviendrai pas.

Je me contenterai de rappeler les principaux résultats.

Soit V la vitesse de propagation de la lumière dans le diélectrique au repos; soit v la vitesse de la matière du diélectrique, ou plutôt la projection de cette vitesse sur la direction de la propagation des ondes; soit v_0 la vitesse de l'éther dans le diélectrique qui serait nulle s'il n'y avait pas d'entraînement, qui serait égale à v si l'entraînement était total et qui aurait des valeurs intermédiaires si l'entraînement était partiel.

La vitesse de la lumière dans le diélectrique en mouvement sera

$$V + v_1 + v_2,$$

v_1 et v_2 pouvant avoir diverses valeurs suivant les hypothèses.

Dans un conducteur en mouvement, il peut se produire deux sortes de forces électromotrices d'induction, la première provenant de la variation du champ magnétique, la seconde provenant du déplacement du conducteur dans le champ.

De même dans un diélectrique en mouvement, il doit se développer une force électromotrice d'induction due au déplacement de ce diélectrique; elle dépendra évidemment de la vitesse de ce diélectrique; mais est-ce de la vitesse de la matière du diélectrique ou de la vitesse de l'éther qui y est contenu ? on peut faire les deux hypothèses. Dans le premier cas, v_1 sera égal à $\frac{v}{2}$, dans le second à $\frac{v_0}{2}$.

D'autre part, si un diélectrique se déplace dans un champ électrique, s'il passe dans une région où l'intensité du champ est plus grande ou plus petite, sa polarisation variera; on peut se demander si cette variation de la polarisation produira un courant de déplacement susceptible d'agir sur l'aiguille aimantée. On peut faire à cet égard plusieurs hypothèses.

On peut supposer que quand la polarisation électrique en *un même point de l'espace* demeure constante, il n'y a pas de courant de déplacement, quand même le diélectrique en se déplaçant passerait dans une région où cette polarisation est différente.

En d'autres termes, les composantes du courant de déplacement seraient :

$$\frac{df}{dt}, \quad \frac{dg}{dt}, \quad \frac{dh}{dt},$$

f, g, h étant les composantes du déplacement électrique en un point donné *fixé dans l'espace*.

On peut supposer ensuite que ces composantes sont

$$\frac{df}{dt}, \quad \frac{dg}{dt}, \quad \frac{dh}{dt},$$

f, g, h, étant les composantes du déplacement en un point donné invariablement lié à la matière du diélectrique mobile.

On peut supposer enfin que les composantes du courant sont $\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}$, et que f, g, h sont les composantes du déplacement en un point donné invariablement lié à l'éther partiellement entraîné par le diélectrique mobile.

Dans le premier cas, v_2 est égal à o, dans le second à $\frac{v}{2}$, dans le troisième à $\frac{v_0}{2}$.

La discussion de J.-J. Thomson laisse donc place à un grand nombre d'hypothèses, mais aucune n'est satisfaisante; la seule qui soit d'accord avec l'expérience de Fizeau $\left(v_1 = v_2 = \frac{v_0}{2}\right)$ soulèverait les mêmes difficultés que les théories de Helmholtz-Reif et de Lorentz.

On voit donc combien il est difficile de rendre compte par une même théorie de tous les faits observés; les contradictions auxquelles toutes les hypothèses viennent se heurter paraissent tenir à une cause profonde. Dans tous les cas, un examen plus attentif est nécessaire, et j'en ferai l'objet d'un prochain article.

(*A suivre*).

A PROPOS

DE LA

THÉORIE DE M. LARMOR

L'Éclairage électrique, t. 5, p. 5-14 (5 octobre 1895).

9. — Discussion de la théorie de Hertz.

Nous avons vu dans un précédent article [1] quelles sont les conditions auxquelles il semble que devrait satisfaire toute théorie électrodynamique des corps en mouvement :

1° Elle devrait rendre compte des expériences de M. Fizeau, c'est-à-dire de l'entraînement *partiel* des ondes lumineuses, ou, ce qui revient au même, des ondes électromagnétiques transversales ;

2° Elle doit être conforme au principe de la conservation de l'électricité et du magnétisme ;

3° Elle devrait être compatible avec le principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

Nous avons vu qu'aucune des théories proposées jusqu'ici ne remplit simultanément ces trois conditions ; la théorie de Hertz satisfait aux deux dernières, mais pas à la première ; celles de Helmholtz ne satisfont pas à la seconde ; celle de Lorentz satisfait bien aux deux premières, mais pas à la dernière.

On peut se demander si cela tient à ce que ces théories sont incomplètes ou si ces trois conditions ne sont réellement pas compatibles, ou ne le deviendraient

[1] Voir *L'Éclairage électrique*, t. 3, 1895, p. 5 et 289 ; ce tome p. 369 et 383.

que par une modification profonde des hypothèses admises. Pour bien nous en rendre compte, il convient d'abord d'examiner plus en détail de quelle manière la théorie de Hertz permet de satisfaire aux deux dernières conditions.

Rappelons les notations de Hertz. Nous désignons par :

L, M, N, les composantes de la force magnétique;
X, Y, Z, celles de la force électrique;
α, β, γ, celles de la vitesse de la matière;
u, v, w, celles du courant de conduction;
μ, le pouvoir inducteur magnétique;
ε, le pouvoir inducteur diélectrique;
A, l'inverse de la vitesse de la lumière.

Pour abréger un peu l'écriture, j'emploierai encore d'autres notations. Je représenterai par ρ et σ la densité de l'électricité vraie et du magnétisme vrai, de sorte que :

$$\frac{d\varepsilon X}{dx} + \frac{d\varepsilon Y}{dy} + \frac{d\varepsilon Z}{dz} = 4\pi\rho,$$

$$\frac{d\mu L}{dx} + \frac{d\mu M}{dy} + \frac{d\mu N}{dz} = 4\pi\sigma.$$

Je poserai en outre :

$$\xi = \mu(\gamma M - \beta N), \qquad \eta = \mu(\alpha N - \gamma L), \qquad \zeta = \mu(\beta L - \alpha M),$$

$$l = \varepsilon(\gamma Y - \beta Z), \qquad m = \varepsilon(\alpha Z - \gamma X), \qquad n = \varepsilon(\beta X - \alpha Y).$$

Les équations de Hertz s'écrivent alors :

$$(1) \qquad A\left[\frac{d\mu L}{dt} + \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} + 4\pi\alpha\sigma\right] = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz},$$

$$(2) \qquad A\left[\frac{d\varepsilon X}{dt} + \frac{dn}{dy} - \frac{dm}{dz} + 4\pi\alpha\rho\right] = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u.$$

A chacune de ces deux équations, il convient de joindre les deux équations qu'on peut en déduire par permutation circulaire; on aura ainsi deux groupes de trois équations.

Pour voir si la théorie de Hertz conduit au principe de la conservation du magnétisme, prenons les équations du premier groupe, déduites de l'équation (1); différencions la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutons; les seconds membres disparaîtront ainsi que les termes dépendant de ξ, η, ζ et il viendra :

$$4\pi A\left[\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\alpha\sigma}{dx} + \frac{d\beta\sigma}{dy} + \frac{d\gamma\sigma}{dz}\right] = 0.$$

Cette équation exprime que le magnétisme vrai qui se trouve dans une portion quelconque de matière est entraîné avec cette matière.

On peut opérer de même sur les équations du second groupe; différentier la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajouter; il vient alors :

$$4\pi A\left[\frac{d\rho}{dt}+\frac{d\alpha\rho}{dx}+\frac{d\beta\rho}{dy}+\frac{d\gamma\rho}{dz}\right]=4\pi A\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right).$$

Cela signifie que l'électricité vraie est entraînée par la matière qui la porte, sauf celle qui est enlevée par les courants de conduction.

Il faut voir maintenant si la théorie de Hertz est compatible avec le principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Pour cela il faut voir qu'elles sont, d'après cette théorie, les forces pondéromotrices mises en jeu dans un champ électromagnétique.

Pour calculer ces forces, il faut appliquer le principe de la conservation de l'énergie.

Quand la matière est en mouvement, elle subit en général des condensations et des dilatations; sa densité varie et l'on doit supposer que les pouvoirs inducteurs μ et ε varient en même temps. Soit δ la densité de la matière, et posons :

$$\mu'=\delta\frac{d\mu}{d\delta},\qquad \varepsilon'=\delta\frac{d\varepsilon}{d\delta};$$

il viendra alors, en exprimant de deux manières différentes la variation de la valeur de μ relative à une même particule matérielle :

$$(3)\qquad \frac{d\mu}{dt}+\alpha\frac{d\mu}{dx}+\beta\frac{d\mu}{dy}+\gamma\frac{d\mu}{dz}=-\mu'\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right);$$

et, de même,

$$(4)\qquad \frac{d\varepsilon}{dt}+\sum\alpha\frac{d\varepsilon}{dx}=-\varepsilon'\sum\frac{d\alpha}{dx}.$$

Remarquons toutefois que la définition de μ' et de ε' n'est pas ainsi complète; l'état d'un corps dépend de sa pression et de sa température, souvent d'un plus grand nombre de variables; il semble donc que μ' et ε' n'auront pas la même valeur selon, par exemple, que le changement de densité sera ou non accompagné d'un changement de température.

Mais un changement d'état quelconque du corps aura pour conséquence une variation de l'énergie interne de ce corps et un dégagement de chaleur.

Si l'on admet que ce dégagement de chaleur ne dépende pas de l'intensité du champ électrique, ou du champ magnétique, nous allons voir que μ' et ε' ont une valeur indépendante des variations de température qui peuvent accompagner les changements de densité.

Et, en effet, le calcul nous donnera les valeurs des forces pondéromotrices en fonctions de μ' et ε', sans que nous soyons obligés de faire aucune hypothèse particulière sur la façon dont varie la température avec la densité. Les valeurs de μ' et de ε' ne doivent donc pas dépendre de ces hypothèses particulières.

Appliquons le principe de la conservation de l'énergie; nous admettrons la même valeur que Hertz pour l'énergie électromagnétique totale J et nous écrirons :

$$J = \int \frac{d\tau}{8\pi}\left[\mu \sum L^2 + \varepsilon \sum X^2\right].$$

Voici quelle est la signification de cette équation. Je représente par $d\tau$ un élément quelconque de volume et les intégrations portant sur cette différentielle seront toujours, sauf avis contraire, étendues à tous les éléments de volume $d\tau$ de l'espace tout entier.

Le signe $\sum$ représentera toujours une somme de trois termes; les deux derniers termes de cette somme se déduiront toujours du premier terme qui figure explicitement sous le signe $\sum$ en permutant circulairement les composantes des différents vecteurs dont ce terme dépend. Ainsi on posera :

$$\sum L^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

$$\sum \alpha \frac{d\mu}{dx} = \alpha \frac{d\mu}{dx} + \beta \frac{d\mu}{dy} + \gamma \frac{d\mu}{dz},$$

$$\sum \frac{dM}{dx} = \frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dy} + \frac{dL}{dz},$$

$$\sum \frac{d\mu L}{dx} = \frac{d\mu L}{dx} + \frac{d\mu M}{dy} + \frac{d\mu N}{dz}.$$

On aura donc :

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{d\tau}{8\pi}\left(\sum \frac{d\mu L^2}{dt} + \sum \frac{d\varepsilon X^2}{dt}\right).$$

Or nous pourrons écrire :

$$\frac{1}{2}\frac{d\mu L^2}{dt} = L\frac{d\mu L}{dt} - \frac{1}{2}L^2\frac{d\mu}{dt},$$

ou en tenant compte de l'équation (3) :

$$L\frac{d\mu L}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mu L^2) - \frac{L^2}{2}\left(\sum \alpha \frac{d\mu}{dx} + \mu'\sum \frac{d\alpha}{dx}\right)$$

et, de même :

$$X\frac{d\varepsilon X}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varepsilon X^2) - \frac{X^2}{2}\left(\sum \alpha \frac{d\varepsilon}{dx} + \varepsilon'\sum \frac{d\alpha}{dx}\right).$$

Les équations de Hertz prennent alors une forme nouvelle et s'écrivent :

$$(1\ bis) \qquad A\left[\frac{1}{2L}\frac{d}{dt}(\mu L^2) - \frac{L}{2}\left(\sum \alpha \frac{d\mu}{dx} + \mu'\sum \frac{d\alpha}{dx}\right) + \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} + 4\pi\alpha\sigma\right] = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz},$$

$$(2\ bis) \qquad A\left[\frac{1}{2X}\frac{d}{dt}(\varepsilon X^2) - \frac{X}{2}\left(\sum \alpha \frac{d\varepsilon}{dx} + \varepsilon'\sum \frac{d\alpha}{dx}\right) + \frac{dn}{dy} - \frac{dm}{dz} + 4\pi\alpha\rho\right] = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u.$$

Pour appliquer le principe de l'énergie prenons les équations de Hertz, multiplions les trois équations du premier groupe respectivement par :

$$\frac{L\,d\tau}{4\pi A},\quad \frac{M\,d\tau}{4\pi A},\quad \frac{N\,d\tau}{4\pi A},$$

les trois équations du deuxième groupe respectivement par :

$$\frac{X\,d\tau}{4\pi A},\quad \frac{Y\,d\tau}{4\pi A},\quad \frac{Z\,d\tau}{4\pi A},$$

ajoutons, et intégrons par rapport à $d\tau$ en étendant l'intégration à l'espace tout entier; il viendra :

$$(5) \qquad \frac{dJ}{dt} + \mathcal{L} + \mathcal{M} + \mathcal{N} + \mathcal{X} + \mathcal{Y} + \mathcal{Z} = H + K.$$

Voici la signification de toutes ces lettres : on a :

$$\mathcal{L} = \int \frac{L\,d\tau}{4\pi}\left[-\frac{L}{2}\left(\sum \alpha \frac{d\mu}{dx} + \mu'\sum \frac{d\alpha}{dx}\right) + \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} + 4\pi\alpha\sigma\right],$$

$$\mathcal{X} = \int \frac{X\,d\tau}{4\pi}\left[-\frac{X}{2}\left(\sum \alpha \frac{d\varepsilon}{dx} + \varepsilon'\sum \frac{d\alpha}{dx}\right) + \frac{dn}{dy} - \frac{dm}{dz} + 4\pi\alpha\rho\right],$$

$\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, se déduisent de $\mathcal{L}$; et $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{X}$ par permutation circulaire. Enfin, on a :

$$H = \frac{1}{4\pi A}\int d\tau \sum \left[L\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + X\left(\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}\right)\right],$$

$$K = -\int d\tau(uX + vY + wZ).$$

L'analyse bien connue de Poynting nous apprend que :

$$\mathrm{H} = 0.$$

D'autre part, K représente la chaleur de Joule. L'ensemble des termes

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{M} + \mathfrak{N} + \mathfrak{X} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}$$

que j'appelle $\mathfrak{T}$, représentera donc au signe près le travail des forces pondéromotrices.

Étudions donc ces termes et transformons d'abord $\mathfrak{L}$. Tous les termes de la quantité sous le signe $\int$ contiennent en facteur une des composantes de la vitesse α, β, γ, ou une de leurs dérivées $\frac{d\alpha}{dx}$; les quantités ξ, η, ζ sont, en effet, des fonctions linéaires de α, β, γ.

Transformons les termes qui dépendent des dérivées de α, β, γ, par le moyen de l'intégration par parties.

Soient, en effet, F et F_1, deux fonctions quelconques, de x, y, z; on aura

$$\int \mathrm{F} \frac{d\mathrm{F}_1}{dx} d\tau = -\int \mathrm{F}_1 \frac{d\mathrm{F}}{dx} d\tau$$

si le produit FF_1 s'annule à l'infini.

Comme la perturbation électromagnétique doit être nulle à l'infini, nous pouvons appliquer ce procédé de transformation et nous aurons, par exemple :

$$\int \mathrm{L}^2 \mu' \frac{d\alpha}{dx} d\tau = -\int \alpha \frac{d\mathrm{L}^2 \mu'}{dx} d\tau,$$

$$\int \mathrm{L} \frac{d\zeta}{dy} d\tau = -\int \zeta \frac{d\mathrm{L}}{dy} d\tau.$$

L'application de ce procédé nous donne :

$$\mathfrak{L} = \int \frac{d\tau}{4\pi} \left[-\frac{\mathrm{L}^2}{2} \sum \alpha \frac{d\mu}{dx} + \sum \frac{\alpha}{2} \frac{d\mu' \mathrm{L}^2}{dx} - \zeta \frac{d\mathrm{L}}{dy} + \eta \frac{d\mathrm{L}}{dz} + 4\pi\alpha\sigma \mathrm{L} \right].$$

Nous transformerons de même, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$ et nous trouverons finalement une expression de la forme :

$$\mathfrak{T} = \int d\tau (a\alpha + b\beta + c\gamma).$$

Il est clair que a, b, c, seront les composantes de la force pondéromotrice apportée à l'unité de volume.

Pour calculer a, il suffit de faire $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = 1$, d'où :

$$\xi = 0, \qquad \eta = \mu N, \qquad \zeta = -\mu M.$$

Il vient alors :

$$\mathcal{L} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\left(-\frac{L^2}{2}\frac{d\mu}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d\mu' L^2}{dx} + \mu M\frac{dL}{dy} + \mu N\frac{dL}{dz} + 4\pi\sigma L\right).$$

$$\mathfrak{M} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\left(-\frac{M^2}{2}\frac{d\mu}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d\mu' M^2}{dy} - \mu M\frac{dM}{dx}\right).$$

$$\mathfrak{N} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\left(-\frac{N^2}{2}\frac{d\mu}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d\mu' N^2}{dy} - \mu N\frac{dN}{dx}\right);$$

d'où

$$\Sigma\mathcal{L} = \mathcal{L} + \mathfrak{M} + \mathfrak{N} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\left[-\frac{\Sigma L^2}{2}\frac{d\mu}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Sigma\mu' L^2 + 4\pi\sigma L + \mu M\left(\frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}\right) + \mu N\left(\frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}\right)\right],$$

ce qui peut s'écrire, en se rappelant la signification de σ :

$$\Sigma\mathcal{L} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\left[-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Sigma\mu L^2 + \frac{d}{dx}(\mu L^2) + \frac{d}{dy}(\mu LM) + \frac{d}{dz}(\mu LN) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Sigma\mu' L^2\right].$$

On trouverait de même :

$$\Sigma\mathfrak{X} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\left[-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Sigma\varepsilon X^2 + \frac{d}{dx}(\varepsilon X^2) + \frac{d}{dy}(\varepsilon XY) + \frac{d}{dz}(\varepsilon XZ) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Sigma\varepsilon' X^2\right].$$

Il vient donc finalement

(5) $$4\pi a = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\Sigma\mu L^2 + \Sigma\varepsilon X^2) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\Sigma\mu' L^2 + \Sigma\varepsilon' X^2) + \frac{d}{dx}(\mu L^2 + \varepsilon X^2) + \frac{d}{dy}(\mu LM + \varepsilon XY) + \frac{d}{dz}(\mu LN + \varepsilon XZ).$$

On en déduirait par symétrie la valeur de b et de c et l'on connaîtra ainsi la force pondéromotrice. Il serait intéressant de discuter, par le menu, la signification physique de ces différents termes, nous y reviendrons plus loin, mais cela m'entraînerait trop loin de mon sujet.

Ce que nous avons à vérifier, c'est que le principe de l'égalité de l'action et de la réaction n'est pas violé. Analytiquement, il s'exprime par les six équations

des projections des forces et des moments qui s'écrivent

$$\int a\,d\tau = \int b\,d\tau = \int c\,d\tau = 0,$$

$$\int (bz - cy)\,d\tau = \int (cx - az)\,d\tau = \int (ay - bx)\,d\tau = 0.$$

Pour vérifier la première,

$$\int a\,d\tau = 0,$$

il nous suffira de remarquer que a, d'après l'équation (5), est une somme de dérivées partielles. Et, en effet, une intégrale de la forme $\int \frac{d\varphi}{dx}\,d\tau$ est évidemment nulle quand l'intégration est étendue à tout l'espace et que φ s'annule à l'infini.

Vérifions de même les équations des moments, par exemple

$$(6) \qquad \int (bz - cy)\,d\tau = 0\ .$$

Comme b et c sont, comme a, des sommes de dérivées partielles, le premier membre sera une somme de termes de l'une des quatre formes :

$$\int z\frac{d\varphi}{dx}\,d\tau, \quad \int z\frac{d\varphi}{dy}\,d\tau, \quad \int y\frac{d\varphi}{dx}\,d\tau, \quad \int y\frac{d\varphi}{dz}\,d\tau,$$

ou de l'une des deux formes

$$\int y\frac{d\varphi}{dy}\,d\tau, \quad \int z\frac{d\varphi}{dz}\,d\tau.$$

Les termes des quatre premières formes sont nuls, car on a par exemple :

$$\int z\frac{d\varphi}{dx}\,d\tau = \int \frac{d(\varphi z)}{dx}\,d\tau = 0.$$

En ne conservant, par conséquent, que les termes des deux dernières formes, l'équation (6) s'écrit :

$$\int \frac{d\tau}{4\pi}\left[z\frac{d}{dz}(\mu MN + \varepsilon YZ) - y\frac{d}{dy}(\mu MN + \varepsilon YZ)\right] = 0$$

et elle est évidemment satisfaite, car la quantité sous le signe $\int$ n'est autre chose que le déterminant fonctionnel de yz et $\mu MN + \varepsilon YZ$ par rapport à y et à z.

10. — Discussion des autres théories.

Ainsi la théorie de Hertz satisfait aux deux dernières conditions; il nous reste à voir qu'elle est la seule qui y satisfasse.

Quelles que soient les hypothèses qui nous serviront de point de départ, nous arriverons toujours à deux groupes de trois équations aux dérivées partielles analogues à celles de Hertz et auxquelles devront satisfaire les deux vecteurs L, M, N, et X, Y, Z.

Remarquons que les équations de Hertz satisfont aux trois conditions suivantes :

1° Elles sont linéaires et homogènes par rapport à L, M, N, X, Y, Z et à leurs dérivées ;

2° Elles sont linéaires, mais non homogènes par rapport à α, β, γ et à leurs dérivées ;

3° Elles ne contiennent que des dérivées du premier ordre tant par rapport à t que par rapport à x, y et z.

Je dis qu'on peut toujours supposer que les équations que l'on doit substituer à celles de Hertz satisfont à ces mêmes conditions.

1° On peut supposer qu'elles sont linéaires par rapport aux composantes de la force électrique et de la force magnétique ; si, en effet, elles ne l'étaient pas et si les perturbations électromagnétiques étaient très petites, les termes d'ordre supérieur disparaîtraient devant les termes du premier ordre ; si donc ces équations étaient compatibles avec les principes de l'action et de la réaction et de la conservation de l'électricité et du magnétisme, elles ne cesseraient pas de l'être quand on les réduiraient à leurs termes du premier ordre par rapport à L, M, N, X, Y, Z.

2° On peut supposer qu'elles sont linéaires par rapport aux composantes de la vitesse α, β, γ; si, en effet, on suppose que ces composantes sont très petites, les termes du second degré et de degré supérieur en α, β, γ seront négligeables ; si donc ces équations étaient compatibles avec les principes, elles ne cesseraient pas de l'être quand on les réduirait à leurs termes d'ordre zéro et d'ordre 1 par rapport à α, β, γ.

3° On peut supposer qu'elles ne contiennent que des dérivées du premier

ordre; si, en effet, on suppose que la perturbation varie très lentement, c'est-à-dire qu'elle est « à très grande longueur d'onde », les dérivées d'ordre supérieur seront négligeables; si donc les équations étaient compatibles avec les principes, elles ne cesseraient pas de l'être quand on les réduirait à ceux de leurs termes qui dépendent des dérivées du premier ordre.

Supposons donc remplies les trois conditions énoncées plus haut.

Pour former les équations nouvelles, nous reprendrons les équations de Hertz et nous ajouterons respectivement aux premiers membres des trois équations du premier groupe les termes complémentaires :

$$AR_1, \quad AR_2, \quad AR_3.$$

Nous ajouterons de même respectivement aux premiers membres des trois équations du second groupe les termes complémentaires

$$AS_1, \quad AS_2, \quad AS_3.$$

Nous avons obtenu le principe de la conservation du magnétisme en opérant sur les équations du premier groupe; les différentiant respectivement par rapport à x, y et z et ajoutant. En opérant de cette manière, on retrouvera l'équation de la conservation du magnétisme, mais avec le terme complémentaire :

$$A\left(\frac{dR_1}{dx}+\frac{dR_2}{dy}+\frac{dR_3}{dz}\right).$$

Le principe de la conservation du magnétisme exige donc que

$$\frac{dR_1}{dx}+\frac{dR_2}{dy}+\frac{dR_3}{dz}=0.$$

De même, le principe de la conservation de l'électricité exige que

$$\frac{dS_1}{dx}+\frac{dS_2}{dy}+\frac{dS_3}{dz}=0.$$

Ces équations montrent que l'on peut poser :

$$R_1=\frac{d\zeta_1}{dy}-\frac{d\eta_1}{dz}, \qquad R_2=\frac{d\xi_1}{dz}-\frac{d\zeta_1}{dx}, \qquad R_3=\frac{d\eta_1}{dx}-\frac{d\xi_1}{dy};$$

$$S_1=\frac{dn_1}{dy}-\frac{dm_1}{dz}, \qquad S_2=\frac{dl_1}{dz}-\frac{dn_1}{dx}, \qquad S_3=\frac{dm_1}{dx}-\frac{dl_1}{dy}.$$

Si nous voulons, comme nous l'avons supposé plus haut, que les équations ne

contiennent que des dérivées du premier ordre, il faut que les nouvelles fonctions auxiliaires ξ_1, η_1, ζ_1, l_1, m_1, n_1, dépendent seulement de L, M, N, X, Y, Z, α, β, γ et non pas de leurs dérivées.

Ces fonctions seront d'ailleurs linéaires et homogènes par rapport à L, M, N, X, Y, Z, puisque les équations doivent être linéaires et homogènes par rapport à ces composantes et à leurs dérivées.

Elles seront, d'autre part, linéaires et homogènes par rapport à α, β, γ; en effet, les équations ne doivent contenir que des termes d'ordre 0 et d'ordre 1 par rapport à ces composantes et à leurs dérivées; il est évident d'ailleurs que ξ_1, η_1, ζ_1, l_1, m_1, n_1 qui doivent disparaître dans les équations relatives à l'électrodynamique des corps en repos, ne contiennent pas de termes de degré 0 en α, β, γ.

Il nous reste à voir si ces équations peuvent être compatibles avec le principe de la réaction. Pour cela, opérons sur les équations de Hertz elles-mêmes. Le résultat que nous obtiendrons ainsi sera d'une forme analogue à l'équation (5) et s'écrira :

$$\frac{dJ}{dt} - \mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1 = K. \tag{5 bis}$$

$\mathfrak{E}$ est la somme, $\Sigma\mathfrak{L} + \Sigma\mathfrak{X}$ qui figure déjà dans l'équation (5), K est la chaleur de Joule; l'intégrale H qui figure dans l'équation (5) est nulle; enfin $\mathfrak{E}_1$ est un terme complémentaire provenant des termes complémentaires R_1, R_2, ..., S_3.

On aura donc :

$$\mathfrak{E}_1 = \int \frac{d\tau}{4\pi}\left[\sum L\left(\frac{d\zeta_1}{dy} - \frac{d\eta_1}{dz}\right) - \sum X\left(\frac{dn_1}{dy} - \frac{dm_1}{dz}\right)\right].$$

Le signe $\sum$ représente toujours une somme de trois termes et on déduit les deux derniers du premier en permutant circulairement x, y, z; L, M, N; X, Y, Z; ξ_1, η_1, ζ_1; l_1, m_1, n_1.

L'intégration par parties nous donne :

$$\mathfrak{E}_1 = \int \frac{d\tau}{4\pi}\sum\left(\eta_1\frac{dL}{dz} - \zeta_1\frac{dL}{dy} + m_1\frac{dX}{dz} - n_1\frac{dX}{dy}\right).$$

Soient a, b, c, les composantes de la force pondéromotrice dans la théorie de Hertz; soient $a + a_1$, $b + b_1$, $c + c_1$ les composantes de cette même force dans la théorie transformée.

Le terme $\mathfrak{E}_1$ représentera alors le travail de la force pondéromotrice complémentaire (a_1, b_1, c_1).

Comme la force de la théorie de Hertz (a, b, c), satisfait au principe de la réaction, il faut que la force complémentaire (a_1, b_1, c_1) y satisfasse également et, par conséquent, que l'on ait :

$$\int a_1\, d\tau = \int b_1\, d\tau = \int c_1\, d\tau = 0.$$

Ces conditions peuvent encore s'énoncer autrement : *il faut que* $\mathfrak{T}_1$ *soit nul quand on donne à* α, β, γ *des valeurs constantes.*

Si donc nous donnons à α, β, γ des valeurs constantes quelconques, et que nous remplacions L, M, N, X, Y, Z par des fonctions *quelconques* de x, y, z s'annulant à l'infini, l'intégrale $\mathfrak{T}_1$ devra s'annuler.

Mais $\mathfrak{T}_1$ peut encore s'écrire sous la forme d'une somme de trois termes en posant :

$$\mathfrak{T}_1 = U + V + W$$

et

$$U = \int \frac{d\tau}{4\pi}\left(\zeta_1 \frac{dM}{dx} - \eta_1 \frac{dN}{dx} + n_1 \frac{dY}{dx} - m_1 \frac{dZ}{dx}\right),$$

$$V = \int \frac{d\tau}{4\pi}\left(\xi_1 \frac{dN}{dy} - \zeta_1 \frac{dL}{dy} + l_1 \frac{dZ}{dy} - n_1 \frac{dX}{dy}\right),$$

$$W = \int \frac{d\tau}{4\pi}\left(\eta_1 \frac{dL}{dz} - \xi_1 \frac{dM}{dz} + m_1 \frac{dX}{dz} - l_1 \frac{dY}{dz}\right).$$

Je dis que les trois termes U, V, W doivent s'annuler tous les trois.

En effet, remplaçons les six composantes L, M, ..., Z par six fonctions quelconques de x, y, z; la somme $U + V + W$ devra s'annuler.

Remplaçons maintenant ces mêmes composantes par les six *mêmes* fonctions de $\lambda_1 x$, $\lambda_2 y$, $\lambda_3 z$ (λ_1, λ_2, λ_3 étant trois coefficients constants arbitraires) U se changera en $\frac{U}{\lambda_2\lambda_3}$, V en $\frac{V}{\lambda_1\lambda_3}$, W en $\frac{W}{\lambda_1\lambda_2}$. Et comme $\mathfrak{T}_1$ reste toujours nul, on devra avoir :

$$\frac{U}{\lambda_2\lambda_3} + \frac{V}{\lambda_1\lambda_3} + \frac{W}{\lambda_1\lambda_2} = 0,$$

et cela quels que soient les coefficients λ; on doit donc avoir séparément :

$$U = V = W = 0.$$

Dans U, la fonction sous le signe $\int$ est linéaire, d'une part par rapport à L, M, ..., Z, d'autre part par rapport aux dérivées de ces six composantes prises par rapport à x.

Considérons une intégrale de la forme :

$$\int d\tau \left(A\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx} + B\varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx} + C\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dx} + D\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dx} \right).$$

Quelle est la condition pour que cette intégrale s'annule, quelles que soient les fonctions φ_1 et φ_2 qui seront seulement assujetties à s'annuler à l'infini ?

Je dis que la condition nécessaire et suffisante, c'est que la quantité sous le signe $\int$ soit une dérivée exacte. En effet, d'après ce que nous avons dit plus haut, la condition est évidemment suffisante et l'on a en particulier :

$$\int \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx} d\tau = \int \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dx} d\tau = \int \left(\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dx} + \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx} \right) d\tau = 0.$$

L'intégrale proposée se réduit donc à :

$$(B - C) \int \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx} d\tau.$$

Comme φ_2 est une fonction *arbitraire* de x, y, z, le produit $\varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx}$ sera aussi une fonction absolument arbitraire de ces variables et l'intégrale ne pourra s'annuler que si

$$B = C,$$

c'est-à-dire si

$$A\varphi_1\, d\varphi_1 + B\varphi_2\, d\varphi_1 + C\varphi_1\, d\varphi_2 + D\varphi_2\, d\varphi_2$$

est une différentielle exacte.

La condition est donc aussi nécessaire.

Considérons maintenant une intégrale où la fonction sous le signe $\int$ sera linéaire d'une part par rapport à n fonctions arbitraires :

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \dots, \quad \varphi_n;$$

d'autre part par rapport à leurs dérivées :

$$\frac{d\varphi_1}{dx}, \quad \frac{d\varphi_2}{dx}, \quad \dots, \quad \frac{d\varphi_n}{dx}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette intégrale s'annule toujours, sera encore que la quantité sous le signe $\int$ soit une dérivée exacte.

La condition est évidemment suffisante. Je dis qu'elle est également nécessaire.

En effet, les fonctions φ étant arbitraires, l'intégrale devra être nulle, en particulier, quand toutes ces fonctions seront identiquement nulles, sauf deux; si donc nous égalons à zéro toutes les fonctions φ, sauf deux, la quantité sous le signe $\int$ doit être une dérivée exacte; les termes $\varphi_i \frac{d\varphi_k}{dx}$ et $\varphi_k \frac{d\varphi_i}{dx}$ doivent donc avoir même coefficient; ce qui veut dire que les conditions d'intégrabilité doivent donc être remplies.

Appliquons cette règle au cas qui nous occupe. Nous verrons que

$$\zeta_1\, dM - \eta_1\, dN + n_1\, dY - m_1\, dZ,$$

et, de même :

$$\xi_1\, dN - \zeta_1\, dL + l_1\, dZ - n_1\, dX,$$
$$\eta_1\, dL - \xi_1\, dM + m_1\, dX - l_1\, dY,$$

doivent être des différentielles exactes.

La première de ces expressions, où ne figurent ni dL ni dX doit être la différentielle d'une fonction indépendante de L et de X.

Donc ζ_1, η_1, n_1 et m_1 ne dépendent ni de L, ni de X; et de même ξ_1, ζ_1, l_1, n_1, ne dépendent ni de M, ni de Y; η_1, ξ_1, m_1 et l_1 ne dépendent ni de N, ni de Z.

Il résulte de là que ξ_1 et l_1 peuvent dépendre seulement de L et de X; η_1 et m_1 seulement de M et de Y; et ζ_1, et n_1, seulement de N et de Z.

Les conditions d'intégrabilité nous donnent ensuite :

$$\frac{d\zeta_1}{dN} = -\frac{d\eta_1}{dM}, \qquad \frac{d\xi_1}{dL} = -\frac{d\zeta_1}{dN}, \qquad \frac{d\eta_1}{dM} = -\frac{d\xi_1}{dL};$$

d'où :

$$\frac{d\xi_1}{dL} = \frac{d\eta_1}{dM} = \frac{d\zeta_1}{dN} = 0.$$

On trouverait de même

$$\frac{dl_1}{dX} = \frac{dm_1}{dY} = \frac{dn_1}{dZ} = 0.$$

Ainsi ξ_1, η_1, ζ_1, l_1, m_1, n_1 ne pourront dépendre respectivement que de X, Y, Z, L, M, N.

Les conditions d'intégrabilité nous donnent enfin

$$\frac{d\xi_1}{dX} = \frac{d\eta_1}{dY} = \frac{d\zeta_1}{dZ} = -\frac{dl_1}{dL} = -\frac{dm_1}{dM} = -\frac{dn_1}{dN},$$

c'est-à-dire que ξ_1, η_1, ζ_1, l_1, m_1, n_1 devront se réduire à un *même* facteur constant près à X, Y, Z, $-$L, $-$M et $-$N.

Ce facteur constant devra d'ailleurs être une fonction linéaire et homogène de α, β, γ.

Mais si nous faisons intervenir une condition nouvelle, celle de l'*isotropie*, nous verrons que ce facteur constant doit être nul; car si ce facteur s'écrivait, par exemple :

$$\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \lambda_3 \gamma,$$

la direction dont les cosinus directeurs sont proportionnels à λ_1, λ_2, λ_3, jouerait un rôle prépondérant.

Il résulte de là que les termes complémentaires ξ_1, η_1, ζ_1, l_1, m_1, n_1, doivent être nuls.

Ainsi *la théorie de Hertz est la seule qui soit compatible avec le principe de la conservation de l'électricité et du magnétisme et avec celui de l'égalité de l'action et de la réaction.*

11. — Conclusions provisoires.

Il résulte de tout ce qui précède qu'aucune théorie ne peut satisfaire à la fois aux trois conditions énoncées au début du paragraphe 9; car la théorie de Hertz est la seule qui satisfasse aux deux dernières et elle ne satisfait pas à la première.

Nous ne pourrions, par conséquent, espérer d'échapper à cette difficulté qu'en modifiant profondément les idées généralement admises; on ne voit pas bien d'ailleurs dans quel sens cette modification devrait se faire.

Il faut donc renoncer à développer une théorie parfaitement satisfaisante et s'en tenir provisoirement à la moins défectueuse de toutes qui paraît être celle de Lorentz. Cela me suffira pour mon objet qui est d'approfondir la discussion des idées de Larmor.

Sous quelles formes pourrons-nous mettre cette théorie de Lorentz ?

Ces formes sont diverses et l'on doit choisir l'une ou l'autre selon le but qu'on se propose.

Dans cette théorie on envisage une multitude de particules chargées mobiles qui circulent à travers un éther immobile en conservant une charge invariable.

L'éther est d'ailleurs parcouru par des perturbations électromagnétiques.

Nous pouvons alors conserver les équations de Hertz, mais en donnant aux

quantités qui y entrent des valeurs très différentes, selon que le point x, y, z se trouvera dans une particule chargée, ou dans l'éther.

Dans l'éther, on aura :

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,$$

puisque l'éther n'est pas supposé entraîné par le mouvement de la matière.

On aura, d'autre part :

$$\varepsilon = \mu = 1, \qquad \rho = \sigma = 0, \qquad u = v = w = 0.$$

Dans une particule chargée, on aura :

$$\rho = \text{const.}, \qquad \sigma = 0, \qquad u = v = w = 0, \qquad \mu = 1,$$

puisque la charge demeure constante et que ces particules ne sont pas le siège de courants de conduction proprement dits.

Dans cette manière de voir il n'y a nulle part de magnétisme proprement dit et le magnétisme apparent est dû seulement aux courants particulaires d'Ampère.

Sous cette forme, les phénomènes électromagnétiques sont vus pour ainsi dire au microscope et les apparences ayant disparu, on ne voit plus que la réalité ou plutôt ce que Lorentz regarde comme tel. On est ainsi en possession d'un instrument qui peut être utile pour la discussion que nous avons en vue.

Mais les équations sous cette forme se prêtent mal aux applications où les apparences, c'est-à-dire en somme les phénomènes moyens, importent seuls.

En se plaçant à ce point de vue, on peut écrire les équations de la façon suivante; on conservera les équations de Hertz, seulement dans les équations (1) et (2) on affectera les termes :

$$\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}, \quad \frac{dn}{dy} - \frac{dm}{dz},$$

de coefficients constants qui dépendront de la nature du milieu, qui seront égaux à 0 pour l'éther, à 1 pour les conducteurs parfaits et auront des valeurs intermédiaires pour les diélectriques autres que l'éther.

Dans l'expression de la force pondéromotrice, les termes qui dépendent de ξ, η, ζ, ou bien de l, m, n, devront être affectés du même coefficient et c'est pour cette raison que le principe de réaction cesse d'être satisfait.

Pour nous en rendre compte, il nous faut rechercher quelle est la significa-

tion physique des divers termes de la force pondéromotrice; je supposerai pour simplifier :

$$\mu' = \varepsilon' = 0.$$

Nous avons exposé plus haut comment on peut trouver les composantes de la force pondéromotrice. La première composante s'obtient en faisant $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = 1$ dans l'expression

$$\Sigma\mathcal{L} + \Sigma\mathfrak{X}.$$

Or nous avons vu que $\Sigma\mathcal{L}$ s'écrit alors :

$$\Sigma\mathcal{L} = \int \frac{d\tau}{4\pi}\left(-\frac{\Sigma L^2}{2}\frac{d\mu}{dx}\right) + \int d\tau\,\sigma L + \int \frac{\mu\,d\tau}{4\pi}\left[M\left(\frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}\right) + N\left(\frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}\right)\right].$$

Le second terme représente l'action de la force magnétique sur les aimants permanents; le premier devrait représenter l'action de la force magnétique sur les corps magnétisés par induction; l'expression n'est pas tout à fait celle qui est généralement adoptée et cela pourrait donner lieu à une discussion curieuse dans laquelle je n'entrerai pas.

Reste le troisième terme; les binomes

$$\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \quad \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \quad \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}$$

représentent, à un facteur constant près, les composantes du courant total, courant de conduction plus courant de déplacement.

Le troisième terme représente donc l'action de la force magnétique sur le courant total.

Dans la théorie de Lorentz, et dans les autres théories analogues, ce terme doit être affecté d'un coefficient plus petit que 1; de sorte qu'un champ magnétique exercera sur un diélectrique traversé par un courant de déplacement une action moindre que sur un conducteur traversé par un courant de conduction de même intensité.

Elle serait presque nulle si ce diélectrique est l'air; et d'autant plus faible que ε serait plus voisin de 1.

On trouverait de même :

$$\Sigma\mathfrak{X} = -\int \frac{d\tau}{4\pi}\,\Sigma X^2\frac{d\varepsilon}{dx} + \int d\tau\,\rho X + \int \frac{\varepsilon\,d\tau}{4\pi}\left[Y\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) + Z\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right)\right].$$

Le second terme représente l'action du champ électrique sur les conducteurs chargés; le premier l'action de ce champ sur les diélectriques.

Quant au troisième, il représente une force que l'expérience n'a pu encore déceler et qui consisterait dans une action d'un champ électrique sur un corps qui serait le siège d'un champ magnétique variable. Dans la théorie de Lorentz, ce troisième terme disparaîtrait ou serait affecté d'un coefficient plus petit que 1.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que cette théorie, si elle peut nous rendre certains services pour notre objet, en fixant un peu nos idées, ne peut nous satisfaire pleinement, ni être regardée comme définitive.

Il me paraît bien difficile d'admettre que le principe de réaction soit violé, même en apparence, et qu'il ne soit plus vrai si l'on envisage seulement les actions subies par la matière pondérable et si on laisse de côté la réaction de cette matière sur l'éther.

Il faudra donc un jour ou l'autre modifier nos idées en quelque point important et briser le cadre où nous cherchons à faire rentrer à la fois les phénomènes optiques et les phénomènes électriques.

Mais même en se bornant aux phénomènes optiques proprement dits, ce qu'on a dit jusqu'ici pour expliquer l'entraînement partiel des ondes n'est pas très satisfaisant.

L'expérience a révélé une foule de faits qui peuvent se résumer dans la formule suivante : il est impossible de rendre manifeste le mouvement absolu de la matière, ou mieux le mouvement relatif de la matière pondérable par rapport à l'éther; tout ce qu'on peut mettre en évidence, c'est le mouvement de la matière pondérable par rapport à la matière pondérable.

Les théories proposées rendent bien compte de cette loi, mais à une double condition :

1° Il faut négliger la dispersion et divers autres phénomènes secondaires du même genre;

2° Il faut négliger le carré de l'aberration.

Or, cela ne suffit pas; la loi semble être vraie même sans ces restrictions ainsi que l'a prouvé une récente expérience de M. Michelson.

Il y a donc là aussi une lacune qui n'est peut être pas sans quelque parenté avec celle que le présent article a pour but de signaler.

Et, en effet, l'impossibilité de mettre en évidence un mouvement relatif de la matière par rapport à l'éther; et l'égalité qui a sans doute lieu entre l'action et la réaction sans tenir compte de l'action de la matière sur l'éther, sont deux faits dont la connexité semble évidente.

Peut-être les deux lacunes seront-elles comblées en même temps.

(*A suivre.*)

A PROPOS

DE LA

THÉORIE DE M. LARMOR [1]

L'Éclairage électrique, t. 5, p. 385-392 (28 novembre 1895).

12. — Imitations hydrodynamiques.

J'ai parlé précédemment des sphères pulsantes de Bjerknes et de l'imitation par ces sphères des phénomènes électrostatiques. J'ai fait ressortir l'analogie des mouvements qui se produisent dans l'eau au voisinage des sphères pulsantes et de ceux qui se produiraient dans l'éther au voisinage d'un corps électrisé dans la théorie de Fresnel adaptée.

Malheureusement, ainsi que je l'ai dit plus haut, l'analogie n'est pas complète; les mouvements des sphères pulsantes et ceux qu'elles excitent dans le liquide sont alternatifs et périodiques. Avec la théorie de Fresnel adaptée, au contraire, les mouvements qui règnent dans l'éther doivent être continus.

Bjerknes a été amené à adopter des mouvements périodiques par suite de nécessités mécaniques; mais il en résulte, comme je l'ai dit plus haut, que son imitation est imparfaite; deux sphères pulsantes dont la phase est la même sont assimilables à deux conducteurs portant de l'électricité de même nom; deux sphères dont la phase diffère de π sont assimilables à deux conducteurs portant de l'électricité de nom contraire; mais *deux sphères dont la différence de phase n'est ni o, ni π ne sont assimilables à rien.*

---

[1] Voir *L'Éclairage électrique*, t. 3, 1895, p. 5 et 289; t. 5, 1895, p. 5; ce tome, p. 369, 383, 395.

L'imitation serait bien plus parfaite si le mouvement des sphères était continu au lieu d'être alternatif; si le rayon de chaque sphère variait toujours dans le même sens avec une vitesse uniforme. Seulement il faudrait que le rayon des sphères fût assez grand, la vitesse de pulsation assez lente, la durée de l'expérience assez courte pour que pendant cette durée, les variations du rayon fussent négligeables. Ces conditions sont difficilement réalisables si l'on veut que les actions mutuelles des sphères soient sensibles. Si elles l'étaient cependant, on se rapprocherait des conditions de la théorie de Fresnel adaptée, et l'on s'affranchirait de la difficulté relative à la phase que je viens de signaler.

Une difficulté capitale subsisterait encore pourtant; les effets hydrodynamiques sont bien l'image des effets électrostatiques, mais ils en sont une *image renversée*.

Deux sphères de même phase s'attirent tandis que deux corps portant de l'électricité de même nom se repoussent. Il y a *inversion*.

Les phénomènes électrodynamiques, de même que les phénomènes électrostatiques, sont susceptibles d'une imitation hydrodynamique. Lord Kelvin dans ses *Popular Lectures* parle d'un projet de modèle hydrokinétique dont je voudrais rappeler succinctement le principe.

Imaginons que dans un liquide indéfini soient plongés deux corps solides C et C′, dont la forme sera annulaire; chacun de ces corps sera formé d'un fil de faible section qui sera recourbé de façon que ses deux extrémités se rejoignent; on obtient ainsi une sorte d'anneau fermé.

Soient u, v, w les composantes de la vitesse d'une molécule liquide et envisageons l'intégrale

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

prise le long d'un contour fermé quelconque. Nous distinguerons trois sortes de contours fermés auxquels tous les autres peuvent se ramener.

Ceux de la première sorte seront ceux qui ne s'entrelacent pas avec les corps annulaires C et C′; on peut les réduire à un point par déformation continue et sans qu'ils cessent d'être tout entiers dans le liquide, sans qu'à aucun moment ils touchent C ou C′.

Ceux de la seconde sorte s'entrelacent une fois avec C. Tel serait, par exemple, le périmètre de la section du fil qui forme le corps C.

Ceux de la troisième sorte s'entrelacent une fois avec C′.

Il est clair qu'un contour quelconque peut être regardé comme la combinaison de divers contours appartenant à l'une de ces trois sortes.

Je suppose qu'à l'origine du temps on ait :

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = 0$$

pour un contour de la première sorte,

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = 4\pi i$$

pour un contour de la seconde sorte,

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = 4\pi i'$$

pour un contour de la troisième sorte.

En vertu du théorème de Helmholtz sur les tourbillons, ces équations vraies à l'origine des temps, ne cesseront jamais de l'être. Les lettres i et i' désignent donc des constantes.

Mais si l'on se rappelle les lois suivant lesquelles un champ magnétique est engendré par un courant, on apercevra immédiatement la conséquence suivante.

La vitesse u, v, w du liquide représente en grandeur, direction et sens, la force magnétique engendrée par deux courants; l'un d'intensité i suivant le fil C, l'autre d'intensité i' suivant le fil C'.

Ainsi dans le modèle de lord Kelvin, la vitesse du liquide est dirigée suivant la force magnétique, tandis que dans le modèle de Bjerknes, elle est dirigée suivant la force électrique. En d'autres termes, dans le modèle de lord Kelvin, la vitesse du liquide est la même que celle de l'éther dans la théorie de Larmor; dans le modèle de Bjerknes, elle est la même que celle de l'éther dans la théorie de Fresnel adaptée.

Lord Kelvin a montré que les deux corps C et C' ainsi plongés dans un liquide en mouvement, exercent l'un sur l'autre des actions mécaniques apparentes et que *ces actions sont les mêmes*, AU SENS PRÈS, *que celles qui s'exerceraient entre les deux courants que je viens de définir*, et qui suivent l'un le fil C avec l'intensité i, l'autre le fil C' avec l'intensité i'.

Les actions mécaniques d'origine hydrodynamique suivent absolument les mêmes lois que les actions d'origine électrodynamique : seulement il y a *inver-*

sion; si les premières sont des répulsions, les secondes seront des attractions, et inversement.

Il est manifeste que l'explication des actions électrostatiques dans la théorie de Fresnel adaptée doit se rattacher aux expériences de Bjerknes; et que, d'autre part, l'explication des actions mutuelles des courants dans la théorie de Larmor doit se rattacher au modèle de lord Kelvin. Mais la difficulté provient de l'inversion. Il nous faut avant tout pénétrer les raisons de cette inversion.

13. — Causes de l'inversion.

Pour cela, il nous faut remonter aux principes généraux de la Mécanique. Considérons un système dont la situation soit définie par un certain nombre de paramètres

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_n$$

que j'appellerai ses *coordonnées*.

Soient $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ les dérivées de ces quantités par rapport au temps; c'est ce que j'appellerai les *vitesses*.

Soit T l'énergie cinétique du système, U son énergie potentielle due aux forces intérieures. Soit enfin

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n$$

le travail virtuel des forces extérieures au système pour des variations virtuelles δq_i des coordonnées q_i.

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_i} - \frac{dT}{dq_i} + \frac{dU}{dq_i} = Q_i. \tag{1}$$

A l'exemple de Helmholtz dans sa théorie des systèmes monocycliques, nous distinguerons deux sortes de coordonnées :

Les coordonnées à variation lente que je désignerai par q_a;

Les coordonnées à variation rapide que je désignerai par q_b et qui se distinguent des premières par deux conditions :

T et U ne dépendent pas des q_b, mais seulement de leurs dérivées;

Les vitesses q'_b sont beaucoup plus grandes que les vitesses q'_a.

Ainsi U dépend des q_a seulement ; T dépend des q_a, des q'_a et des q'_b, il est homogène et du second degré par rapport aux q'_a et aux q'_b.

Les équations de Lagrange se réduisent alors, en ce qui concerne les q_b, à

(2) $$\frac{d}{dt}\frac{d\mathrm{T}}{dq'_b} = \mathrm{Q}_b.$$

Nous poserons :

$$\frac{d\mathrm{T}}{dq'_i} = p_i$$

et les quantités p_i s'appelleront les *moments* du système.

Il y a ainsi trois sortes de quantités à considérer en Mécanique : les coordonnées, les vitesses et les moments.

L'équation (2) devient

$$\frac{dp_b}{dt} = \mathrm{Q}_b.$$

Je supposerai que Q_b est nul, ce qui donne :

(3) $$p_b = \text{const}.$$

Si donc il n'y a pas de force extérieure tendant à faire varier la vitesse des coordonnées q_b à variation rapide, les moments correspondants sont des constantes.

Je suppose maintenant que les forces extérieures Q_a soient choisies de façon à maintenir constants les q_a. Les q'_a sont alors nuls et les équations (3) dont les premiers membres dépendent des q'_b, des q_a qui sont constants et des q'_a qui sont nuls, ces équations, dis-je, dont le nombre est égal à celui des q'_b, montrent que les q'_b sont des constantes.

Le système se trouve ainsi dans une sorte de mouvement stationnaire, c'est-à-dire d'équilibre apparent et les Q_a nous font connaître les forces extérieures qu'il faut lui appliquer pour maintenir cet équilibre apparent.

Comme $\frac{d\mathrm{T}}{dq'_a}$ ne dépend que des q_a, des q'_a et des q'_b qui sont nulles ou constantes, cette quantité est également une constante de sorte que

$$\frac{d}{dt}\frac{d\mathrm{T}}{dq'_a} = 0.$$

Si, de plus, on suppose qu'il n'y a pas de forces intérieures au système, c'est-à-dire que U = 0, l'équation de Lagrange relative à q_a se réduit à

(4) $$\frac{d\mathrm{T}}{dq_a} = \mathrm{Q}_a.$$

Les q'_a étant nuls, T ne dépend plus que des q_a et des q'_b, elle est homogène et du second ordre par rapport aux q'_b de sorte qu'on a

$$2T = \sum \frac{dT}{dq'} q' = \sum p_b q'_b.$$

Les p_b étant des constantes, il paraîtra naturel de faire un changement de variables et d'exprimer T en fonctions des q_a et des p_b; mais, pour éviter toute confusion, nous écrirons avec des d ordinaires les dérivées

$$\frac{dT}{dq_a}, \quad \frac{dT}{dq'_b},$$

prises par rapport aux variables anciennes et avec des ∂ ronds les dérivées

$$\frac{\partial T}{\partial q_a}, \quad \frac{\partial T}{\partial p_b},$$

prises par rapport aux variables nouvelles. On aura alors

$$(5) \quad \begin{cases} dT = \sum \frac{dT}{dq_a} dq_a + \sum \frac{dT}{dq'_b} dq'_b \\ \quad = \sum \frac{dT}{dq_a} dq_a + \sum p_b\, dq'_b, \\ dT = \sum \frac{\partial T}{\partial q_a} dq_a + \sum \frac{\partial T}{\partial p_b} dp_b, \\ 2\, dT = \sum p_b\, dq'_b + \sum q'_b\, dp_b. \end{cases}$$

La comparaison de la première et de la dernière des équations (5) donne

$$dT = \sum q'_b\, dp_b - \sum \frac{dT}{dq_a} dq_a.$$

La comparaison de l'équation ainsi obtenue avec la seconde équation (5) donne

$$q'_b = \frac{\partial T}{\partial p_b}, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_a} = -\frac{dT}{dq_a},$$

de sorte que l'équation (4) devient

$$(6) \qquad \frac{\partial T}{\partial q_a} = Q_a.$$

Ces équations sont vraies quand on suppose les q_a et les q'_b constants; mais elles le sont encore approximativement si l'on suppose que les q_a varient d'une façon excessivement lente. Alors les q'_b varieront d'une façon excessivement

lente, mais ils varieront; tandis que les p_b seront rigoureusement constants si les Q_b sont nuls.

Supposons maintenant que les Q_b ne soient pas nuls, mais qu'ils aient des valeurs telles que les q'_b demeurent rigoureusement constants, tandis que les p_b et les q_a varieront d'une façon excessivement lente.

Il convient alors de prendre pour variables, non plus les p_b et les q_a, mais les q'_b et les q_a et de revenir à l'équation

$$(4) \qquad -\frac{dT}{dq_a} = Q_a.$$

Dans cet état de mouvement stationnaire ou quasi-stationnaire, dans cet état d'équilibre apparent, le système semble soumis à certaines forces apparentes, égales et contraires aux forces extérieures qu'on est obligé d'appliquer pour maintenir l'équilibre.

Quand on donne aux q_a des accroissements virtuels δq_a, le travail virtuel de ces forces extérieures sera

$$\sum Q_a \, \delta q_a.$$

C'est la définition même des Q_a. Le travail virtuel des forces apparentes qui leur font équilibre sera donc

$$-\sum Q_a \, \delta q_a.$$

Si les *moments* p_b sont maintenus constants, l'équation (6) nous donne pour ce travail virtuel

$$-\sum \frac{\partial T}{\partial q_a} \delta q_a = -\,\delta T.$$

Cela signifie que ces forces apparentes tendent à diminuer l'énergie T du système (et d'ailleurs, on ne saurait supposer le contraire sans admettre le mouvement perpétuel).

Si, au contraire, ce sont les *vitesses* q'_b qui sont maintenues constantes, l'équation (4) nous donne pour ce travail virtuel

$$\sum \frac{dT}{dq_a} \delta q_a = \delta T.$$

Cela signifie que ces forces apparentes tendent à augmenter l'énergie T du système : cela n'est pas contraire au principe de la conservation de l'énergie et,

en effet, pour maintenir les q'_b constants, il faut que les Q_b ne soient pas nuls, il faut donc faire intervenir une force extérieure, ce qui peut entraîner une dépense de travail.

Avant d'appliquer ces principes à l'électricité, il sera peut-être utile de les éclaircir par un exemple mécanique simple. Je choisirai le régulateur à force centrifuge.

Nous aurons un paramètre à variation lente q_a qui sera l'écartement des deux boules et un paramètre à variation rapide dont la dérivée q'_b sera la vitesse de rotation du régulateur.

L'énergie cinétique T sera (A étant un facteur constant)

$$T = \frac{1}{2} A q_a^2 q_b'^2, \tag{7}$$

et le moment sera

$$p_b = A q_a^2 q'_b;$$

ce sera le moment de rotation. On a donc

$$T = \frac{p_b^2}{2 A q_a^2}. \tag{8}$$

La force apparente est ici la force centrifuge qui tend à écarter les deux boules, elle est égale à

$$-Q_a = \frac{dT}{dq_a} = -\frac{\partial T}{\partial q_a}.$$

Elle tend à augmenter q_a. Si donc, il n'y a aucun couple extérieur tendant à maintenir constante la vitesse de rotation, le moment de rotation est constant et la force centrifuge tend à *diminuer* T, parce que dans l'équation (8) (où l'on suppose p_b constant) q_a est au dénominateur.

Si, au contraire, il y a un couple extérieur qui maintient constante la vitesse de rotation, la force centrifuge tend à *augmenter* T, parce que dans l'équation (7) (où l'on suppose q'_b constant) q_a est au numérateur. Seulement quand les boules s'écartent, il faut dépenser du travail qui est emprunté au couple extérieur.

14. — Application à l'électrostatique.

Dans la théorie de Larmor, on regarde l'énergie électrostatique comme de l'énergie potentielle; dans un champ électrique constant, on a donc

$$T = 0$$

ou, si l'on désigne par E l'énergie totale $T + U$,

$$E = U.$$

Si ce champ est engendré par deux petites sphères électrisées, cette énergie U dépend des charges des deux sphères *qui sont des constantes* et de leur distance qui sera notre paramètre à variation lente et que j'appellerai q_a.

Ces deux sphères exerceront l'une sur l'autre une attraction ou une répulsion qu'il faudra contrebalancer par une force extérieure si l'on veut maintenir l'équilibre. Cette force extérieure, je la désigne par Q_a conformément aux notations adoptées; si Q_a est positif, les deux sphères s'attirent et la force extérieure qui doit contrebalancer cette attraction doit tendre à écarter les deux sphères l'une de l'autre.

Comme T est nul, l'équation de Lagrange se réduit à

$$\frac{dU}{dq_a} = Q_a$$

ou

$$(9) \qquad \frac{dE}{dq_a} = Q_a.$$

Passons à l'imitation hydrodynamique de Bjerknes que je modifierai un peu afin d'éviter la difficulté provenant des différences de phases.

La distance des deux boules q_a sera notre paramètre à variation lente.

Leurs rayons q_b et q_c seront nos paramètres à variation rapide. Je supposerai que les vitesses q'_b et q'_c sont *constantes*, mais assez faibles pour que pendant la durée de l'expérience q_b et q_c n'éprouvent pas de variation sensible.

Si donc je regarde q_b et q_c comme des paramètres « à variation rapide », ce n'est pas que leurs dérivées q'_b et q'_c sont très grandes d'une manière absolue (elles sont, au contraire très petites), c'est parce qu'elles sont beaucoup plus grandes que q'_a.

Comme dans l'imitation de Bjerknes, ce sont ces deux vitesses q'_b et q'_c qui correspondent aux charges des sphères, elles doivent être maintenues constantes.

L'équation (4) nous donne alors :

$$-\frac{dT}{dq_a} = Q_a$$

et comme

$$U = 0, \qquad T = E,$$

on peut écrire :

$$(10) \qquad \frac{dE}{dq_a} = Q_a.$$

La comparaison des équations (9) et (10) montre qu'il y a inversion.

Observons, de plus, que si la vibration des sphères n'était pas entretenue par une force extérieure, les vitesses q'_b et q'_c ne resteraient pas constantes quand la distance q_a varierait. Pour maintenir ces vitesses constantes (ou en supposant des pulsations périodiques, comme dans l'expérience réalisée par Bjerknes, pour maintenir constante l'amplitude des vibrations), il faut une intervention extérieure, tandis qu'aucune intervention n'est nécessaire pour maintenir les charges de deux sphères électrisées quand elles s'éloignent ou se rapprochent. C'est encore là une différence entre le phénomène électrique et son imitation hydrodynamique, différence qui d'ailleurs, comme nous allons le voir, est intimement liée à l'inversion.

Supposons maintenant qu'on ait réalisé une autre imitation dynamique où intervient un système dépendant de trois paramètres q_a, q_b, q_c, le premier à variation lente, les deux autres à variation rapide. Le premier serait la distance des deux corps qui rempliraient le rôle de deux sphères électriques.

Mais je suppose que les charges de ces deux sphères, au lieu d'être représentées par les *vitesses* q'_b et q'_c soient représentées par les moments correspondants p_b et p_c.

Je suppose, en outre, que la force vive $T = E$ du système soit égale à l'énergie électrostatique des deux sphères.

Il arrivera d'abord que, *sans aucune intervention extérieure*, ces moments demeureront constants, ainsi que font les charges électriques qu'ils représentent.

De plus, comme ces moments sont constants, l'équation (6) nous donnera :

$$\frac{dT}{dq_a} = Q_a$$

ou

$$\frac{dE}{dq_a} = Q_a.$$

Il n'y a donc plus inversion.

J'ai dit plus haut que, parmi les quantités qu'on est amené à envisager en Mécanique, il faut distinguer les coordonnées, les vitesses et les moments, et l'on peut résumer la discussion qui précède en disant que *l'inversion dans*

l'expérience de Bjerknes provient de ce qu'on a représenté les charges électriques par des vitesses, tandis qu'il fallait les représenter par des moments.

15. — Application à l'électrodynamique.

Appliquons les mêmes principes à l'appareil de lord Kelvin, et pour cela rappelons d'abord quelles doivent être les bases de toute théorie dynamique du champ électrodynamique. Nous n'avons qu'à nous reporter à un chapitre célèbre du grand *Traité d'Électricité* de Maxwell, 4e partie, chapitre VI, article 568.

Il convient de supposer que l'énergie électromagnétique du champ représente la force vive T de l'éther; l'état du système est défini par un certain nombre de paramètres à variation lente q_a qui définissent la position relative des deux circuits, et par deux paramètres à variation rapide q_b et q_c.

L'hypothèse admise par Maxwell, c'est que les intensités des deux courants ne sont autre chose que les dérivées q'_b et q'_c de ces paramètres. *Ce sont donc des vitesses.*

Nous exprimerons donc T en fonction des intensités et des q'_a, c'est-à-dire de q'_b, de q'_c et des q_a; l'équation (4) nous donnera alors

$$(4) \qquad -\frac{dT}{dq_a} = Q_a.$$

D'autre part, q'_b et q'_c étant des vitesses et non des moments, ne se conserveront pas constantes s'il n'y a pas d'intervention extérieure. Les intensités des courants ne peuvent donc demeurer constantes si une cause extérieure ne les maintient pas; et c'est en effet ce qui arrive; cette cause extérieure nécessaire pour entretenir l'intensité du courant, c'est l'énergie fournie par la pile.

Je précise davantage ma pensée; quand même la position relative des deux circuits ne varierait pas, les courants ne pourraient se maintenir qu'en empruntant de l'énergie à la pile. Cette énergie, destinée à surmonter la résistance des circuits se retrouve sous forme de chaleur de Joule.

Mais ce n'est pas seulement cela que je veux dire. Si les circuits étaient des conducteurs parfaits, l'intensité des courants pourrait se maintenir constante sans rien emprunter à la pile, pourvu que la position de ces circuits ne varie pas.

Si, au contraire, la position des circuits varie (bien que nous les supposions absolument dépourvus de résistance), l'intensité ne pourra demeurer constante sans l'intervention de la pile.

En effet, l'équation de Lagrange nous donne :

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_b} = Q_b,$$

et ici

$$Q_b = E_b - R_b i_b,$$

E_b étant la force électromotrice de la pile du premier circuit, $i_b = q'_b$ l'intensité correspondante, R_b la résistance du circuit.

Si le circuit est un conducteur parfait et si la pile n'intervient pas, on aura

$$E_b = R_b = 0,$$

d'où

$$Q_b = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{dT}{dq'_b} = p_b = \text{const}.$$

De même, p_c sera une constante. Les moments p_b et p_c dépendent de q'_b, q'_c et des q_a ; si ces moments sont constants et si les q_a varient, il faut donc bien que les q'_b et les q'_c varient également.

Dans le cas de la nature, les circuits ont une résistance finie, et il faut toujours emprunter de l'énergie à la pile ; seulement si les circuits ne se meuvent pas, l'énergie empruntée à la pile est égale à la chaleur de Joule ; s'ils se déplacent, elle est plus grande ou plus petite parce que la force électromotrice d'induction vient s'ajouter à celle de la pile.

Passons maintenant à l'appareil de lord Kelvin.

Les intensités sont représentées par des intégrales de la forme

$$\frac{1}{4\pi}\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz).$$

En vertu du théorème de Helmholtz, ces intégrales demeurent constantes sans l'intervention d'aucune force extérieure.

Cela nous avertit déjà que les intégrales qui représentent les intensités sont des moments et non pas des vitesses.

Avec nos notations, il convient donc de les désigner par p_b et p_c de sorte que si l'énergie T est exprimée en fonction des intensités et des q_a, T sera une fonction de p_b, p_c et des q_a.

L'équation (6) nous donne alors

$$(6) \qquad \frac{\partial T}{\partial q_a} = Q_a.$$

Ce résultat est d'ailleurs une simple conséquence du principe de la conservation de l'énergie. Soit, en effet, δq_a l'accroissement virtuel de q_a, le travail virtuel des forces extérieures sera

$$\sum Q_a \, \delta q_a.$$

On devra donc avoir

$$\sum Q_a \, \delta q_a = \delta T = \sum \frac{\partial T}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial T}{\partial p_b} \delta p_b + \frac{\partial T}{\partial p_c} \delta p_c.$$

Mais, comme les intégrales p_b et p_c sont constantes en vertu du théorème de Helmholtz, δp_b et δp_c sont nuls et il reste

$$\sum Q_a \, \delta q_a = \sum \frac{\partial T}{\partial q_a} \delta q_a,$$

ou en identifiant

$$Q_a = \frac{\partial T}{\partial q_a}.$$

La comparaison des équations (4) et (6) montre qu'il y a inversion.

D'où la conclusion suivante :

S'il y a inversion dans l'appareil de lord Kelvin, c'est parce qu'on a représenté les intensités par des moments, tandis qu'il fallait les représenter par des vitesses.

Dans l'expérience de Bjerknes et dans celle de lord Kelvin, la cause de l'inversion est analogue, mais pour ainsi dire inverse.

LA THÉORIE DE LORENTZ

ET

LES EXPÉRIENCES DE ZEEMAN

L'Éclairage électrique, t. 11, p. 481-489 (5 juin 1897).

Pour bien faire comprendre l'explication donnée par Zeeman de ses curieuses expériences, je dois d'abord rappeler en quelques mots les principes fondamentaux de la théorie de Lorentz.

Voici quelles sont les hypothèses faites par Lorentz : les charges électriques sont portées par des molécules matérielles dont elles sont inséparables; la charge de chacune de ces molécules est constante et la distribution en est invariable. Tous les changements qui surviennent dans un champ électrique sont dus aux déplacements de ces molécules qui transportent avec elles leurs charges.

Un conducteur électrisé positivement, c'est un conducteur à l'intérieur duquel se trouvent plus de molécules chargées positivement que de molécules chargées négativement.

Les courants électriques sont dus au mouvement des particules chargées qui se déplacent à travers la masse du conducteur; c'est un véritable courant de matière électrisée; et un corps est d'autant meilleur conducteur qu'il oppose moins de résistance au mouvement de ces particules.

En d'autres termes, les courants qui traversent un conducteur métallique se propageront par le même mécanisme que ceux qui traversent un électrolyte; les molécules ou particules à charge invariable se comporteront tout à fait de la même manière que les ions, et nous leur donnerons désormais le nom d'ions.

Qu'est-ce maintenant qu'un diélectrique? La masse des diélectriques est parsemée d'ions comme celle des conducteurs. Mais chacun de ces ions, au lieu de pouvoir se déplacer librement à l'intérieur du diélectrique, ne peut s'écarter que très peu de sa position d'équilibre. Dès qu'il s'en éloigne, une force antagoniste due à l'action des ions voisins tend à l'y ramener; cette force est proportionnelle à l'écart, si cet écart est petit.

Quand le diélectrique est placé dans un champ électrique, la force électrique extérieure tend à éloigner l'ion de sa position d'équilibre et il s'en écarte légèrement jusqu'à ce que cette force extérieure soit contrebalancée par l'attraction des ions voisins qui tend à ramener l'ion dans sa position d'équilibre primitive.

En d'autres termes le diélectrique se polarise.

Une analyse qui ne diffère pas essentiellement de celle à laquelle conduit l'hypothèse de Poisson et de Mossotti montre que la « polarisation du diélectrique » est proportionnelle à l'intensité du champ extérieur. On retombe donc sur les formules bien connues de la théorie des diélectriques.

On remarquera qu'il n'y a plus, dans ce système, de courants de conduction; il n'y a plus que deux sortes de courants, les courants de convection et les courants de déplacement. Les courants de conduction ordinaires, sont de simples courants de convection. Dans le vide, les courants de déplacement de la nouvelle théorie sont identiques à ceux de Maxwell; mais il n'en est plus de même dans les diélectriques autres que le vide : le courant de déplacement de Maxwell se trouve décomposé en deux composantes : la première composante est un courant de déplacement, elle est égale à ce que serait le courant de Maxwell si le pouvoir diélectrique était égal à un; la seconde composante est un courant de convection dû aux déplacements très petits des ions dans l'intérieur du diélectrique.

On supposera généralement que dans les courants qui traversent les conducteurs métalliques, on a un double courant, l'un d'ions positifs se déplaçant dans un sens, l'autre d'ions négatifs se déplaçant en sens contraire.

Comment M. Lorentz a-t-il réduit ces hypothèses en équations. Pour les équations du champ électromagnétique, il a adopté tout simplement les équations de Maxwell; en dehors des particules chargées, ses équations sont identiques à celles de Maxwell *dans le vide*; à l'intérieur des particules chargées, ce sont les mêmes équations avec le terme complémentaire qui représente le courant de convection dû au mouvement des ions.

Soient α, β, γ, les composantes de la force magnétique, f, g, h celles du

déplacement électrique, $d\tau$ un élément de volume d'un ion, ξ, η, ζ les composantes de sa vitesse, $\rho\,d\tau$ la charge électrique de l'élément $d\tau$; enfin V la vitesse de la lumière.

Les équations s'écriront :

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi\left(\rho\xi + \frac{df}{dt}\right), \tag{1}$$

$$4\pi V^2\left(\frac{dg}{dz} - \frac{dh}{dy}\right) = \frac{d\alpha}{dt}, \tag{2}$$

avec les équations qu'on peut en déduire par permutation circulaire des axes.

En dehors des ions, ρ est nul : on n'a plus dans le second membre de (1) que le courant de déplacement $\frac{df}{dt}$, et l'on retombe sur les équations de Maxwell dans le vide; à l'intérieur d'un ion, il faut dans le second membre de (1) ajouter au courant de déplacement le courant de convection $\rho\xi$.

Les particules étant des solides invariables et emportant leurs charges avec elles, on aura :

$$\frac{d\rho\xi}{dx} + \frac{d\rho\eta}{dy} + \frac{d\rho\zeta}{dz} + \frac{d\rho}{dt} = 0;$$

de sorte qu'on pourra déduire des équations (1)

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = \rho.$$

Il faut, pour achever de mettre le problème en équations, chercher la force qui agit sur un ion.

Dans le champ électromagnétique, règnent deux forces :

1° Une force électrique dont les composantes sont :

$$4\pi V^2 f, \quad 4\pi V^2 g, \quad 4\pi V^2 h;$$

2° Une force magnétique dont les composantes sont :

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma.$$

L'élément $d\tau$ de l'ion porte une charge électrique $\rho\,d\tau$; de plus, cette charge est en mouvement, d'où résulte un courant de convection dont les composantes sont :

$$\rho\xi\,d\tau, \quad \rho\eta\,d\tau, \quad \rho\zeta\,d\tau.$$

La force électrique agit électrostatiquement sur cette charge, et en même

temps la force magnétique agit électrodynamiquement sur ce courant de convection; de sorte que la force mécanique totale qui agit sur l'élément $d\tau$ aura pour projection sur l'axe des x :

$$4\pi V^2 \rho f\, d\tau + \rho\, d\tau(\eta\gamma - \zeta\beta).$$

Des équations ainsi obtenues M. Lorentz déduit aisément les lois élémentaires de l'électrostatique et de l'électrodynamique, ainsi que celles de l'optique.

Une chose remarquable, c'est la facilité avec laquelle il rend compte des phénomènes qui se rattachent à l'aberration astronomique et à l'entraînement de l'éther par la matière en mouvement.

J'ai déjà eu l'occasion de traiter ce sujet dans un article antérieur à propos de la théorie de Larmor (¹).

J'ai montré que de toutes les théories proposées jusqu'ici la théorie de Lorentz est celle qui rend le mieux compte des faits; mais que son inconvénient, c'est qu'elle n'est pas d'accord avec le principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Je n'ai pas à revenir ici sur tous ces points.

Je veux, en effet, me borner à ce qui concerne les expériences de Zeeman et pour cela je dois insister sur le mécanisme de l'émission de la lumière d'après les idées de Lorentz.

Une particule chargée en mouvement excite autour d'elle un champ électromagnétique et ce champ que Lorentz commence par étudier se compose en réalité de deux parties : un champ électrostatique constant qui existe déjà quand la particule est au repos et qui est dû aux actions électrostatiques de la particule; ce champ constant ne jouera d'ailleurs aucun rôle.

La seconde partie est le champ électromagnétique variable qui est produit par le mouvement de la particule. Ce champ variable, ce n'est pas Lorentz qui l'a étudié le premier; reportons-nous, en effet, au Mémoire de Hertz intitulé « Die Kräfte elektrischer Schwingungen behandelt nach der Maxwellschen Theorie (²) ». Dans ce Mémoire, Hertz calcule par un procédé très ingénieux le champ produit par son excitateur; mais, pour plus de simplicité, il fait le calcul comme si la longueur de cet excitateur était infiniment petite, comme si par conséquent le phénomène oscillatoire dont cet excitateur est le siège se

(¹) *L'Éclairage électrique*, t. 5, 1896, p. 5 et 385; ce tome, p. 369, 383, 395 et 416.

(²) *Wiedemann's Annalen*, t. XXXVI, 1888, p. 1-22. *Œuvres complètes de Hertz*, p. 147. *La Lumière électrique*, t. 31, 1889, p. 589.

réduisait au transport d'une certaine masse d'électricité d'une extrémité à l'autre de l'excitateur, c'est-à-dire (puisque ces extrémités sont supposées infiniment rapprochées) à des oscillations de très petite amplitude.

Hertz arrive ainsi à des formules très simples.

Eh bien, le problème traité par Lorentz est tout à fait le même. Si l'on considère un élément $d\tau$ d'un ion, et que cet élément exécute des oscillations infiniment petites, le champ qu'il produira sera tout à fait identique à celui que produit l'excitateur infiniment petit traité dans le Mémoire de Hertz que je viens de citer.

Il suffit de comparer entre eux les champs dus aux différents éléments $d\tau$ dont se compose l'ion.

Quelle sera maintenant la force qui agira sur cet ion ?

Il sera d'abord soumis à la force électrique et à la force magnétique dues au champ qu'il excite par son propre mouvement.

Je dis d'abord que je peux négliger l'effet de la force magnétique; car cette force est proportionnelle à l'amplitude des oscillations de l'ion, laquelle amplitude est très petite; d'autre part, le courant de convection est également proportionnel à cette amplitude. L'effet mécanique de la force magnétique est proportionnel lui-même au produit de cette force par le courant de convection sur lequel elle agit, c'est-à-dire proportionnel au carré de l'amplitude. Elle est donc négligeable. Reste la force électrique.

Je ne puis reproduire ici tous les détails du calul de Lorentz; mais il est aisé d'en comprendre la marche générale. Soit un élément $d\tau$ de l'ion. Le mouvement de cet élément produira en un point x, y, z du champ une certaine force électrique. La force électrique totale due à la composition de ces forces électriques partielles aura ses composantes proportionnelles à f, g, h.

Des équations (1) et (2) nous déduisons :

$$V^2\Delta f - \frac{d^2 f}{dt^2} = V^2\frac{d\rho}{dx} + \frac{d\rho\xi}{dt}.$$

L'interprétation de cette équation est bien connue.

Le déplacement électrique total f sera la somme des déplacements électriques partiels dus au mouvement des différents éléments $d\tau$ de l'ion.

L'un de ces déplacements partiels sera $\frac{A\,d\tau}{r}$, où r représente la distance du point x, y, z à l'élément $d\tau$ et où A est la valeur de :

$$-\frac{1}{4\pi}\left(V^2\frac{d\rho}{dx} + \frac{d\rho\xi}{dt}\right),$$

non pas à l'instant t, mais à l'instant $t - t_0$, t_0 étant le temps que met la lumière pour aller de $d\tau$ au point x, y, z.

Le déplacement total sera donc

$$f = \int \frac{A\, d\tau}{r}.$$

On voit que la force électrique au point x, y, z dépend non pas de l'état de l'élément $d\tau$ à l'instant t, mais de l'état de l'élément $d\tau$ à l'instant $t - t_0$. On rapprochera cette analyse de celle que j'ai donnée dans mon ouvrage, *Les Oscillations électriques*, p. 71.

Mais, ce que nous cherchons, c'est l'effet mécanique de la force électrique sur la particule; nous devons donc supposer le point x, y, z à l'intérieur de l'ion, de même que l'élément $d\tau$; comme la particule est très petite, la distance de ces deux points et, par conséquent, le temps t_0 sera très petit, de sorte que nous pourrons écrire :

$$A = -\frac{1}{4\pi}\left(V^2 \frac{d\rho}{dx} + \frac{d(\rho\xi)}{dt}\right) - \frac{t_0}{4\pi}\left(V^2 \frac{d^2\rho}{dt\, dx} + \frac{d^2(\rho\xi)}{dt^2}\right).$$

Soit ρ_0 la densité électrique au point x, y, z quand la particule est dans sa position d'équilibre, soit u, v, w les composantes du déplacement de l'ion de telle façon que :

$$\xi = \frac{du}{dt}.$$

Comme chaque élément $d\tau$ emporte sa charge avec lui, et que nous pouvons négliger les carrés de u, v, w et de leurs dérivées, nous aurons :

$$\rho = \rho_0 - u \frac{d\rho_0}{dx} - v \frac{d\rho_0}{dy} - w \frac{d\rho_0}{dz},$$

et comme ρ_0 est indépendant du temps ;

$$\frac{d\rho}{dt} = -\xi \frac{d\rho_0}{dx} - \eta \frac{d\rho_0}{dy} - \zeta \frac{d\rho_0}{dz},$$

$$\frac{d^2\rho}{dt\, dx} = -\xi \frac{d^2\rho_0}{dx^2} - \eta \frac{d^2\rho_0}{dx\, dy} - \zeta \frac{d^2\rho_0}{dx\, dz},$$

et toujours en négligeant les carrés des ξ

$$\frac{d\rho\xi}{dt} = \rho_0 \frac{d\xi}{dt}, \qquad \frac{d^2\rho\xi}{dt^2} = \rho_0 \frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

Si, mettant en évidence, le premier terme de A, nous posons :

$$A = A' + A'', \qquad A' = -\frac{V^2}{4\pi}\frac{d\rho}{dx},$$

nous voyons d'abord que A' représente la force électrique due à l'attraction électrostatique de la charge de l'élément $d\tau$.

Le terme correspondant dans la force électrique totale sera l'attraction électrostatique due à la particule entière.

Le terme correspondant dans l'effet mécanique subi par la particule représentera encore l'attraction électrostatique de la particule sur *elle-même*; il est donc nul.

Quant à A'', nous voyons que c'est une fonction linéaire de :

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

Il en sera donc de même de la force totale mécanique qui agira sur l'ion. Par raison de symétrie, cette force ne pourra dépendre de η et de ζ, de sorte qu'elle aura pour expression :

$$a\xi + b\frac{d\xi}{dt} + c\frac{d^2\xi}{dt^2},$$

a, b et c étant des constantes.

La particule sera de plus soumise à une force qui tendra à la ramener à sa position d'équilibre. Cette force due à l'attraction des particules voisines aura pour composantes

$$-ku, \quad -kv, \quad -kw.$$

Enfin nous aurons la force d'inertie qui sera :

$$-m\frac{d^2u}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2v}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2w}{dt^2},$$

si m est la masse de l'ion.

Nous aurons donc pour l'équation du mouvement de l'ion :

$$a\frac{du}{dt} + (b - m)\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{d^3u}{dt^3} + ku = 0,$$

dont l'intégrale est de la forme

$$u = Ce^{-\beta t}\cos\lambda t.$$

C'est l'équation d'un mouvement pendulaire amorti.

L'amortissement dépend des termes de degré impair :

$$a \frac{du}{dt} - c \frac{d^3 u}{dt^3}.$$

Cet amortissement ne peut pas ne pas exister. En effet, la particule en vibrant transmet de l'énergie à l'éther; c'est justement pour cela qu'elle émet de la lumière. Elle perd donc de l'énergie et son mouvement s'amortit.

Mais cet amortissement est très lent et nous pouvons négliger ces deux termes.

Quelle est maintenant la signification du coefficient b.

La particule ne peut se déplacer sans entraîner l'éther dans son mouvement, de sorte que la force vive totale se compose de la force vive de la particule elle-même et de la force vive de l'éther avoisinant (sous la forme d'énergie électrodynamique). Tout se passe donc comme si la masse de la particule était augmentée et égale à $b + m$ au lieu de m.

Qu'arrive-t-il maintenant quand la particule se meut dans un champ magnétique intense ?

A toutes les forces que nous venons d'énumérer, il faut adjoindre l'action de ce champ.

Je supposerai que le champ est uniforme et parallèle à l'axe des z et j'appellerai ω l'intensité du champ.

La force mécanique due à ce champ est aisée à évaluer.

Soient ξ, η, ζ les composantes du vecteur V_1 qui représente la vitesse de l'ion et qui sera proportionnel à celui qui représente le courant de convection.

Nous aurons un second vecteur V_2 qui représentera la force magnétique et qui sera parallèle à l'axe des z.

Nous avons enfin un troisième vecteur V_3 qui représentera l'action mécanique du champ sur le courant.

D'après les lois bien connues de l'action des aimants sur les courants, ce vecteur V_3 est perpendiculaire au plan de V_1 et de V_2 et proportionnel au parallélogramme construit sur V_1 et V_2.

On reconnaît là la construction de la force centrifuge composée de Coriolis. Si le vecteur V_1 représente la vitesse relative d'un point mobile, si le vecteur V_2 représente la rotation instantanée dans le mouvement d'entraînement, le vecteur V_3, construit comme je viens de le dire, représentera la force de Coriolis.

Reprenons les équations du mouvement de la particule, en négligeant les coefficients a et c qui correspondent à l'amortissement, et en supposant d'abord le champ magnétique extérieur nul.

Nous avons :

$$(b+m)\frac{d^2u}{dt^2}+ku=0,$$

$$(b+m)\frac{d^2v}{dt^2}+kv=0,$$

$$(b+m)\frac{d^2w}{dt^2}+kw=0.$$

Ce sont les équations du mouvement d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance. Les vibrations sont, comme on le sait, elliptiques et isochrones.

S'il y a un champ magnétique extérieur, nous devrons ajouter à ces équations des termes dont l'expression sera la même que celle de la force de Coriolis.

Nous aurons donc les équations du mouvement relatif d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance; mouvement relatif, dis-je, par rapport à des axes animés d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des z.

Nos équations deviendront :

$$(b+m)\frac{d^2u}{dt^2}-2\varepsilon\frac{dv}{dt}+ku=0,$$

$$(b+m)\frac{d^2v}{dt^2}+2\varepsilon\frac{du}{dt}+kv=0,$$

$$(b+m)\frac{d^2w}{dt^2}+kw=0.$$

Le coefficient ε est proportionnel à l'intensité du champ magnétique.

Ces équations sont faciles à intégrer. Le mouvement de la particule peut être décomposé en trois autres :

1° Une vibration rectiligne parallèle à l'axe des z et dont la période est la même que si le champ n'existait pas;

2° Une vibration circulaire droite dans un plan perpendiculaire à l'axe des z et dont la période sera plus grande que si le champ n'existait pas;

3° Une vibration circulaire gauche dans un plan perpendiculaire à l'axe des z et dont la période sera plus petite que si le champ n'existait pas.

Je désignerai ces trois vibrations élémentaires par Ω_1, Ω_2, Ω_3.

Quel sera maintenant sur l'éther extérieur l'effet de cette vibration de la particule. Pour nous en rendre compte, nous n'avons qu'à appliquer les formules de Hertz qui nous font connaître le champ électromagnétique produit par les petites oscillations d'une charge électrique. Ces formules sont exposées dans le Mémoire que j'ai cité plus haut.

Pour ce que j'en veux faire, je puis me contenter de l'énoncé suivant : en un point très éloigné de l'excitateur, la perturbation se propage par ondes planes ; le plan de l'onde est perpendiculaire à la droite qui joint l'excitateur au point considéré ; la vibration électrique est, à un facteur constant près, la projection sur le plan de l'onde, de l'oscillation excitatrice.

Nous devrons donc projeter sur le plan de l'onde les trois vibrations $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

La projection de Ω_1 sera toujours rectiligne et sa direction sera parallèle à la projection de l'axe des z sur le plan de l'onde.

La projection de Ω_2 ou de Ω_3 sera généralement elliptique. Elle deviendra circulaire si le plan de l'onde est perpendiculaire à l'axe des z ; elle sera rectiligne et perpendiculaire à l'axe des z, si le plan de l'onde est parallèle à l'axe des z.

Maintenant, les vibrations Ω_1, Ω_2 et Ω_3 n'ayant pas les mêmes périodes seront séparées par le spectroscope; la vibration Ω_1 occupera le centre de la raie; les deux autres occuperont les deux bords.

Si le plan de l'onde est perpendiculaire à l'axe des z, un des bords sera donc polarisé circulairement dans un sens et l'autre dans l'autre sens.

Si le plan de l'onde est parallèle à l'axe des z, les deux bords seront polarisés rectilignement, le plan de polarisation étant parallèle à l'axe des z ; et le centre de la raie sera polarisé rectilignement, le plan de polarisation étant perpendiculaire à l'axe des z.

Dans les positions intermédiaires, il y aura des traces de polarisation elliptique.

L'expérience faite par Zeeman a confirmé ses prévisions. Elle lui a permis, en même temps, de mesurer le rapport de la charge d'un ion à sa masse matérielle, ou plutôt de se faire une idée de la grandeur de ce rapport.

Il est aisé de comprendre comment; l'observation nous donne le rapport des deux coefficients de notre équation, ε et $b+m$. Or ε est proportionnel d'une part au champ magnétique, qui est connu, d'autre part à la charge e de l'ion. Nous pouvons donc trouver le rapport $\frac{e}{b+m}$ et, en négligeant b, le rapport $\frac{e}{m}$.

L'expérience a d'abord montré que ce rapport est positif; l'ion qui entre en vibration dans la flamme du sodium est donc chargé positivement.

Quant à la valeur de ce rapport, elle serait égale à 10^7, beaucoup plus grande, par conséquent, qu'on ne devait s'y attendre. Les phénomènes électrolytiques avaient en effet conduit pour ce rapport à une valeur beaucoup plus petite et égale à 400 environ.

Fitzgerald a expliqué cette divergence en supposant qu'une très faible partie de la matière prendrait part à la vibration; chaque molécule se composerait d'un très grand nombre d'atomes : un seul de ces atomes porterait toute la charge et participerait aux vibrations électriques. Si sa masse est m et si M est la masse totale de la molécule, les mesures électrolytiques nous donneraient $\frac{e}{M}$ et les expériences de Zeeman nous donneraient $\frac{e}{m}$.

J'ajouterai qu'il n'est pas sûr que l'on ait le droit de négliger b, c'est-à-dire de négliger devant l'inertie de la particule, celle de l'éther entraîné. Mais cela ne fait qu'accentuer la divergence.

Jusqu'ici, j'ai toujours raisonné comme si la particule chargée en mouvement était seule; il faut tenir compte du mouvement des particules voisines. M. Lorentz a fait le calcul; je ne puis songer à reproduire ici son analyse qui présente la plus grande analogie avec la théorie des diélectriques dans les hypothèses de Poisson et de Mossoti. Je me bornerai à dire que les résultats qui précèdent ne sont pas altérés dans leurs traits essentiels quand on tient compte de l'influence des particules voisines.

Je voudrais seulement insister un peu sur l'explication du phénomène de Faraday, polarisation rotatoire magnétique, dans les hypothèses de Lorentz.

Je reproduis d'abord l'équation (124) de Lorentz [1].

$$\left(a + b\frac{d^2}{dt^2}\right)\left(\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{d^2}{dt^2}\right)X = -4\pi V\left(\frac{dJ}{dx} - \frac{1}{V^2}\frac{d^2X}{dt^2}\right),$$

$$J = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}.$$

Je désigne par X, Y, Z les trois composantes du « moment électrique » (que Lorentz appelle M_x, M_y, M_z). Voici ce que c'est que ce moment électrique : considérons un élément de volume contenant un grand nombre d'ions. Multiplions la charge de chacun de ces ions par la projection de son déplacement

[1] La théorie de Maxwell, *Archives néerlandaises*, t. XXV, p. 133 du tirage à part.

sur l'axe des x; ajoutons tous ces produits et divisons par le volume de l'élément, nous aurons X.

Les coefficients a et b sont des constantes et Δ représente l'opérateur bien connu.

L'équation a été écrite sans supposer l'action d'un champ magnétique extérieur. Si ce champ existe, il faudra introduire la force correspondante et nous venons de voir que cette force avait pour composantes :

$$+\varepsilon\frac{dY}{dt}, \quad -\varepsilon\frac{dX}{dt}, \quad 0.$$

Nos équations vont devenir :

$$\begin{aligned}
DX - \varepsilon\frac{dY}{dt} &= -4\pi V\left(\frac{dJ}{dx} - \frac{1}{V^2}\frac{d^2X}{dt^2}\right),\\
DY + \varepsilon\frac{dX}{dt} &= 4\pi V\left(\frac{dJ}{dy} - \frac{1}{V^2}\frac{d^2Y}{dt^2}\right),\\
DZ &= 4\pi V\left(\frac{dJ}{dz} - \frac{1}{V^2}\frac{d^2Z}{dt^2}\right).
\end{aligned}$$

Dans ces équations, D représente l'opérateur :

$$\left(a + b\frac{d^2}{dt^2}\right)\left(\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{d^2}{dt^2}\right).$$

Bornons-nous au cas d'une onde plane dont le plan est perpendiculaire à l'axe des z. Alors Z est nul, J est nul, X et Y sont fonctions de z et de t seulement.

Il reste donc :

$$\begin{aligned}
DX - \varepsilon\frac{dY}{dt} &= \frac{4\pi}{V}\frac{d^2X}{dt^2},\\
DY + \varepsilon\frac{dX}{dt} &= \frac{4\pi}{V}\frac{d^2Y}{dt^2}.
\end{aligned}$$

Nous supposerons que X et Y sont proportionnels à

$$\sin(mz - nt),$$

de sorte que la longueur d'onde soit $\frac{2\pi}{m}$ et la période d'oscillation $\frac{2\pi}{n}$.

Nos équations nous donnent alors dans le cas d'une vibration circulaire droite :

$$\left(m^2 - \frac{n^2}{V^2}\right)(a + bn^2) + \varepsilon n = \frac{4\pi}{V}n^2.$$

Dans le cas d'une vibration circulaire gauche, il faudrait changer le signe de ε.

Cette formule nous fait connaître en fonction de la période et de ε, la vitesse de la propagation $\frac{n}{m}$ dans le milieu envisagé. C'est donc une formule qui nous donne à la fois la dispersion ordinaire et la dispersion rotatoire magnétique.

Airy, peu de temps après la découverte de Faraday, avait proposé trois formules que nous pouvons rapprocher de celles de Lorentz.

Voici ces trois formules :

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} \rho\frac{d^2X}{dt^2} - \varepsilon\frac{d^2Y}{dz^2\,dt} &= \frac{d^2X}{dz^2},\\ \rho\frac{d^2Y}{dt^2} + \varepsilon\frac{d^2X}{dz^2\,dt} &= \frac{d^2Y}{dz^2};\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned} \rho\frac{d^2X}{dt^2} - \varepsilon\frac{d^3Y}{dt^3} &= \frac{d^2X}{dt^2},\\ \rho\frac{d^2Y}{dt^2} + \varepsilon\frac{d^3X}{dt^3} &= \frac{d^2Y}{dt^2};\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{III})\qquad \left\{\begin{aligned} \rho\frac{d^2X}{dt^2} - \varepsilon\frac{dY}{dt} &= \frac{d^2X}{dt^2},\\ \rho\frac{d^2Y}{dt^2} + \varepsilon\frac{dX}{dt} &= \frac{d^2Y}{dt^2}.\end{aligned}\right.$$

Ces équations conduisent aux formules de dispersion suivantes :

$$(\mathrm{I})\qquad \rho n^2 - \varepsilon m^2 n = m^2,$$

$$(\mathrm{II})\qquad \rho n^2 - \varepsilon n^3 = m^2,$$

$$(\mathrm{III})\qquad \rho n^2 - \varepsilon n = m^2.$$

Les trois formules d'Airy ont été comparées aux observations ; on a trouvé que la formule (III) est inacceptable, que les formules (I) et (II) sont à peu près équivalentes, bien que la formule (I) soit préférable.

Comparons maintenant avec la formule de Lorentz. Si b était nul, on retomberait sur la formule (III). Ainsi pour n très petit, c'est-à-dire dans l'infrarouge, la formule de Lorentz se confondrait avec la formule (III). Il serait curieux de faire des expériences pour voir si la formule (III), inacceptable dans le spectre visible, peut s'appliquer dans le spectre infrarouge.

Mais la formule de Lorentz peut encore se mettre sous une autre forme.

Posons

$$\frac{m}{n} = (\nu_0 + \varepsilon\nu_1)\frac{1}{V},$$

en développant $\frac{m}{n}$ suivant les puissances de ε.

Alors ν_0 représentera l'indice de réfraction et ν_1 mesurera la rotation magnétique.

En négligeant le carré de ε, on trouvera :

$$\frac{\nu_1 \nu_0}{\nu_0^2 - 1} = \frac{C}{n},$$

C étant une constante; voilà où conduit la formule de Lorentz; voilà où conduirait également la formule (III).

Les formules (I) et (II) conduiraient, au contraire, à une formule telle que

$$\frac{\nu_1 \nu_0}{\nu_0^2 - 1} = Cn,$$

où C serait sensiblement constant.

La formule de dispersion de Lorentz est donc loin d'être satisfaisante.

Il n'en est pas moins vrai que la théorie de Lorentz rend compte du fait même de la polarisation rotatoire magnétique, et il est probable qu'une modification de détail suffirait pour rendre compte également des lois de la dispersion.

Il suffirait qu'on pût modifier les hypothèses de telle façon que les composantes de la force Lorentz-Zeeman, au lieu d'être

$$-\varepsilon \frac{dY}{dt}, \quad \varepsilon \frac{dX}{dt}, \quad 0,$$

fussent

$$-\varepsilon \frac{d^3 Y}{dt^3}, \quad \varepsilon \frac{d^3 X}{dt^3}, \quad 0,$$

ou

$$-\varepsilon \frac{d^3 Y}{dz^2\, dt}, \quad \varepsilon \frac{d^3 X}{dz^2\, dt}, \quad 0.$$

Les circonstances de la dispersion rotatoire magnétique se trouveraient expliquées et les expériences de Zeeman s'expliqueraient tout aussi bien.

Il est intéressant de comparer cette explication de la rotation magnétique du plan de polarisation avec celle qu'a donnée M. Potier.

Dans la théorie de Lorentz comme dans celle de Potier, les molécules matérielles sont entraînées dans le mouvement de l'éther; mais dans la première les molécules sont électrisées, dans l'autre, elles sont magnétiques, elles sont comparables à de petites aiguilles aimantées. Dans la théorie de Lorentz, le champ magnétique extérieur agit sur les courants de convection; dans celle de Potier, il agit sur les petites aiguilles aimantées.

La théorie de M. Potier rend mieux compte des lois de la dispersion rotatoire; en revanche, on ne voit pas très bien comment sous sa forme actuelle elle expliquerait l'expérience de Zeeman.

Quoi qu'il en soit, il semble qu'il y a un lien intime entre le phénomène de Zeeman, et celui de Faraday.

L'explication de l'un ne peut guère être cherchée indépendamment de celle de l'autre.

LA THÉORIE DE LORENTZ

ET

LE PHÉNOMÈNE DE ZEEMAN

L'Éclairage électrique, t. 19, p. 5-15 (8 avril 1899).

Introduction.

La découverte du triplet de Zeeman parut un instant une confirmation éclatante de la théorie de Lorentz. Mais bientôt après, M. Cornu découvrait que la plupart des raies ne se décomposent pas en trois dans le champ magnétique, mais bien en quatre composantes dont deux polarisées parallèlement au champ et deux perpendiculairement. Bien plus, MM. Becquerel et Deslandres ont montré que dans certains triplets du fer, c'est la raie médiane dont le plan de polarisation est parallèle au champ et les deux raies extrêmes qui sont polarisées perpendiculairement au champ.

La théorie de Lorentz, sous sa forme primitive, paraissait incapable de rendre compte de tous ces faits; aussi M. Lorentz la modifia-t-il en y introduisant l'hypothèse des ions complexes dont nous parlerons bientôt. La théorie perdait ainsi sa simplicité séduisante; il y a lieu cependant d'examiner dans quelle mesure elle est devenue conforme aux faits observés. C'est cet examen que je me propose de faire.

Soient f, g, h, le déplacement électrique; X, Y, Z, la polarisation diélectrique; l'équation déduite des conditions de l'équilibre des particules chargées sera de la forme :

$$\lambda \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{X}{L} = f + \frac{X}{3}, \tag{1}$$

λ et L étant des coefficients constants. D'autre part, si l'onde est plane et le plan de l'onde perpendiculaire à l'axe des z, on a l'équation :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + K_0 \frac{d^2 f}{dt^2} = K_0 \frac{d^2 X}{dt^2},$$

$\frac{1}{\sqrt{K_0}}$ étant la vitesse de la lumière dans le vide.

Supposons maintenant que la lumière soit monochromatique; alors chacune de nos fonctions f, g, h, X, Y, Z, sera égale à la partie réelle d'un produit dont le premier facteur est constant et dont le second facteur est l'exponentielle

$$e^{ip(nz\sqrt{K_0}-t)}.$$

On a donc

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -p^2 X, \qquad \frac{d^2 f}{dt^2} = -p^2 f, \qquad \frac{d^2 f}{dz^2} = -p^2 n^2 K_0 f;$$

$\frac{2\pi}{p}$ représente la période de mouvement vibratoire et n l'indice de réfraction.

Nos équations deviennent alors :

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} X\left(\frac{1}{L} - \lambda p^2\right) = f + \frac{X}{3}, \\ (n^2 - 1) f = X, \end{cases}$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{1}{L} - \lambda p^2 = \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{1}{3};$$

c'est la relation qui relie l'indice n à la période $\frac{2\pi}{p}$, c'est la courbe de dispersion.

Les raies d'absorption correspondent aux asymptotes de la courbe de dispersion [parce que dans le voisinage de ces asymptotes on n'a plus le droit de négliger un terme en $\frac{dX}{dt}$ qui devrait figurer dans l'équation (1) et dont dépend l'absorption].

Si donc l'équation (2) était exacte, il n'y aurait qu'une raie dans le spectre. On est donc obligé de modifier un peu l'hypothèse, en supposant des particules chargées de plusieurs sortes.

Soient alors X_K, Y_K, Z_K les composantes de la polarisation partielle due aux particules de la $k^{\text{ième}}$ sorte, de telle façon que la polarisation totale X, Y, Z soit la somme des polarisations partielles et que l'on ait :

$$(3) \qquad X = \Sigma X_K.$$

D'autre part, on aura une série d'équations analogues à l'équation (1) :

$$\lambda_K \frac{d^2 X_K}{dt^2} + \frac{X_K}{L_K} = f + \frac{X}{3},$$

d'où l'on déduira les équations :

$$(4) \qquad X_K\left(\frac{1}{L_K} - \lambda_K p^2\right) = f + \frac{X}{3}.$$

En éliminant X et les X_K entre les équations (3), (4) et (α), on obtiendra l'équation de la courbe de dispersion.

Voici comment peut se faire cette élimination.

Posons :

$$\Phi = \sum \frac{X_K^2}{2 L_K} - \frac{X^2}{6}, \qquad \Phi_1 = \sum \frac{\lambda_K}{2} X_K^2.$$

Nos équations (4) peuvent s'écrire, en se rappelant que $X = \Sigma X_K$:

$$\frac{d}{dX_K}(\Phi - p^2 \Phi_1 - fX) = 0.$$

Nous pouvons alors trouver des combinaisons linéaires des X_K que nous appellerons X'_K et qui sont telles que si l'on prend les X'_K comme nouvelles variables, les deux formes quadratiques Φ et Φ_1 se réduisent à des sommes de carrés.

Nous pouvons donc toujours supposer :

$$\Phi = \sum \frac{p_K^2}{a_K} \frac{X_K'^2}{2}, \qquad \Phi_1 = \sum \frac{X_K'^2}{2 a_K}, \qquad X = \sum X'_K.$$

Nos équations deviennent alors :

$$\frac{d}{dX'_K}(\Phi - p^2 \Phi_1 - fX) = 0$$

ou bien :

$$(5) \qquad (p_K^2 - p^2) X'_K = a_K f$$

d'où en combinant (5) et (α) :

$$n^2 - 1 = \sum \frac{a_K}{p_K^2 - p^2}.$$

Telle est l'équation de la courbe de dispersion; on voit que les raies d'absorption, c'est-à-dire les asymptotes correspondent aux valeurs

$$p^2 = p_K^2.$$

Polarisation rotatoire magnétique et phénomène de Zeeman.

Examinons maintenant l'action d'un champ magnétique intense α, β, γ; nos équations en tenant compte de l'action mécanique de ce champ sur les ions deviennent :

$$\lambda_k \frac{d^2 X_k}{dt^2} + \frac{X_k}{L_k} = f + \frac{X}{3} - \varepsilon_k \left(\frac{dY_k}{dt}\gamma - \frac{dZ_k}{dt}\beta \right),$$

ε_k étant un nouveau coefficient. Supposons d'abord le champ parallèle au rayon, c'est-à-dire à l'axe des z. Supposons, en d'autres termes, $\alpha = \beta = 0$. Notre équation deviendra, en tenant compte de (α) :

$$\lambda_k \frac{d^2 X_k}{dt^2} + \frac{X_k}{L_k} = \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{X}{3} + \varepsilon_k \frac{dY_k}{dt}\gamma$$

et nous aurons de même :

$$\lambda_k \frac{d^2 Y_k}{dt^2} + \frac{Y_k}{L_k} = \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{Y}{3} - \varepsilon_k \frac{dX_k}{dt}\gamma.$$

Examinons comment se comporte un rayon circulaire droit. J'ai dit que chacune de nos fonctions f, X, X_k est la partie réelle d'un produit dont le premier facteur est une constante et le second une exponentielle imaginaire. Eh bien, ce qui caractérise le rayon droit, c'est que g, Y, Y_k sont les parties imaginaires de ces mêmes produits, de sorte que, si nous posons,

$$U_k = X_k + iY_k, \qquad U = X + iY,$$

U et U_k seront ces produits eux-mêmes et qu'on aura :

$$U = \sum U_k, \qquad \frac{dU_k}{dt} = -ipU_k, \qquad \frac{d^2 U_k}{dt^2} = -p^2 U_k.$$

Nos équations nous donnent alors :

$$(5) \qquad \lambda_k \frac{d^2 U_k}{dt^2} + \frac{U_k}{L_k} = \frac{U}{n^2 - 1} + \frac{U}{3} - i\varepsilon_k \gamma \frac{dU_k}{dt},$$

d'où :

$$\frac{U_k}{L_k} - p^2 \lambda_k U_k = \frac{U}{n^2 - 1} + \frac{U}{3} + p\varepsilon_k \gamma U_k.$$

En éliminant les U_k entre ces équations et se rappelant que $U = \Sigma U_k$, on

trouverait la relation entre n, p et γ, ce qui permettrait de construire la courbe de dispersion. Pour faire cette élimination, je pose :

$$\Phi = \sum \frac{U_K^2}{2L_K} - \frac{U^2}{6}, \qquad \Phi_1 = \sum \frac{\lambda_K}{2} U_K^2,$$

$$\Phi_2 = \frac{U^2}{2}, \qquad \Phi_3 = \sum \frac{\varepsilon_K}{2} U_K^2,$$

$$\Theta = \Phi - p^2\Phi_1 - \frac{\Phi}{n^2-1} - p\gamma\Phi_3.$$

Nos équations deviennent :

$$\frac{d\Theta}{dU_K} = 0$$

et à cause du théorème des fonctions homogènes :

$$\Theta = \frac{1}{2}\sum U_K \frac{d\Theta}{dU_K} = 0.$$

Nous pouvons regarder n et les U_K comme des fonctions de deux variables indépendantes p et γ; en différentiant par rapport à p je trouve :

$$\frac{d\Theta}{dn}\frac{dn}{dp} + \frac{d\Theta}{dp} + \sum \frac{d\Theta}{dU_K}\frac{dU_K}{dp} = \frac{d\Theta}{dn}\frac{dn}{dp} + \frac{d\Theta}{dp} = 0$$

et, de même, en différentiant par rapport à γ :

$$\frac{d\Theta}{dn}\frac{dn}{d\gamma} + \frac{d\Theta}{d\gamma} = 0.$$

La première de ces équations nous fait connaître $\frac{dn}{dp}$, c'est-à-dire les variations de l'indice avec la couleur; la seconde nous fait connaître $\frac{dn}{d\gamma}$ dont dépend la polarisation rotatoire magnétique.

Or il vient :

$$\frac{d\Theta}{d\gamma} = -p\Phi_3, \qquad \frac{d\Theta}{dp} = -2p\Phi_1 - \gamma\Phi_3,$$

ou en négligeant le second terme :

$$\frac{d\Theta}{dp} = -2\Phi_1.$$

Donc $\frac{dn}{dp}$ et $\frac{dn}{d\gamma}$ sont entre eux comme $2\Phi_1$ et Φ_3. Si l'on suppose que le rap-

port de Φ_1 à Φ_3 est à peu près constant (ce qui serait rigoureusement vrai si les ε_K étaient entre eux comme les λ_K), on pourra dire que $\frac{dn}{d\gamma}$ est sensiblement proportionnel à $\frac{dn}{dp}$.

Pour avoir les asymptotes de la courbe de dispersion, c'est-à-dire les raies d'absorption, il faut faire $n=\infty$ et regarder p comme une fonction de γ. On trouve ainsi :

$$\frac{d\Theta}{dp}\frac{dp}{d\gamma}+\frac{d\Theta}{d\gamma}=0,$$

d'où

$$\frac{dp}{d\gamma}=-\frac{\Phi_3}{2\Phi_1},$$

formule qui nous fait connaître le déplacement de la raie d'absorption par le champ magnétique en supposant la polarisation circulaire droite.

Si nous avions affaire à un rayon circulaire gauche, il aurait fallu poser

$$U_K = X_K - iY_K,$$

nous aurions retrouvé l'équation (5) sauf que le signe du terme en γ aurait été changé. Nous aurions donc obtenu les mêmes résultats à cette différence près que le signe de $\frac{dn}{d\gamma}$ et $\frac{dp}{d\gamma}$ aurait été changé.

La différence d'indice des deux rayons droit et gauche est donc $2\gamma\frac{dn}{d\gamma}$; donc la polarisation rotatoire est proportionnelle à $p\frac{dn}{d\gamma}$; d'après le résultat obtenu plus haut, elle sera sensiblement proportionnelle à $p\frac{dn}{d\gamma}$; c'est la loi récemment énoncée par M. H. Becquerel.

La raie d'absorption qui correspond au nombre p_K se décomposera en deux qui correspondront aux nombres

$$p_K-\frac{\Phi_3\gamma}{2\Phi_1},\qquad p_K+\frac{\Phi_3\gamma}{2\Phi_1}$$

et qui seront polarisées circulairement, la première à droite, la seconde à gauche.

Dans le cas où le rayon est parallèle au champ, la théorie de Lorentz rend donc bien compte des faits observés.

Rayon perpendiculaire au champ.

Supposons maintenant que le rayon soit perpendiculaire au champ, soit par exemple : $\beta = \gamma = 0$.

Nos équations deviennent :

$$(6)\quad \begin{cases} \lambda_k \dfrac{d^2 X_k}{dt^2} + \dfrac{X_k}{L_k} = f + \dfrac{X}{3}, \\ \lambda_k \dfrac{d^2 Y_k}{dt^2} + \dfrac{Y_k}{L_k} = g + \dfrac{Y}{3} + \varepsilon_k \alpha \dfrac{dZ_k}{dt}, \\ \lambda_k \dfrac{d^2 Z_k}{dt^2} + \dfrac{Z_k}{L_k} = h + \dfrac{Z}{3} - \varepsilon_k \alpha \dfrac{dY_k}{dt}. \end{cases}$$

On aura d'ailleurs

$$(n^2-1)f = X, \qquad (n^2-1)g = Y.$$

Mais la relation entre h et Z serait différente. On a, en effet :

$$\sum \frac{df}{dx} + \sum \frac{dX}{dx} = 0.$$

Si l'onde est plane, les dérivées prises par rapport à x et à y sont nulles et cette équation se réduit à :

$$\frac{dh}{dz} + \frac{dZ}{dz} = 0$$

ou puisque h et Z doivent être des fonctions périodiques de z :

$$(8)\qquad h + Z = 0.$$

Des équations (6), (7) et (8) nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

1° Pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand il n'y a pas de champ, on a $Z = h = Z_k = 0$, c'est-à-dire que les vibrations des particules comme celles de l'éther sont transversales ;

2° Si α est très petit du premier ordre (un champ de 30 000 unités qui produit le dédoublement des raies, mais un dédoublement très faible, peut encore, à ce compte être regardé comme très petit), les quantités h, Z et Z_k seront très petites du premier ordre ; le terme $\varepsilon_k \alpha \dfrac{dZ_k}{dt}$ sera donc du second ordre et pourra

être négligé et il viendra :

$$\lambda_K \frac{d^2 X_K}{dt^2} + \frac{X_K}{L_K} = f + \frac{X}{3},$$

$$\lambda_K \frac{d^2 Y_K}{dt^2} + \frac{Y_K}{L_K} = g + \frac{Y}{3},$$

c'est-à-dire que le champ n'aura aucune influence.

Ainsi, *la théorie de Lorentz sous sa forme primitive n'est pas plus capable d'expliquer le triplet de Zeeman que le quadruplet de Cornu.*

On a longtemps cru le contraire et je l'ai moi-même écrit. C'est que se croyant en droit d'envisager les « vibrations propres » d'une particule ou d'un système de particules en laissant de côté l'action de l'éther on faisait dans les équations (6) $f = g = h = 0$. Cela, on n'a pas le droit de le faire, car l'équation (8) est une véritable équation de liaison entre les mouvements de l'éther et ceux des particules.

J'arrive à une généralisation de la théorie donnée par M. Lorentz lui-même.

Théorie des ions complexes.

Supposons que nos ions, au lieu de se comporter comme de simples points matériels, soient formés d'un système dynamique plus compliqué comprenant plusieurs points matériels qui pourront être assujettis à des liaisons quelconques. Je choisirai, pour représenter l'état du système, des coordonnées généralisées quelconques que je désignerai par T_K.

Soit H la force vive des ions, ce sera une forme quadratique homogène par rapport aux $\frac{dT_K}{dt}$. Soit P_2 l'énergie potentielle due aux actions mutuelles des ions ; à cause de la petitesse des déplacements, ce sera encore une forme quadratique par rapport aux T_K. Soit $-P_1$ l'énergie potentielle due à l'action électrostatique de l'éther sur les ions ; nous pourrons supposer :

$$P_1 = fX + gY + hZ ;$$

X, Y, Z représentant toujours les composantes de la polarisation diélectrique seront des formes linéaires par rapport aux T_K.

Soit enfin : $\Sigma W_K \delta T_K$ le travail virtuel des forces dues à l'action du champ magnétique sur les ions quand ces ions subissent des déplacements virtuels, δT_K.

Les équations de Lagrange nous donnent :

$$\frac{dH}{d\frac{dT_K}{dt}} + \frac{dP_2}{dT_K} = \frac{dP_1}{dT_K} + W_K.$$

Or, comme nous avons toujours les équations (7) et (8), il vient :

$$dP_1 = d\left(\frac{X^2+Y^2}{2n^2-2} - \frac{Z^2}{2}\right),$$

d'où :

$$\frac{dH}{d\frac{dT_K}{dt}} + \frac{d}{dT_K}\left(P_2 - \frac{X^2+Y^2}{2n^2-2} + \frac{Z^2}{2}\right) = W_K.$$

Si nous voulons chercher les asymptotes de la courbe de dispersion, il faut faire $n = \infty$ et il reste :

$$\frac{dH}{d\frac{dT_K}{dt}} + \frac{d}{dT_K}\left(P_2 + \frac{Z^2}{2}\right) = W_K.$$

On peut toujours supposer que les T_K aient été choisis de telle sorte que :

$$H = \sum \frac{1}{2}\left(\frac{dT_K}{dt}\right)^2, \qquad P^2 + \frac{Z^2}{2} = \sum \frac{p_K^2}{2} T_K^2$$

et notre équation devient :

$$\frac{d^2 T_K}{dt^2} + p_K^2 T_K = W_K.$$

Les W_K sont évidemment des formes linéaires, d'une part par rapport à α, β, γ, d'autre part par rapport aux $\frac{dT}{dt}$. De plus, l'action d'un champ magnétique sur un courant est toujours perpendiculaire à ce courant ; dans le cas du mouvement des ions, où il s'agit d'un courant de convection, cette action du champ sera perpendiculaire à la vitesse de l'ion et son travail sera nul. On aura donc identiquement :

$$\sum W_K \frac{dT_K}{dt} = 0.$$

Si la lumière est monochromatique, on aura :

$$\frac{dT_K}{dt} = -ipT_K, \qquad \frac{d^2T_K}{dt^2} = -p^2T_K.$$

Voici le sens de la première de ces deux équations : T_K est la partie réelle du produit d'un facteur constant et d'une exponentielle imaginaire. Ce produit lui-même satisfera aux mêmes équations que T_K. Nos équations comportent

ainsi une solution imaginaire plus aisée à traiter que la solution réelle, et d'où il est facile de déduire cette solution réelle. C'est cette solution imaginaire que, par un artifice bien connu, je substitue à la solution réelle.

Soit V_K ce que devient W_K quand on y remplace les $\frac{dT}{dt}$ par les T, on aura :

$$W_K = -ipV_K, \qquad \Sigma V_K T_K = 0,$$

d'où

$$(p_K^2 - p^2)T_K = -ipV_K.$$

Parmi les valeurs de p_K, je suppose qu'il y en ait n : $p_1, p_2, \ldots, p_n$ qui soient égales entre elles de sorte que :

$$p_K = p_1 \quad (K \leqq n), \qquad p_K \gtrless p_1 \quad (K > n).$$

Supposons que dans les équations (9) le champ α, β, γ, soit nul, et faisons $p = p_1$, il viendra :

$$T_K \gtrless 0 \quad (K \leqq n), \qquad T_K = 0 \quad (K > n).$$

Si le champ, sans être nul, est très petit, les T_K dont l'indice est plus grand que n, sans être nuls, sont très petits. On peut donc les négliger dans les seconds membres des équations (9) dont tous les termes contiennent des composantes du champ en facteur. Si donc V'_K est ce que devient V_K quand on y annule tous les T dont l'indice est plus grand que n, nos équations deviennent :

(9 *bis*) $$(p_1^2 - p^2)T_K = -ipV'_K \quad (K = 1, 2, \ldots, n).$$

Posons :

$$S = i\frac{p^2 - p_1^2}{p}.$$

Si je pose, en outre, $p = p_1 + \delta p$, comme δp sera très petit, j'aurai approximativement

$$S = 2i\,\delta p$$

et nos équations deviendront :

$$ST_K + V'_K = 0.$$

Ce sont là n équations linéaires entre les n variables

$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots, \quad T_n;$$

en égalant à zéro le déterminant de ces équations, on aura une équation en S algébrique et du $n^{\text{ième}}$ ordre. Aux n racines de cette équation correspondront n raies qui proviendront du dédoublement de la raie $p = p_1$.

A cause de l'identité

$$\Sigma V'_k T_k = 0, \tag{10}$$

cette équation sera d'une forme toute particulière. Pour le faire comprendre, j'écris complètement l'équation en supposant $n = 4$.

$$\begin{vmatrix} S & a & b & c \\ -a & S & d & e \\ -b & -d & S & f \\ -c & -e & -f & S \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Je dis que l'équation a ses racines purement imaginaires; envisageons, en effet, les équations différentielles

$$\frac{dT_k}{dt} = V'_k,$$

ce sont des équations linéaires à coefficients constants dont la solution dépend des exponentielles e^{St}. De plus, à cause de l'identité (10), cette solution doit satisfaire à la condition :

$$\Sigma T_k^2 = \text{const.},$$

ce qui serait impossible si la partie réelle de S était positive ou négative.

Les n valeurs de S étant donc purement imaginaires, les n valeurs de δp seront réelles, de sorte que les n raies de dédoublement existeront effectivement.

De plus, les racines de l'équation en S devront être deux à deux égales et de signe contraire; c'est-à-dire que les raies dédoublées devront être deux à deux symétriques par rapport à la raie primitive. Si n est impair, une des racines doit être nulle et, par conséquent, l'une des raies dédoublées coïncide avec la raie primitive. En définitive, il suffit de faire $n = 3$ pour retrouver le triplet de Zeeman et $n = 4$ pour trouver le quadruplet de Cornu.

Telle est la théorie des ions complexes imaginée par M. Lorentz.

Isotropie dans le plan de l'onde.

Il reste à voir s'il est possible de satisfaire aux conditions de symétrie qui s'imposent à nous. Supposons que l'on change d'axes de coordonnées, en conservant l'axe des z qui est perpendiculaire au plan de l'onde, mais en faisant tourner les axes des x et des y d'un angle quelconque.

Le milieu étant isotrope, nos équations ne devront pas changer.

Nous sommes ainsi conduit à distinguer parmi les coordonnées T_K deux catégories différentes : les *coordonnées vectorielles* qui seront les composantes de vecteurs fixes dans l'espace, mais dont les projections sur les axes varieront d'après les lois ordinaires quand on fera tourner ces axes ; les *coordonnées scalaires* qui ne varieront pas quand les axes tourneront.

Supposons que l'on ait $n = 4$, et que nous ayons deux coordonnées vectorielles X_K et Y_K, composantes d'un même vecteur et deux coordonnées scalaires T_K et T'_K. Nos équations s'écriront :

$$SX_K + V'_1 = SY_K + V'_2 = ST_K + V'_3 = ST'_K + V'_4 = 0. \tag{9 ter}$$

Quand les axes tourneront d'un angle φ, les quantités $X_K + iY_K$, $\alpha + i\beta$ seront multipliées par $e^{i\varphi}$ et les quantités conjuguées par $e^{-i\varphi}$. Donc $V'_1 + iV'_2$ doit être également multiplié par $e^{i\varphi}$, V'_3 et V'_4 ne doivent pas changer.

J'en conclurai que notre équation (11) doit être de la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} S & a\gamma & b\alpha & c\beta \\ a\gamma & S & b\beta & -c\alpha \\ -b\alpha & -b\beta & S & d\gamma \\ -c\beta & c\alpha & -d\gamma & S \end{vmatrix} = 0. \tag{11 bis}$$

Ce n'est pas tout; le milieu n'est pas seulement isotrope, il est symétrique; nos équations ne doivent donc pas changer quand on remplace notre système d'axes par un système symétrique (le plan de symétrie étant le plan des xz, par exemple).

Nous sommes ainsi amenés à distinguer, parmi les coordonnées vectorielles, celles de la première et de la deuxième sorte, selon que le vecteur correspondant conserve son signe ou change de signe quand on passe d'un système d'axes à son symétrique et nous distinguerons de même parmi les coordonnées scalaires celles de la première sorte, qui conservent leur signe et celles de la deuxième qui en changent.

Nous voyons ainsi que quand y change de signe, γ, α, Y_K et T_K doivent changer de signe, c'est-à-dire que X_K et Y_K sont des coordonnées vectorielles de la première sorte, T'_K une coordonnée scalaire de la première sorte, T_K une coordonnée scalaire de la deuxième sorte.

En développant le déterminant (11 *bis*) on trouve :

$$S^4 + S^2(a^2\gamma^2 + b^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\alpha^2 + c^2\beta^2 + d^2\gamma^2) + (ad\gamma^2 + bc\alpha^2 + bc\beta^2)^2 = 0.$$

Si l'on fait l'une des quatre hypothèses

$$a = b, \quad d = c; \qquad a = c, \quad d = b;$$
$$a = -b, \quad d = -c; \qquad a = -c, \quad d = -b;$$

les racines de cette équation ne dépendront que de la somme $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$; en d'autres termes, elles dépendront de l'intensité du champ et pas de sa direction.

L'écartement des raies dédoublées serait donc le même que le champ soit parallèle ou perpendiculaire au rayon. En est-il effectivement ainsi ? L'expérience ne paraît pas défavorable à cette hypothèse, mais je ne crois pas que des mesures assez précises aient été faites pour qu'on puisse rien affirmer.

Supposons $\beta = 0$ et étudions les conditions de la polarisation; il faut pour cela déterminer le rapport $\frac{Y_K}{X_K}$ pour les quatre valeurs de S.

Pour que la polarisation soit rectiligne, le plan de polarisation étant perpendiculaire à la composante du champ normal au rayon, il faut que Y_K s'annule. En faisant $Y_K = 0$, on trouve :

$$S^2 - b^2\alpha^2 + d^2\gamma^2 = 0,$$

ce qui concorde avec (11 *bis*) si l'on suppose :

$$a = c, \qquad d = b.$$

Pour que la polarisation soit rectiligne, le plan de polarisation étant parallèle à la composante du champ normal au rayon, il faut faire $X_K = 0$, d'où :

$$S^2 - c^2\alpha^2 + d^2\gamma^2 = 0,$$

ce qui concorde avec (11 *bis*) si l'on suppose :

$$a = b, \qquad d = c.$$

Dans les deux cas, il y a deux raies (raies moyennes) dont la polarisation est toujours rectiligne, et qui disparaissent pour $\alpha = 0$, et deux raies (raies extrêmes) dont la polarisation est rectiligne pour $\gamma = 0$, elliptique en général, et circulaire pour $\alpha = 0$.

Dans la première hypothèse ($a = c$, $d = b$), la polarisation des raies moyennes est perpendiculaire au champ, celle des raies extrêmes parallèle.

Dans la seconde hypothèse ($a = b$, $c = d$), c'est le contraire.

C'est donc la première hypothèse que l'expérience semble confirmer.

Isotropie dans l'espace.

Mais nous n'avons pas encore rempli toutes les conditions de symétrie du problème.

Nos équations doivent rester les mêmes quelle que soit l'orientation du plan de l'onde, puisque le milieu est isotrope; de plus le milieu n'est pas seulement isotrope sans symétrie (comme l'essence de térébenthine par exemple), il est isotrope et symétrique. Les équations ne doivent donc pas changer quand on remplace le système des axes par un système symétrique par rapport à l'origine.

Nous sommes ainsi conduit à distinguer deux sortes de coordonnées :

1° Les coordonnées vectorielles que j'appellerai X_k, Y_k, Z_k et qui seront les composantes d'un vecteur;

2° Les coordonnées scalaires que j'appellerai T_k et qui seront tout à fait indépendantes du choix des axes.

Cela posé, par raison de symétrie :

1° H sera une combinaison linéaire d'expressions d'une des quatre formes suivantes :

$$\frac{dX_k}{dt}\frac{dX_i}{dt}+\frac{dY_k}{dt}\frac{dY_i}{dt}+\frac{dZ_k}{dt}\frac{dZ_i}{dt}; \quad \frac{dT_k}{dt}\frac{dT_i}{dt}$$

(i peut être égal à k);

2° P_2 sera une combinaison linéaire d'expressions d'une des formes suivantes :

$$X_k X_i + Y_k Y_i + Z_k Z_i; \quad T_k T_i;$$

3° $P_1 = fX + gY + hZ$ est une combinaison linéaire d'expressions de la forme

$$fX_k + gY_k + hZ_k;$$

4° L'expression $\Sigma V_k \,\delta T_k$ sera une combinaison linéaire d'expressions de la forme

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ X_k & Y_k & Z_k \\ \delta X_i & \delta Y_i & \delta Z_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ X_i & Y_i & Z_i \\ \delta X_k & \delta Y_k & \delta Z_k \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} T_i & \alpha X_k + \beta Y_k + \gamma Z_k \\ \delta T_i & \alpha\,\delta X_k + \beta\,\delta Y_k + \gamma\,\delta Z_k \end{vmatrix}.$$

On voit que dans P_2 et H, les termes qui dépendent des X, ceux qui dépendent des Y, ceux qui dépendent des Z, ceux qui dépendent des T sont entièrement séparés les uns des autres. Soient

$$P_x, \quad P_y, \quad H_z, \quad P_t;$$
$$H_x, \quad H_y, \quad H_z, \quad H_t;$$

ces huit ensembles de termes, P_x représentant par exemple l'ensemble des termes de P_2 qui dépendent des X.

Nous pouvons choisir les X_K et les T_K, de telle façon que :

$$H_x = \sum \frac{1}{2}\left(\frac{dX_K}{dt}\right)^2, \qquad P_x = \sum \frac{p_K^2}{2} X_K^2;$$
$$H_t = \sum \frac{1}{2}\left(\frac{dT_K}{dt}\right)^2, \qquad P_t = \sum \frac{q_K^2}{2} T_K^2$$

et alors on verrait que H_y et P_y sont formés avec les Y, et H_z et P_z avec les Z comme H_x et P_x le sont avec les X.

On obtiendra ainsi une série d'équations analogues aux équations (9)

$$(12) \quad \begin{cases} X_K(p_K^2 - p^2) = \xi_K, \qquad Y_K(p_K^2 - p^2) = \eta_K, \qquad T_K(q_K^2 - p^2) = \tau_K, \\ Z_K(p_K^2 - p^2) + Z\dfrac{dZ}{dZ_K} = \zeta_K, \end{cases}$$

où ξ_K, η_K, ζ_K, τ_K sont des quantités qui jouent par rapport à X_K, Y_K, Z_K, T_K le même rôle que jouait $-ipV$ par rapport à T_K dans les équations (9).

Nous allons traiter les équations (12) comme nous avons fait des équations (9). Les seconds membres des équations (12) comme ceux des équations (9) sont très petits. Annulons-les en première approximation et faisons $p = p_1$; nous obtiendrons une série d'équations linéaires entre les quantités X_K, Y_K, Z_K, T_K. En vertu de ces équations, un certain nombre de ces quantités s'annuleront. Par exemple, X_K s'annulera si p_K n'est pas égal à p_1 et T_K si q_K n'est pas égal à p_1. De plus, celles de ces quantités qui ne s'annuleront pas pourront ne pas rester indépendantes, mais il pourra y avoir entre elles certaines relations linéaires.

Pour mieux mettre le fait en évidence, je distinguerai parmi les Z_K deux catégories : ceux pour lesquels $\frac{dZ}{dZ_K}$ sera nulle et que j'appellerai les Z'_K; ceux pour lesquels cette dérivée ne sera pas nulle et que j'appellerai les Z''_K. J'appellerai X'_K et Y'_K les X_K et les Y_K qui correspondent aux Z'_K et X''_K et Y''_K ceux qui correspondent aux Z''_K.

Je poserai

$$Z = \Sigma l_K Z_K$$

et je désignerai par p'_K et l'_K les valeurs des coefficients p_K et l_K qui correspondent aux Z'_K ; par p''_K et l''_K celles qui correspondent aux Z''_K ; il résulte de cette définition et de celle des Z'_K que tous les l'_K sont nuls.

Nos équations (12) privées de seconds membres s'écriront alors quand on y aura fait $p = p_1$

$$(12\ bis)\quad \begin{cases} (p'^2_K - p_1^2) X'_K = 0, & (p''^2_K - p_1^2) X''_K = 0, \\ (p'^2_K - p_1^2) Z'_K = 0, & (p''^2_K - p_1^2) Z''_K + l''_K Z = 0, \end{cases}$$

avec

$$Z = \Sigma l''_K Z''_K.$$

On peut toujours supposer qu'un au plus des p'_K est égal à p_1 ; le cas où il y en aurait plus d'un se ramènerait immédiatement à celui où il n'y en a qu'un.

Si aucun des p''_K n'est égal à p_1, tous les X''_K sont nuls.

Si un des p''_K que j'appellerai, par exemple, p''_i est égal à p_1, les équations (12 *bis*) relatives aux Z''_K, montrent que Z et tous les Z''_K sont nuls.

Il est donc impossible que l'un des X''_K et l'un des Z''_K soient en même temps différents de zéro.

Mais on peut généraliser notre hypothèse ; ne supposons plus

$$P_1 = fX + gY + hZ;$$

supposons toujours

$$P_1 = \Sigma l''_K (fX''_K + gY''_K + hZ''_K),$$

mais au lieu d'avoir

$$Z = \Sigma l_K Z_K = \Sigma l''_K Z''_K,$$

on aura :

$$Z = \Sigma m_K Z_K,$$

les coefficients m_K étant différents des l_K.

Nous pouvons supposer alors :

$$p''_i = p_1, \qquad l''_i = 0, \qquad m''_i = 0$$

et alors X''_i, Y''_i, Z''_i pourront ne pas s'annuler.

En vertu des équations (12 *bis*), quelques-unes de nos coordonnées s'annuleront ; les autres s'exprimeront linéairement à l'aide d'un certain nombre d'entre elles qui resteront indépendantes et qui joueront le rôle des coor-

données $T_1, T_2, \ldots, T_n$ dans les équations (9 *bis*). Substituons les valeurs ainsi déduites des équations (12 *bis*) dans les seconds membres des équations (12); ce que nous pouvons faire en négligeant des termes du deuxième ordre; nous obtiendrons des équations linéaires analogues aux équations (9 *bis*) et en égalant à zéro le déterminant de ces équations linéaires, nous obtiendrons une équation analogue à l'équation (11).

Discussion.

Si nous voulons rendre compte du quadruplet, il faut que cette équation soit du quatrième degré; pour cela il faut que quatre et quatre seulement de nos coordonnées ne s'annulent pas en vertu des équations (12 *bis*).

Supposons d'abord que les coefficients appelés plus haut m_K sont égaux aux coefficients l_K.

Alors les coordonnées qui ne s'annulent pas pourront être trois coordonnées vectorielles X'_1, Y'_1, Z'_1 et une coordonnée scalaire T_K.

L'expression :

$$(13) \qquad \sum_p^i (\xi_K \,\delta X_K + \eta_K \,\delta Y_K + \zeta_K \,\delta Z_K + \tau_K \,\delta T_K),$$

qui joue le même rôle que jouait l'expression $\Sigma V_K \,\delta T_K$ par rapport aux équations (9), sera de la forme :

$$a \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ X'_1 & Y'_1 & Z'_1 \\ \delta X'_1 & \delta Y'_1 & \delta Z'_1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} T_K & \alpha X'_1 + \beta Y'_1 + \gamma Z'_1 \\ \delta T_K & \alpha\,\delta X'_1 + \beta\,\delta Y'_1 + \gamma\,\delta Z'_1 \end{vmatrix},$$

notre équation en S s'écrit alors :

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} S & -a\gamma & a\beta & b\alpha \\ a\gamma & S & a\alpha & b\beta \\ a\beta & a\alpha & S & b\gamma \\ b\alpha & -b\beta & -b\gamma & S \end{vmatrix} = 0,$$

où il est aisé de reconnaître l'équation (11 *bis*) dans l'hypothèse $a = c$, $b = d$.

Le problème semble donc résolu d'une manière satisfaisante. Il n'en est rien encore cependant. Reprenons l'équation dont dépend X'_1,

$$(p_1^2 - p^2) X'_1 = \xi_1.$$

Elle a été tirée d'une équation différentielle (que j'écris en supprimant le second membre qui dépend du champ magnétique et est très petit)

$$\frac{d^2 X'_1}{dt^2} + p_1^2 X'_1 = l'_1 f.$$

Mais d'après la définition même des X'_K, le coefficient l'_1 doit être nul. Il reste donc :

$$\frac{d^2 X'_1}{dt^2} + p_1^2 X'_1 = 0.$$

On voit que dans cette équation différentielle, *le déplacement électrique n'entre pas*.

La coordonnée X'_1 pourra donc éprouver des oscillations, mais *ces oscillations ne se communiqueront pas à l'éther*. Il en résulte que la solution qui précède est illusoire.

Nous sommes donc réduit à supposer les l_K différents des m_K :

$$p''_i = p_1, \qquad m''_i = 0, \qquad l''_i = 0.$$

Soient alors X''_i, Y''_i, Z''_i et T_K les coordonnées qui ne s'annulent pas ; l'expression (13) sera de la forme :

$$a\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ X''_i & Y''_i & Z''_i \\ \delta X''_i & \delta Y''_i & \delta Z''_i \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} T_K & \alpha X''_i & \beta Y''_i & \gamma Z''_i \\ \delta T_K & \alpha\,\delta X''_i + \beta\,\delta Y''_i + \gamma\,\delta Z''_i \end{vmatrix}.$$

Nous retrouvons alors l'équation (14). D'ailleurs, l'équation différentielle

$$\frac{d^2 X''_i}{dt^2} + p_1^2 X''_i = l''_i f$$

contient le déplacement électrique et nous sommes à l'abri de l'objection que je faisais tout à l'heure.

On voit qu'il est à la rigueur possible de rendre compte du quadruplet de Cornu par la théorie de Lorentz généralisée. Je laisse de côté les cas plus compliqués où l'on aurait des sextuplets ou des phénomènes encore plus complexes.

L'introduction de coordonnées scalaires ne doit pas nous étonner ; supposons, par exemple, une sphère pulsante de Bjerknes, susceptible en outre d'un mouvement de translation ; la situation du système sera définie par quatre coor-

données, le rayon de la sphère qui sera une coordonnée scalaire et les coordonnées cartésiennes du centre de la sphère qui seront des coordonnées vectorielles.

Quoique le caractère artificiel de toutes ces hypothèses soit manifeste, il convient donc de conserver provisoirement la théorie de Lorentz généralisée qui seule jusqu'à présent permet de relier entre eux les faits observés.

LE PHÉNOMÈNE DE HALL

ET

LA THÉORIE DE LORENTZ

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 128, p. 339-341 (6 février 1899).

On sait que M. Lorentz a imaginé une théorie de l'électricité où le rôle essentiel est joué par des particules chargées appelées *ions* ou *électrons*, qui sont censées parcourir librement les conducteurs. Je voudrais faire quelques réflexions au sujet de la façon dont s'explique dans cette théorie le phénomène de Hall.

Soient e la charge électrique d'une particule; ξ, η, ζ les composantes de sa vitesse; f, g, h celles du déplacement électrique; α, β, γ celles de la force magnétique, k_0 l'inverse du carré de la vitesse de la lumière; l'action du champ sur la particule projetée sur l'axe des x sera, d'après la théorie de Lorentz,

$$\frac{4\pi e f}{k_0} + e(\eta\gamma - \zeta\beta).$$

D'autre part, le frottement subi par la particule aura pour composantes

$$-\frac{\xi}{\lambda}, \quad -\frac{\eta}{\lambda}, \quad -\frac{\zeta}{\lambda},$$

λ étant un certain coefficient, d'où l'équation

$$(1) \qquad \xi = e\lambda\frac{4\pi f}{k_0} + e\lambda(\eta\gamma - \zeta\beta).$$

Soit $D\tau$ un petit élément de volume du conducteur; les composantes du courant

seront

$$p = \frac{\Sigma e \xi}{D\tau}, \qquad q = \frac{\Sigma e \eta}{D\tau}, \qquad r = \frac{\Sigma e \zeta}{D\tau},$$

en étendant la sommation à toutes les particules contenues dans l'élément $D\tau$. On trouve ainsi

(2) $$p = \sum \frac{e^2\lambda}{D\tau}\frac{4\pi f}{k_0} + \gamma \sum \frac{e^2\lambda\eta}{D\tau} - \beta \sum \frac{e^2\lambda\zeta}{D\tau};$$

comme $e\lambda$ est très petit, on a, en première approximation, $\xi = \eta = \zeta = 0$; en seconde approximation, (1) et (2) nous donnent

(3) $$\xi = e\lambda \frac{4\pi f}{k_0}, \qquad p = \sum \frac{e^2\lambda}{D\tau}\frac{4\pi f}{k_0},$$

Dans la seconde équation (3), le premier facteur du second membre $\sum \frac{e^2\lambda}{D\tau}$ représente la conductibilité spécifique; nous poserons donc

$$\sum \frac{e^2\lambda}{D\tau} = C;$$

le second facteur représente la force électromotrice; on a donc

$$\xi = \frac{e\lambda}{C} p,$$

et, de même,

$$\eta = \frac{e\lambda}{C} q, \qquad \zeta = \frac{e\lambda}{C} r.$$

L'équation (2) donne alors

$$p = C\frac{4\pi f}{k_0} + \frac{\Sigma e^3\lambda^2}{D\tau}(q\gamma - r\beta),$$

ou

$$p = C\left[\frac{4\pi f}{k_0} + \frac{\Sigma e^3\lambda^2}{CD\tau}(q\gamma - r\beta)\right].$$

Généralement, $\Sigma e^3\lambda^2$ est négligeable et il reste simplement

$$p = C\frac{4\pi f}{k_0}.$$

Si, au contraire, $\Sigma e^3\lambda^2$ n'est pas négligeable, à la force électromotrice $\frac{4\pi f}{k_0}$ vient s'ajouter une force électromotrice supplémentaire

$$\frac{\Sigma e^3\lambda^2}{CD\tau}(q\gamma - r\beta).$$

C'est la force électromotrice de Hall.

Mais voici la réflexion à laquelle je voulais en venir. Il y a d'autant plus de chance que Σe^3 soit grand que Σe sera lui-même plus grand, c'est-à-dire que le conducteur sera fortement chargé.

On serait conduit à rechercher si le phénomène de Hall n'existe pas pour tous les métaux quand ils portent une forte charge et s'il ne change pas de signe avec cette charge, quand cette charge est très forte.

L'expérience serait intéressante; elle ne saurait toutefois être décisive; si elle réussissait, en effet, le succès pourrait s'expliquer d'une foule de manières; en dehors de la théorie de Lorentz. Si, d'autre part, elle échouait, ce ne serait pas un argument irréfutable contre cette théorie, puisque nous ne pouvons *a priori* nous faire aucune idée de l'ordre de grandeur du phénomène.

LA THÉORIE DE LORENTZ

ET

LE PRINCIPE DE RÉACTION

Recueil de Travaux offerts par les Auteurs à H. A. Lorentz, professeur de Physique à l'Université de Leiden à l'occasion du 25e anniversaire de son Doctorat, le 11 décembre 1900.

Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, 2e série, t. 5, p. 252-278 (1900).

On trouvera sans doute étrange que dans un monument élevé à la gloire de Lorentz je revienne sur des considérations que j'ai présentées autrefois comme une objection à sa théorie. Je pourrais dire que les pages qui vont suivre sont plutôt de nature à atténuer qu'à aggraver cette objection.

Mais je dédaigne cette excuse parce que j'en ai une cent fois meilleure, *Les bonnes théories sont souples.* Celles qui ont une forme rigide et qui ne peuvent la dépouiller sans s'effondrer ont vraiment trop peu de vitalité. Mais si une théorie nous révèle certains rapports vrais, elle peut s'habiller de mille formes diverses, elle résistera à tous les assauts et ce qui fait son essence ne changera pas. C'est ce que j'ai expliqué dans la conférence que j'ai faite dernièrement au Congrès de Physique.

Les bonnes théories ont raison de toutes les objections; celles qui ne sont que spécieuses ne mordent pas sur elles, et elles triomphent même des objections sérieuses, mais elles en triomphent en se transformant.

Les objections les servent donc, loin de leur nuire, puisqu'elles leur permettent de développer toute la vertu latente qui était en elles. Eh bien la théorie de Lorentz est de celles-là, et c'est là la seule excuse que je veuille invoquer.

Ce n'est donc pas de cela que je demanderai pardon au lecteur, mais d'avoir exposé si longuement des idées si peu nouvelles.

1. Rappelons d'abord rapidement le calcul par lequel on établit que dans la théorie de Lorentz le principe de l'égalité de l'action et de la réaction n'est plus vrai, du moins quand on veut l'appliquer à la matière seule.

Cherchons la résultante de toutes les forces pondéromotrices appliquées à tous les électrons situés à l'intérieur d'un certain volume. Cette résultante ou plutôt sa projection sur l'axe des x est représentée par l'intégrale :

$$X = \int \rho\, d\tau \left[\eta\gamma - \zeta\beta + \frac{4\pi f}{K_0} \right],$$

où l'intégration est étendue à tous les éléments $d\tau$ du volume considéré, et où ξ, η, ζ représentent les composantes de la vitesse de l'électron.

A cause des équations :

$$\rho\eta = -\frac{dg}{dt} + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right), \qquad \rho\zeta = -\frac{dh}{dt} + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right),$$

$$\rho = \sum \frac{df}{dx}$$

et en ajoutant et retranchant le terme $\frac{\alpha}{4\pi}\frac{d\alpha}{dx}$, je puis écrire :

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4,$$

où :

$$X_1 = \int d\tau \left(\beta \frac{dh}{dt} - \gamma \frac{dg}{dt} \right),$$

$$X_2 = \int \frac{d\tau}{4\pi} \left(\alpha \frac{d\alpha}{dx} + \beta \frac{d\alpha}{dy} + \gamma \frac{d\alpha}{dz} \right),$$

$$X_3 = \int \frac{-d\tau}{4\pi} \left(\alpha \frac{d\alpha}{dx} + \beta \frac{d\beta}{dx} + \gamma \frac{d\gamma}{dx} \right),$$

$$X_4 = \frac{4\pi}{K_0} \int f\, d\tau \sum \frac{df}{dx}.$$

L'intégration par parties donne :

$$X_2 = \int \frac{d\omega}{4\pi} \alpha(l\alpha + m\beta + n\gamma) - \int \frac{d\tau}{4\pi} \alpha \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right),$$

$$X_3 = -\int \frac{d\omega}{8\pi} l(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

où les intégrales doubles sont étendues à tous les éléments $d\omega$ de la surface qui limite le volume considéré, et où l, m, n désignent les cosinus directeurs de la normale à cet élément.

Si l'on observe que

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0,$$

on voit que l'on peut écrire :

(1) $$X_2 + X_3 = \int \frac{d\omega}{8\pi} [l(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) + 2m\alpha\beta + 2n\alpha\gamma].$$

Transformons maintenant X_4.

L'intégration par parties donne :

$$X_4 = \int \frac{4\pi\, d\omega}{K_0}(lf^2 + mfg + nfh) - \int \frac{4\pi\, d\tau}{K_0}\left(f\frac{df}{dx} + g\frac{df}{dy} + h\frac{df}{dz}\right).$$

J'appelle X_4' et X_4'' les deux intégrales du second membre de sorte que

$$X_4 = X_4' - X_4''.$$

Si l'on tient compte des équations :

$$\frac{df}{dy} = \frac{dg}{dx} + \frac{K_0}{4\pi}\frac{d\gamma}{dt},$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{dh}{dx} - \frac{K_0}{4\pi}\frac{d\beta}{dt},$$

nous pouvons écrire :

$$X_4'' = Y + Z,$$

où

$$Y = \int \frac{4\pi\, d\tau}{K_0}\left(f\frac{df}{dx} + g\frac{dg}{dx} + h\frac{dh}{dx}\right),$$

$$Z = \int d\tau\left(g\frac{d\gamma}{dt} - h\frac{d\beta}{dt}\right).$$

On trouve ensuite :

$$Y = \int \frac{2\pi l\, d\omega}{K_0}(f^2 + g^2 + h^2),$$

$$X_1 - Z = \frac{d}{dt}\int d\tau(\beta h - \gamma g).$$

On a donc enfin :

(2) $$X = \frac{d}{dt}\int d\tau(\beta h - \gamma g) + (X_2 + X_3) + (X_4' - Y),$$

où $X_2 + X_3$ est donné par la formule (1), tandis que l'on a :

$$X_4' - Y = \int \frac{2\pi\, d\omega}{K_0}[l(f^2 - g^2 - h^2) + 2mfg + 2nfh].$$

Ce terme $(X_2 + X_3)$ représente la projection sur l'axe des x d'une pression s'exerçant sur les différents éléments $d\omega$ de la surface qui limite le volume considéré. On reconnaît tout de suite que cette pression n'est autre chose que

la *pression magnétique de* Maxwell, introduite par ce savant dans une théorie bien connue.

De même, le terme $(X'_1 - Y)$ représente l'effet de la *pression électrostatique de* Maxwell.

Sans la présence du premier terme :

$$\frac{d}{dt}\int d\tau(\beta h - \gamma g),$$

la force pondéromotrice ne serait donc pas autre chose que celle qui résulte des pressions de Maxwell.

Si nos intégrales sont étendues à tout l'espace, les intégrales doubles X_2, X_3, X'_1 et Y disparaissent et il reste simplement :

$$X = \frac{d}{dt}\int d\tau(\beta h - \gamma g).$$

Si donc on appelle M une des masses matérielles envisagées, V_x, V_y, V_z les composantes de sa vitesse, on devrait avoir si le principe de réaction était applicable :

$$\Sigma M V_x = \text{const.}, \qquad \Sigma M V_y = \text{const.}, \qquad \Sigma M V_z = \text{const.}$$

On aura au contraire :

$$\Sigma M V_x + \int d\tau(\gamma g - \beta h) = \text{const.},$$

$$\Sigma M V_y + \int d\tau(\alpha h - \gamma f) = \text{const.},$$

$$\Sigma M V_z + \int d\tau(\beta f - \alpha g) = \text{const.}$$

Remarquons que

$$\gamma g - \beta h, \quad \alpha h - \gamma f, \quad \beta f - \alpha g$$

sont les trois composantes du *vecteur radiant* de Poynting.

Si l'on pose :

$$J = \frac{1}{8\pi}\Sigma\alpha^2 + \frac{2\pi}{K_0}\Sigma f^2,$$

l'équation de Poynting nous donne en effet :

$$(3) \qquad \int \frac{dJ}{dt}d\tau - \int \frac{d\omega}{K_0}\begin{vmatrix} l & m & n \\ \alpha & \beta & \gamma \\ f & g & h \end{vmatrix} + \frac{4\pi}{K_0}\int \rho\, d\tau\, \Sigma f\xi$$

La première intégrale du second membre représente, comme on le sait, la quantité d'énergie électromagnétique qui entre dans le volume considéré par radiation à travers sa surface et le second terme représente la quantité d'énergie électromagnétique qui est créée à l'intérieur du volume par transformation d'énergie d'autres espèces.

Nous pouvons regarder l'énergie électromagnétique comme un fluide fictif dont la densité est $K_0 J$ et qui se déplace dans l'espace conformément aux lois de Poynting. Seulement il faut admettre que ce fluide n'est pas indestructible et que dans l'élément de volume $d\tau$ il s'en détruit pendant l'unité de temps une quantité $\frac{4\pi}{K_0}\rho\, d\tau \Sigma f \xi$ (ou qu'il s'en crée une quantité égale et de signe contraire, si cette expression est négative); c'est ce qui empêche que nous puissions assimiler tout à fait dans nos raisonnements notre fluide fictif à un fluide réel.

La quantité de ce fluide qui passe pendant l'unité de temps à travers une surface, égale à 1 et orientée perpendiculairement à l'axe des x, ou l'axe des y, ou à l'axe des z, est égale à :

$$K_0 J U_x, \qquad K_0 J U_y, \qquad K_0 J U_z,$$

U_x, U_y, U_z étant les composantes de la vitesse du fluide. En comparant avec la formule de Poynting, on trouve :

$$K_0 J U_x = \gamma g - \beta h,$$
$$K_0 J U_y = \alpha h - \gamma f,$$
$$K_0 J U_z = \beta f - \alpha g,$$

de sorte que nos formules deviennent :

$$(4) \qquad \begin{cases} \Sigma M V_x + \int K_0 J U_x d\tau = \text{const.}, \\ \Sigma M V_y + \int K_0 J U_y d\tau = \text{const.}, \\ \Sigma M V_z + \int K_0 J U_z d\tau = \text{const.} \end{cases}$$

Elles expriment que la quantité de mouvement de la matière proprement dite plus celle de notre fluide fictif est représentée par un vecteur constant.

Dans la Mécanique ordinaire, de la constance de la quantité de mouvement on conclut que le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme.

Mais ici nous n'avons pas le droit de conclure que le centre de gravité du

système formé par la matière et notre fluide fictif a un mouvement rectiligne et uniforme; et cela parce que ce fluide n'est pas indestructible.

La position du centre de gravité du fluide fictif dépend de l'intégrale

$$\int x J \, d\tau$$

étendue à tout l'espace. La dérivée de cette intégrale est :

$$\int x \frac{dJ}{dt} d\tau = -\int x \, d\tau \left(\frac{dJU_x}{dx} + \frac{dJU_y}{dy} + \frac{dJU_z}{dz} \right) - \frac{4\pi}{K_0} \int \rho x \, d\tau \Sigma f \xi.$$

Or la première intégrale du second membre devient par l'intégration par parties :

$$\int J U_x \, d\tau \quad \text{ou} \quad \frac{1}{K_0}(C - \Sigma M V_x),$$

en désignant par C la constante du second membre de la première équation (4).

Représentons alors par M_0 la masse totale de la matière, par X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées de son centre de gravité, par M_1 la masse totale du fluide fictif, par X_1, Y_1, Z_1 son centre de gravité, par M_2 la masse totale du système (matière plus fluide fictif), par X_2, Y_2, Z_2 son centre de gravité, de telle façon que l'on ait :

$$M_2 = M_0 + M_1, \qquad M_2 X_2 = M_0 X_0 + M_1 X_1,$$

$$\frac{d}{dt}(M_0 X_0) = \Sigma M V_x, \qquad K_0 \int x J \, d\tau = M_1 X_1.$$

Il vient alors :

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}(M_2 X_2) = C - 4\pi \int \rho x \, d\tau \Sigma f \xi.$$

Voici comment on pourrait énoncer l'équation (3) dans le langage ordinaire.

S'il n'y a nulle part création ou destruction d'énergie électromagnétique, le dernier terme disparaît; alors le centre de gravité du système formé par la matière et par l'énergie électromagnétique (regardée comme un fluide fictif) a un mouvement rectiligne et uniforme.

Supposons maintenant qu'il y ait en certains points destruction de l'énergie électromagnétique qui s'y transforme en énergie non électrique. Il faudra alors considérer le système formé non seulement par la matière et l'énergie électro-

magnétique, mais par l'énergie non électrique provenant de la transformation de l'énergie électromagnétique.

Mais il faut convenir que cette énergie non électrique reste au point où s'est opérée la transformation et n'est pas ensuite entraînée par la matière où on la localise d'ordinaire. Il n'y a dans cette convention rien qui doive nous choquer puisqu'il ne s'agit que d'une fiction mathématique. Si l'on adopte cette convention, le mouvement du centre de gravité du système est encore rectiligne et uniforme.

Pour étendre l'énoncé au cas où il y a non seulement destruction, mais création d'énergie, il suffit de supposer en chaque point une certaine provision d'énergie non électrique, aux dépens de laquelle se forme l'énergie électromagnétique. On conservera alors la convention précédente, c'est-à-dire qu'au lieu de localiser l'énergie non électrique comme on le fait d'ordinaire, on la regardera comme immobile. A cette condition, le centre de gravité se mouvra encore en ligne droite.

Reprenons maintenant l'équation (2) en supposant les intégrales étendues à un volume même infiniment petit. Elle signifiera alors que la résultante des pressions de Maxwell qui s'exercent sur la surface de ce volume fait équilibre :

1° Aux forces d'origine non électrique appliquées à la matière qui est située dans ce volume;

2° Aux forces d'inertie de cette matière;

3° Aux forces d'inertie du fluide fictif renfermé dans ce volume.

Pour définir cette inertie du fluide fictif, il faut convenir que le fluide qui se crée en un point quelconque par transformation de l'énergie, naît d'abord sans vitesse et qu'il emprunte sa vitesse au fluide déjà existant; si donc la quantité de fluide augmente, mais que la vitesse reste constante, on aura néanmoins une certaine inertie à vaincre parce que le fluide nouveau empruntant de la vitesse au fluide ancien, la vitesse de l'ensemble diminuerait si une cause quelconque n'intervenait pour la maintenir constante. De même lorsqu'il y a destruction d'énergie électromagnétique, il faut que le fluide avant de se détruire, perde sa vitesse en la cédant au fluide subsistant.

L'équilibre ayant lieu pour un volume infiniment petit, aura lieu pour un volume fini. Si, en effet, nous le décomposons en volumes infiniment petits, l'équilibre a lieu pour chacun d'eux. Pour passer au volume fini, il faut considérer l'ensemble des forces appliquées aux différents volumes infiniment

petits; seulement parmi les pressions de Maxwell on ne conservera que celles qui s'exercent sur la surface du volume fini total, mais on supprimera celles qui s'exercent sur les éléments de surface qui séparent l'un de l'autre deux volumes infiniment petits contigus. Cette suppression ne changera rien à l'équilibre, puisque les pressions ainsi supprimées sont deux à deux égales et directement opposées.

L'équilibre aura donc encore lieu pour le volume fini.

Il aura donc lieu pour l'espace tout entier. Mais dans ce cas, on n'a à envisager ni les pressions de Maxwell qui sont nulles à l'infini, ni les forces d'origine non électrique qui se font équilibre en vertu du principe de réaction applicable aux forces envisagées dans la Mécanique ordinaire.

Les deux sortes de forces d'inertie se font donc équilibre, d'où une double conséquence :

1° Le principe de la conservation des projections des quantités de mouvement s'applique au système de la matière et du fluide fictif; on retrouve aussi les équations (4);

2° Le principe de la conservation des moments des quantités de mouvements ou, en d'autres termes, *le principe des aires* s'applique au système de la matière et du fluide fictif. C'est là une conséquence nouvelle qui complète les données fournies par les équations (4).

L'énergie électromagnétique se comportant donc au point de vue qui nous occupe comme un fluide doué d'inertie, on doit conclure que si un appareil quelconque après avoir produit de l'énergie électromagnétique, l'envoie par rayonnement dans une certaine direction, cet appareil devra *reculer* comme recule un canon qui a lancé un projectile.

Bien entendu, ce recul ne se produira pas si l'appareil producteur envoie également de l'énergie dans tous les sens; il se produira au contraire si cette symétrie n'existe pas, et si l'énergie électromagnétique produite est renvoyée dans une direction unique, ainsi que cela arrive par exemple si l'appareil est un excitateur de Hertz placé au foyer d'un miroir parabolique.

Il est facile d'évaluer en chiffres l'importance de ce recul. Si l'appareil a une masse de 1 kg et s'il a envoyé dans une direction unique avec la vitesse de la lumière trois millions de joules, la vitesse due au recul est de 1 cm/s. En d'autres termes, si l'énergie produite par une machine de 3 000 W est envoyée

dans une seule direction, il faudra pour maintenir la machine en place, malgré le recul, une force d'une dyne.

Il est évident qu'une force aussi faible ne pourrait pas être décelée par l'expérience. Mais on pourrait s'imaginer que si, par impossible, on disposait d'appareils de mesure assez sensibles pour la mettre en évidence, on aurait ainsi démontré que le principe de réaction n'est pas applicable à la matière seule; et que ce serait la confirmation de la théorie de Lorentz et la condamnation des autres théories.

Il n'en est rien, la théorie de Hertz et, en général, toutes les autres théories prévoient le même recul que celle de Lorentz.

J'ai pris tout à l'heure l'exemple d'un excitateur de Hertz dont les radiations seraient rendues parallèles par un miroir parabolique. J'aurais pu prendre un exemple plus simple emprunté à l'optique; un faisceau de rayons lumineux parallèles vient frapper normalement un miroir et après réflexion revient en sens inverse. De l'énergie se propageant d'abord de gauche à droite, par exemple, est renvoyée ensuite de droite à gauche par le miroir.

Le miroir doit donc *reculer* et le recul est aisé à calculer par les considérations qui précèdent.

Or il est aisé de reconnaître le problème qui a déjà été traité par Maxwell aux paragraphes **792** et **793** de son Ouvrage. Il prévoit aussi un recul du miroir tout pareil à celui que nous avons déduit de la théorie de Lorentz.

Si, en effet, nous pénétrons plus avant dans l'étude du mécanisme de ce recul, voici ce que nous trouvons. Considérons un volume quelconque et appliquons-lui l'équation (2); cette équation nous apprend que la force d'origine électromagnétique qui s'exerce sur les électrons, c'est-à-dire sur la matière contenue dans le volume est égale à la résultante des pressions de Maxwell augmentée d'un terme correctif qui est la dérivée de l'intégrale

$$\int d\tau(\beta h - \gamma g).$$

Si le régime est établi, cette intégrale est constante et le terme correctif est nul.

Le recul prévu par la théorie de Lorentz est celui qui est dû aux pressions de Maxwell. Or toutes les théories prévoient les pressions de Maxwell; *donc toutes les théories prévoient le même recul.*

2. Mais alors une question se pose. Nous avons prévu le recul dans la théorie de Lorentz parce que cette théorie est contraire au principe de réaction. Or parmi les autres théories, il y en a, comme celle de Hertz, qui sont conformes à ce principe. Comment se fait-il qu'elles aussi conduisent au même recul ?

Je me hâte de donner l'explication de ce paradoxe, quitte à justifier ensuite cette explication. Dans la théorie de Lorentz et dans celle de Hertz l'appareil qui produit de l'énergie et l'envoie dans une direction recule, mais cette énergie ainsi rayonnée se propage en traversant un certain milieu, de l'air par exemple.

Dans la théorie de Lorentz, lorsque l'air reçoit l'énergie ainsi rayonnée, il ne subit aucune action mécanique; il n'en subit pas non plus lorsque cette énergie le quitte après l'avoir traversé. Au contraire, dans la théorie de Hertz, lorsque l'air reçoit l'énergie, il est poussé en avant et il recule au contraire quand cette énergie le quitte. Les mouvements de l'air traversé par l'énergie compensent ainsi au point de vue du principe de réaction, ceux des appareils qui ont produit cette énergie. Dans la théorie de Lorentz, cette compensation ne se fait pas.

Revenons en effet à la théorie de Lorentz et à notre équation (2) et appliquons-la à un diélectrique homogène. On sait comment Lorentz se représente un milieu diélectrique; ce milieu renfermerait des électrons susceptibles de petits déplacements, et ces déplacements produiraient la polarisation diélectrique dont l'effet viendrait s'ajouter, à certains points de vue, à celui du déplacement électrique proprement dit.

Soient X, Y, Z les composantes de cette polarisation. On aura :

$$(5)\qquad \frac{dX}{dt}d\tau = \Sigma\rho\xi,\qquad \frac{dY}{dt}d\tau = \Sigma\rho\eta,\qquad \frac{dZ}{dt}d\tau = \Sigma\rho\zeta.$$

Les sommations des seconds membres sont étendues à tous les électrons contenus à l'intérieur de l'élément $d\tau$ et ces équations peuvent être regardées comme la définition même de la polarisation diélectrique.

Pour l'expression de la résultante des forces pondéromotrices (que je ne désigne plus par X afin d'éviter toute confusion avec la polarisation), nous avons trouvé l'intégrale :

$$\int \rho\, d\tau \left[\eta\gamma - \zeta\beta + \frac{4\pi f}{K_0}\right]$$

ou

$$\int \rho\eta\gamma\, d\tau - \int \rho\zeta\beta\, d\tau + \frac{4\pi}{K_0} \int \rho f\, d\tau.$$

Les deux premières intégrales peuvent être remplacées par

$$\int \gamma \frac{dX}{dt}\, d\tau, \quad \int \beta \frac{dZ}{dt}\, d\tau$$

en vertu des équations (5). Quant à la troisième, elle est nulle, parce que la charge totale d'un élément de diélectrique contenant un certain nombre d'électrons est nulle. Notre force pondéromotrice se réduit donc à :

$$\int \left(\gamma \frac{dX}{dt} - \beta \frac{dZ}{dt} \right) d\tau.$$

Si je désigne alors par H la force due aux diverses pressions de Maxwell, de sorte que

$$H = (X_2 + X_3) + (Y'_1 - Y_1),$$

alors notre équation (2) devient :

$$(2\ bis) \qquad H = \int \left(\gamma \frac{dX}{dt} - \beta \frac{dZ}{dt} \right) d\tau + \frac{d}{dt} \int (\gamma g - \beta h)\, d\tau.$$

On a d'ailleurs une relation telle que celle-ci

$$(A) \qquad a \frac{d^2X}{dt^2} + bX = f,$$

où a et b sont deux constantes caractéristiques du milieu; on en déduit aisément :

$$(B) \qquad X = (n^2 - 1) f$$

et, de même,

$$Y = (n^2 - 1) g, \qquad Z = (n^2 - 1) h,$$

n étant l'indice de réfraction de la couleur considérée.

On peut être conduit à remplacer la relation (A) par d'autres plus compliquées; par exemple, si l'on doit supposer des ions complexes. Peu importe, puisqu'on serait toujours conduit à l'équation (B).

Pour aller plus loin, nous allons supposer une onde plane se propageant dans le sens de l'axe des x vers les x positifs, par exemple. Si l'onde est polarisée dans le plan des xz, on aura

$$X = f = \alpha = Z = h = \beta = 0$$

et

$$\gamma = ng\,\frac{4\pi}{\sqrt{K_0}}.$$

En tenant compte de toutes ces relations, (2 *bis*) devient d'abord

$$H = \int \gamma\,\frac{dY}{dt}\,d\tau + \int \gamma\,\frac{dg}{dt}\,d\tau + \int g\,\frac{d\gamma}{dt}\,d\tau,$$

où la première intégrale représente la force pondéromotrice. Mais si l'on tient compte des proportions

$$\frac{g}{1} = \frac{Y}{n^2-1} = \frac{\gamma}{n\left(\dfrac{4\pi}{\sqrt{K_0}}\right)},$$

notre equation devient

$$(6)\qquad \frac{\sqrt{K_0}}{4\pi}H = n(n^2-1)\int g\,\frac{dg}{dt}\,d\tau + n\int g\,\frac{dg}{dt}\,d\tau + n\int g\,\frac{dg}{dt}\,d\tau.$$

Mais pour tirer quelque chose de cette formule, il importe de bien voir comment se partage et se propage l'énergie dans un milieu diélectrique. L'énergie se divise en trois parties : 1° l'énergie électrique; 2° l'énergie magnétique; 3° l'énergie mécanique due au mouvement des ions. Ces trois parties ont respectivement pour expressions

$$\frac{2\pi}{K_0}\Sigma f^2,\quad \frac{1}{8\pi}\Sigma\alpha^2,\quad \frac{2\pi}{K_0}\Sigma f X$$

et dans les cas d'une onde plane, elles sont entre elles comme

$$1,\quad n^2,\quad n^2-1.$$

Dans l'analyse qui précède, nous avons fait jouer un rôle à ce que nous avons appelé la quantité de mouvement de l'énergie électromagnétique. Il est clair que la densité de notre fluide fictif sera proportionnelle à la somme des deux premières parties (électrique et magnétique) de l'énergie totale et que la troisième partie, qui est purement mécanique devra être laissée de côté. Mais quelle vitesse convient-il d'attribuer à ce fluide ? Au premier abord, on pourrait croire que c'est la vitesse de propagation de l'onde, c'est-à-dire $\frac{1}{n\sqrt{K_0}}$. Mais ce n'est pas aussi simple. En chaque point il y a proportionnalité entre l'énergie électromagnétique et l'énergie mécanique; si donc en un point l'énergie électromagnétique vient à diminuer, l'énergie mécanique diminuera également,

c'est-à-dire qu'elle se transformera partiellement en énergie électromagnétique; il y aura donc création de fluide fictif.

Désignons pour un instant par ρ la densité du fluide fictif, par ξ sa vitesse que je suppose parallèle à l'axe des x; je suppose que toutes nos fonctions ne dépendent que de x et de t, le plan de l'onde étant perpendiculaire à l'axe des x. L'équation de continuité s'écrit alors :

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho\xi}{dx} = \frac{\delta\rho}{dt},$$

$\delta\rho$ étant la quantité de fluide fictif créé pendant le temps dt. Or cette quantité est égale à la quantité d'énergie mécanique détruite, laquelle est à la quantité d'énergie électromagnétique détruite, c'est-à-dire à $-d\rho$, comme n^2-1 est à n^2+1; d'où

$$\frac{\delta\rho}{n^2-1} = -\frac{d\rho}{n^2+1},$$

de sorte que notre équation devient

$$\frac{d\rho}{dt}\frac{2n^2}{n^2+1} + \frac{d\rho\xi}{dx} = 0.$$

Si ξ est une constante, cette équation nous montre que la vitesse de propagation est égale à

$$\xi\frac{n^2+1}{2n^2}.$$

Si la vitesse de propagation est $\frac{1}{n\sqrt{K_0}}$, on aura donc

$$\xi = \frac{2n}{(n^2+1)\sqrt{K_0}}.$$

Si l'énergie totale est J', l'énergie électromagnétique sera $J = \frac{n^2+1}{2n^2}J'$ et la quantité de mouvement du fluide fictif sera :

$$(7)\qquad K_0 J\xi = K_0\frac{n^2+1}{2n^2}J'\xi = \frac{J'\sqrt{K_0}}{n}$$

puisque la densité du fluide fictif est égale à l'énergie multipliée par K_0.

Or dans l'équation (6) le premier terme du second membre représente la force pondéromotrice, c'est-à-dire la dérivée de la quantité de mouvement de la matière du diélectrique, pendant que les deux derniers termes représentent

la dérivée de la quantité de mouvement du fluide fictif. Ces deux quantités de mouvement sont donc entre elles comme $n^2 - 1$ et 2.

Soit alors Δ la densité de la matière du diélectrique, W_x, W_y, W_z les composantes de sa vitesse. Reprenons les équations (4). Le premier terme ΣMV_x représente la quantité de mouvement de toute la matière réelle; nous le décomposerons en deux parties. La première partie que nous continuerons à désigner par ΣMV_x représentera la quantité de mouvement des appareils producteurs d'énergie; la seconde partie représentera la quantité de mouvement des diélectriques; elle sera égale à

$$\int \Delta . W_x \, d\tau,$$

de sorte que l'équation (4) deviendra

$$(4 \textit{ bis}) \qquad \Sigma MV_x + \int (\Delta . W_x + K_0 JU_x) \, d\tau = \text{const.}$$

D'après ce que nous venons de voir, on aura

$$\frac{\Delta . W_x}{n^2 - 1} = \frac{K_0 JU_x}{2}.$$

D'ailleurs, désignons par J' comme plus haut l'énergie totale; distinguons, d'autre part, la vitesse réelle du fluide fictif, c'est-à-dire celle qui résulte de la loi de Poynting et que nous avons désignée par U_x, U_y, U_z, et la vitesse apparente de l'énergie, c'est-à-dire celle que l'on déduirait de la vitesse de propagation des ondes et que nous désignerons par U'_x, U'_y, U'_z. Il résulte de l'équation (7) que :

$$J U_x = J' U'_x.$$

On peut donc écrire l'équation (4 *bis*) sous la forme :

$$\Sigma MV_x + \int (\Delta . W_x + K_0 J' U'_x) \, d\tau = \text{const.}$$

L'équation (4 *bis*) montre ce qui suit : si un appareil rayonne de l'énergie dans une direction unique *dans le vide*, il subit un recul qui est compensé uniquement au point de vue du principe de réaction par le mouvement du fluide fictif.

Mais si le rayonnement au lieu de se faire dans le vide, se fait dans un diélectrique, ce recul sera compensé en partie par le mouvement du fluide

fictif, en partie par le mouvement de la matière du diélectrique et la fraction du recul de l'appareil producteur qui sera ainsi compensée par le mouvement du diélectrique, c'est-à-dire par le mouvement d'une véritable matière, cette fraction, dis-je, sera $\frac{n^2-1}{n^2+1}$.

Voilà ce qui résulte de la théorie de Lorentz; comment passerons-nous maintenant à la théorie de Hertz.

On sait, en quoi consistaient les idées de Mossotti sur la constitution des diélectriques.

Les diélectriques autres que le vide étaient formés de petites sphères conductrices (ou plus généralement de petits corps conducteurs) séparés les uns des autres par un milieu isolant impolarisable analogue au vide. Comment est-on passé de là aux idées de Maxwell ? On a imaginé que le vide lui-même avait la même constitution; il n'était pas impolarisable, mais formé de cellules conductrices, séparées par des cloisons formées d'une matière idéale, isolante et impolarisable. Le pouvoir inducteur spécifique du vide était donc plus grand que celui de la matière idéale impolarisable (de même que dans la conception primitive de Mossotti, le pouvoir inducteur des diélectriques était plus grand que celui du vide, et pour la même raison). Et le rapport du premier de ces pouvoirs au second était d'autant plus grand que l'espace occupé par les cellules conductrices était plus grand par rapport à l'espace occupé par les cloisons isolantes.

Passons enfin à la limite en regardant le pouvoir inducteur de la matière isolante comme infiniment petit, et en même temps les cloisons isolantes comme infiniment minces, de telle façon que l'espace occupé par ces cloisons étant infiniment petit, le pouvoir inducteur du vide reste fini. *Ce passage à la limite nous conduit à la théorie de* Maxwell.

Tout cela est bien connu et je me borne à le rappeler rapidement. Eh bien, *il y a entre la théorie de* Lorentz *et celle de* Hertz *la même relation qu'entre celle de* Mossotti *et celle de* Maxwell.

Supposons, en effet, que nous attribuions au vide la même constitution que Lorentz attribue aux diélectriques ordinaires; c'est-à-dire que nous le considérions comme un milieu impolarisable dans lequel des électrons peuvent subir de petits déplacements.

Les formules de Lorentz seront encore applicables, *seulement* K_0 *ne représentera plus le pouvoir inducteur du vide, mais celui de notre milieu*

impolarisable idéal. Passons à la limite en supposant K_0 infiniment petit; il faudra bien entendu pour compenser cette hypothèse, multiplier le nombre des électrons de façon que les pouvoirs inducteurs du vide et des autres diélectriques restent finis.

La théorie où conduit ce passage à la limite n'est autre que celle de Hertz.

Soit V la vitesse de la lumière dans le vide. Dans la théorie de Lorentz primitive, elle est égale à $\frac{1}{\sqrt{K_0}}$; mais il n'en est plus de même dans la théorie modifiée, elle est égale à

$$\frac{1}{n_0\sqrt{K_0}}$$

n_0 étant l'indice de réfraction du vide par rapport au milieu idéal impolarisable. Si n désigne l'indice de réfraction d'un diélectrique par rapport au vide vulgaire, son indice par rapport à ce milieu idéal sera nn_0 et la vitesse de la lumière dans ce diélectrique sera

$$\frac{V}{n} = \frac{1}{nn_0\sqrt{K_0}}.$$

Dans les formules de Lorentz, il faut alors remplacer n par nn_0.

Par exemple, l'entraînement des ondes dans la théorie de Lorentz est représenté par la formule de Fresnel

$$v\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Dans la théorie modifiée, il serait

$$v\left(1-\frac{1}{n^2 n_0^2}\right).$$

Si nous passons à la limite, il faut faire $K_0 = 0$, d'où $n_0 = \infty$; donc dans la théorie de Hertz l'entraînement sera v, c'est-à-dire qu'il sera total. Cette conséquence, contraire à l'expérience de Fizeau, suffit pour condamner la théorie de Hertz, de sorte que ces considérations n'ont guère qu'un intérêt de curiosité.

Reprenons cependant notre équation (4 *bis*). Elle nous enseigne que la fraction du recul qui est compensée par le mouvement de la matière du diélectrique est égale à

$$\frac{n^2-1}{n^2+1},$$

Dans la théorie de Lorentz modifiée, cette fraction sera :

$$\frac{n^2 n_0^2 - 1}{n^2 n_0^2 + 1}.$$

Si nous passons à la limite en faisant $n_0 = \infty$, cette fraction est égale à 1, de sorte que le recul est *entièrement* compensé par le mouvement de la matière des diélectriques. En d'autres termes, dans la théorie de Hertz, le principe de réaction n'est pas violé et s'applique à la matière seule.

C'est ce qu'on verrait encore à l'aide de l'équation (4 *bis*); si à la limite K_0 est nul, le terme $\int K_0 J' U'_x d\tau$ qui représente la quantité de mouvement du fluide fictif devient nul aussi, de sorte qu'il suffit d'envisager la quantité de mouvement de la matière réelle.

D'où cette conséquence : *pour démontrer expérimentalement que le principe de réaction est bien violé dans la réalité comme il l'est dans la théorie de* Lorentz, *il ne suffisait pas de montrer que les appareils producteurs d'énergie subissent un recul*, ce qui serait déjà assez difficile, *il faudrait encore montrer que ce recul n'est pas compensé par les mouvements des diélectriques et en particulier de l'air traversés par les ondes électromagnétiques*. Cela serait évidemment beaucoup plus difficile encore.

Une dernière remarque sur ce sujet. Supposons que le milieu traversé par les ondes soit magnétique. Une partie de l'énergie ondulatoire se trouvera encore sous la forme mécanique. Si μ est la perméabilité magnétique du milieu, l'énergie magnétique *totale* sera :

$$\frac{\mu}{8\pi}\int \Sigma\alpha^2 \, d\tau,$$

mais une fraction seulement, à savoir :

$$\frac{1}{8\pi}\int \Sigma\alpha^2 \, d\tau$$

sera de l'énergie magnétique proprement dite ; l'autre partie :

$$\frac{\mu - 1}{8\pi}\int \Sigma\alpha^2 \, d\tau$$

sera de l'énergie *mécanique* employée à rapprocher les courants particulaires d'une orientation commune perpendiculaire au champ, à l'encontre de la force élastique qui tend à ramener ces courants à l'orientation d'équilibre qu'ils reprennent en l'absence de champ magnétique.

On pourrait alors appliquer à ces milieux une analyse, tout à fait pareille à celle qui précède, et où l'énergie mécanique $\frac{\mu-1}{8\pi}\int\Sigma\alpha^2 d\tau$, jouerait le même rôle que jouait l'énergie mécanique $\frac{2\pi}{K_0}\int\Sigma X f d\tau$ dans le cas des diélectriques. On reconnaîtrait ainsi que s'il existait des milieux magnétiques non diélectriques (je veux dire dont le pouvoir diélectrique serait le même que celui du vide), la matière de ces milieux subirait une action mécanique par suite du passage des ondes de telle sorte que le recul des appareils producteurs serait en partie compensé par les mouvements de ces milieux, comme il l'est par ceux des diélectriques.

Pour sortir de ce cas que la nature ne réalise pas, supposons un milieu à la fois diélectrique et magnétique, la fraction du recul compensée par le mouvement du milieu sera plus forte que pour un milieu non magnétique de même pouvoir diélectrique.

3. Pourquoi le principe de réaction s'impose-t-il à notre esprit? Il importe de s'en rendre compte, afin de voir si les paradoxes qui précèdent peuvent être réellement considérés comme une objection à la théorie de Lorentz.

Si ce principe, dans la plupart des cas, s'impose à nous, c'est que sa négation conduirait au mouvement perpétuel; en est-il de même ici?

Soient A et B deux corps quelconques, agissant l'un sur l'autre, mais soustraits à toute action extérieure; si l'action de l'un n'était pas égale à la réaction de l'autre, on pourrait les attacher l'un à l'autre par une tringle de longueur invariable de façon qu'ils se comportent comme *un seul* corps solide. Les forces appliquées à ce solide ne se faisant pas équilibre, le système se mettrait en mouvement et ce mouvement irait sans cesse en s'accélérant, *à une condition toutefois*, c'est que l'action mutuelle des deux corps ne dépende que de leur position *relative* et de leur vitesse *relative*, mais soit indépendante de leur position *absolue* et de leur vitesse *absolue*.

Plus généralement, soit un système conservatif quelconque, U son énergie potentielle, m la masse d'un des points du système, x', y', z' les composantes de sa vitesse, on aura l'équation des forces vives :

$$\Sigma\frac{m}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)+U=\text{const.}$$

Rapportons maintenant le système à des axes mobiles animés d'une vitesse

constante de translation v parallèle à l'axe des x : soient x', y', z' les composantes de la vitesse relative par rapport à ces axes, on aura :

$$x' = x'_1 + v, \qquad y' = y'_1, \qquad z' = z'_1,$$

et, par conséquent :

$$\Sigma \frac{m}{2}\left[(x'_1 + v)^2 + y'^2_1 + z'^2_1\right] + U = \text{const.}$$

En vertu du *principe du mouvement relatif*, U ne dépend que de la position *relative* des points du système, les lois du mouvement relatif ne diffèrent pas de celles du mouvement absolu et l'équation des forces vives dans le mouvement relatif s'écrit :

$$\Sigma \frac{m}{2}(x'^2_1 + y'^2_1 + z'^2_1) + U = \text{const.}$$

En retranchant les deux équations l'une de l'autre, on trouve

(8) $$v\,\Sigma m x'_1 + \frac{v^2}{2}\Sigma m = \text{const.}$$

ou

(9) $$\Sigma m x'_1 = \text{const.}$$

ce qui est l'expression analytique du principe de réaction.

Le principe de réaction nous apparaît donc comme une conséquence de celui de l'énergie et de celui du mouvement relatif. Ce dernier principe lui-même s'impose impérieusement à l'esprit, quand on l'applique à un système isolé.

Mais dans le cas qui nous occupe, il ne s'agit pas d'un système isolé, puisque nous ne considérons que la matière proprement dite, en dehors de laquelle il y a encore l'éther. Si tous les objets matériels sont entraînés dans une translation commune, comme par exemple dans la translation de la Terre, les phénomènes peuvent différer de ce qu'ils seraient si cette translation n'existait pas parce que l'éther peut ne pas être entraîné dans cette translation. Le principe du mouvement relatif ainsi entendu et appliqué à la matière seule s'impose si peu à l'esprit que l'on a institué des expériences pour mettre en évidence la translation de la Terre. Ces expériences, il est vrai, ont donné des résultats négatifs mais on s'en est plutôt étonné.

Toutefois une question se pose encore. Ces expériences, ai-je dit, ont donné un résultat négatif, et la théorie de Lorentz explique ce résultat négatif. Il

semble que le principe du mouvement relatif, qui ne s'imposait pas *a priori*, est vérifié *a posteriori* et que le principe de réaction devrait s'ensuivre; et cependant il n'en est pas ainsi, comment cela se fait-il?

C'est qu'en réalité, ce que nous avons appelé le principe du mouvement relatif n'a été vérifié qu'imparfaitement comme le montre la théorie de Lorentz. Elle est due à une compensation d'effets, mais :

1° Cette compensation n'a lieu qu'en négligeant v^2, à moins de faire une certaine hypothèse complémentaire que je ne discuterai pas pour le moment.

Cela toutefois n'a pas d'importance pour notre objet, car si l'on néglige v^2, l'équation (8) donnera directement l'équation (9), c'est-à-dire le principe de réaction.

2° Pour que la compensation se fasse, il faut rapporter les phénomènes, non pas au temps vrai t, mais à un certain *temps local* t' défini de la façon suivante.

Je suppose que des observateurs placés en différents points, règlent leurs montres à l'aide de signaux lumineux; qu'ils cherchent à corriger ces signaux du temps de la transmission, mais qu'ignorant le mouvement de translation dont ils sont animés et croyant par conséquent que les signaux se transmettent également vite dans les deux sens, ils se bornent à croiser les observations, en envoyant un signal de A en B, puis un autre de B en A. Le temps local t est le temps marqué par les montres ainsi réglées.

Si alors $V = \frac{1}{\sqrt{K_0}}$ est la vitesse de la lumière, et v la translation de la Terre que je suppose parallèle à l'axe des x positifs, on aura :

$$t' = t - \frac{vx}{V^2}.$$

3° L'énergie apparente se propage dans le mouvement relatif suivant les mêmes lois que l'énergie réelle dans le mouvement absolu, mais l'énergie apparente n'est pas exactement égale à l'énergie réelle correspondante.

4° Dans le mouvement relatif, les corps producteurs d'énergie électromagnétique sont soumis à une force apparente complémentaire qui n'existe pas dans le mouvement absolu.

Nous allons voir comment ces diverses circonstances résolvent la contradiction que je viens de signaler.

Imaginons un appareil producteur d'énergie électrique, disposé de telle sorte que l'énergie produite soit renvoyée dans une direction unique. Ce sera, par exemple, un excitateur de Hertz muni d'un miroir parabolique.

D'abord au repos, l'excitateur envoie de l'énergie dans la direction de l'axe des x, et cette énergie est précisément égale à celle qui est dépensée dans l'excitateur. Comme nous l'avons vu, l'appareil *recule* et prend une certaine vitesse.

Si nous rapportons tout à des axes mobiles liés à l'excitateur, les phénomènes apparents devront être, sauf les réserves faites plus haut, les mêmes que si l'excitateur était au repos; il va donc rayonner une quantité d'énergie *apparente* qui sera égale à l'énergie dépensée dans l'excitateur.

D'autre part, il subira encore une impulsion due au recul, et comme il n'est plus en repos, mais a déjà une certaine vitesse, cette impulsion produira un certain travail et la force vive de l'excitateur augmentera.

Si donc l'énergie électromagnétique *réelle* rayonnée, était égale à l'énergie électromagnétique apparente, c'est-à-dire comme je viens de le dire, à l'énergie dépensée dans l'excitateur, l'accroissement de force vive de l'appareil aurait été obtenu sans aucune dépense. Cela est contraire au principe de conservation. Si donc il se produit un recul c'est que l'énergie apparente n'est pas égale à l'énergie réelle et que les phénomènes dans le mouvement relatif ne sont pas exactement les mêmes que dans le mouvement absolu.

Examinons la chose d'un peu plus près. Soit v' la vitesse de l'excitateur, v celle des axes mobiles, que je ne suppose plus liés à l'excitateur, V celle de la radiation; toutes ces vitesses sont parallèles à l'axe des x positifs. Nous supposerons pour simplifier que la radiation a la forme d'une onde plane polarisée, ce qui nous donne les équations :

$$f = h = \alpha = \beta = 0,$$

$$4\pi \frac{dg}{dt} = -\frac{d\gamma}{dx}, \qquad -\frac{1}{4\pi V^2}\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dg}{dx}, \qquad V\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\gamma}{dt} = 0,$$

d'où :

$$\gamma = 4\pi V g.$$

L'énergie réelle contenue dans l'unité de volume sera :

$$\frac{\gamma^2}{8\pi} + 2\pi V^2 g^2 = 4\pi V^2 g^2.$$

Voyons maintenant ce qui se passe dans le mouvement apparent par rapport

aux axes mobiles. On a pour les champs électrique et magnétique apparents :

$$g' = g - \frac{v}{4\pi V^2}\gamma, \qquad \gamma' = \gamma - 4\pi v g.$$

Nous avons donc pour l'énergie apparente dans l'unité de volume (en négligeant v^2 mais non vv') :

$$\frac{\gamma'^2}{8\pi} + 2\pi V^2 g'^2 = \left(\frac{\gamma^2}{8\pi} - vg\gamma\right) + 2\pi V^2\left(g^2 - \frac{vg\gamma}{2\pi V^2}\right)$$

ou bien

$$4\pi V^2 g^2 - 2vg\gamma = 4\pi V^2 g^2\left(1 - \frac{2v}{V}\right).$$

Les équations du mouvement apparent s'écrivent, d'ailleurs :

$$4\pi\frac{dg'}{dt'} = -\frac{d\gamma'}{dx'}, \qquad \frac{1}{4\pi V^2}\frac{d\gamma'}{dt'} = \frac{dg'}{dx'},$$

ce qui montre que la vitesse apparente de propagation est encore V.

Soit T la durée de l'émission ; quelle sera la longueur réellement occupée par la perturbation dans l'espace ?

La tête de la perturbation est partie au temps o du point o et elle se trouve au temps t au point Vt ; la queue est partie au temps T, non pas du point o, mais du point $v'T$, parce que l'excitateur d'où elle émane a marché pendant le temps T avec une vitesse v'. Cette queue est donc à l'instant t au point $v'T + V(t - T)$. La longueur réelle de la perturbation est donc

$$L = Vt - [v'T + V(t - T)] = (V - v')T.$$

Quelle est maintenant la longueur apparente ? La tête est partie au temps local o du point o ; au temps local t' son abscisse par rapport aux axes mobiles sera Vt'. La queue est partie au temps T du point $v'T$ dont l'abscisse par rapport aux axes mobiles est $(v' - v)T$; le temps local correspondant est

$$T\left(1 - \frac{vv'}{V^2}\right).$$

Au temps local t', elle est au point x, x étant donné par les équations :

$$t' = t - \frac{vx}{V^2}, \qquad x = v'T + V(t - T),$$

d'où, en négligeant v^2 :

$$x = [v'T + V(t' - T)]\left(1 + \frac{v}{V}\right).$$

L'abscisse de ce point par rapport aux axes mobiles sera

$$x - vt' = (v'T - VT)\left(1 + \frac{v}{V}\right) + Vt'.$$

La longueur apparente de la perturbation sera donc

$$L' = Vt' - (x - vt') = (V - v')T\left(1 + \frac{v}{V}\right) = L\left(1 + \frac{v}{V}\right).$$

L'énergie réelle totale (par unité de section) est donc

$$\left(\frac{h^2}{8\pi} + 2\pi V^2 g^2\right) L = 4\pi V^2 g^2 L,$$

et l'énergie apparente

$$\left(\frac{h'^2}{8\pi} + 2\pi V^2 g'^2\right) L' = 4\pi V^2 g^2 L\left(1 - \frac{2v}{V}\right)\left(1 + \frac{v}{V}\right) = 4\pi V^2 g^2 L\left(1 - \frac{v}{V}\right).$$

Si donc $J\,dt$ représente l'énergie réelle rayonnée pendant le temps dt, $J\,dt\left(1 - \frac{v}{V}\right)$ représentera l'énergie apparente.

Soit $D\,dt$ l'énergie dépensée dans l'excitateur, elle est la même dans le mouvement réel et dans le mouvement apparent.

Il reste à tenir compte du recul. La force du recul multipliée par dt est égale à l'accroissement de la quantité de mouvement du fluide fictif, c'est-à-dire à

$$dt\,K_0 J V = \frac{J}{V}\,dt,$$

puisque la quantité de fluide créée est $K_0 J\,dt$ et sa vitesse V. Le travail du recul est donc :

$$-\frac{v' J\,dt}{V}.$$

Dans le mouvement apparent, il faut remplacer v' par $v' - v$ et J par $J\left(1 - \frac{v}{V}\right)$.

Le travail apparent du recul est donc :

$$-\frac{(v' - v)J\,dt}{V}\left(1 - \frac{v}{V}\right) = J\,dt\left(-\frac{v'}{V} + \frac{v}{V} + \frac{vv'}{V^2}\right).$$

Enfin dans le mouvement apparent, il faut tenir compte de la force complémentaire apparente dont j'ai parlé plus haut (4°). Cette force complémentaire est égale à $-\frac{vJ}{V^2}$ et son travail en négligeant v^2 est $-\frac{vv'}{V^2}J\,d\tau$.

Cela posé, l'équation des forces vives dans le mouvement réel s'écrit :

$$(10) \qquad J - D - \frac{v'J}{V} = 0.$$

Le premier terme représente l'énergie rayonnée, le second la dépense et le troisième le travail du recul.

L'équation des forces vives dans le mouvement apparent s'écrira :

$$(11) \qquad J\left(1 - \frac{v}{V}\right) - D - J\left(-\frac{v'}{V} + \frac{v}{V} + \frac{vv'}{V^2}\right) - \frac{vv'}{V^2}J = 0.$$

Le premier terme représente l'énergie apparente rayonnée, le second la dépense, le troisième le travail apparent du recul, et le quatrième le travail de la force apparente complémentaire.

La concordance des équations (10) et (11) dissipe l'apparence de contradiction signalée plus haut.

Si donc, dans la théorie de Lorentz, le recul peut avoir lieu sans violer le principe de l'énergie, c'est que l'énergie apparente pour un observateur entraîné avec les axes mobiles n'est pas égale à l'énergie réelle. Supposons donc que notre excitateur subisse un mouvement de recul et que l'observateur soit entraîné dans ce mouvement ($v' = v < 0$), l'excitateur paraîtra immobile à cet observateur et il lui semblera qu'il rayonne autant d'énergie qu'au repos. Mais en réalité il en rayonnera moins et c'est ce qui compense le travail du recul.

J'aurais pu supposer les axes mobiles invariablement liés à l'excitateur, c'est-à-dire $v = v'$, mais mon analyse n'aurait pas alors mis en évidence le rôle de la force complémentaire apparente. J'ai dû pour le faire supposer v' beaucoup plus grand que v de telle sorte que je puisse négliger v^2 sans négliger vv'.

J'aurais pu aussi montrer la nécessité de la force complémentaire apparente de la façon suivante :

Le recul réel est $\frac{J}{V}$; dans le mouvement apparent, il faut remplacer J par $J\left(1 - \frac{v}{V}\right)$ de sorte que le recul apparent est

$$\frac{J}{V} - \frac{Jv}{V^2}.$$

Il faut donc pour compléter le recul réel, ajouter au recul apparent une force complémentaire apparente $\frac{Jv}{V^2}$ (je mets le signe — parce que le recul, comme l'indique son nom, a lieu dans le sens négatif).

L'existence de la force complémentaire apparente est donc une conséquence nécessaire du phénomène du recul.

Ainsi, d'après la théorie de Lorentz, le principe de réaction ne doit pas s'appliquer à la matière seule; le principe du mouvement relatif ne doit pas non plus s'appliquer à la matière seule. Ce qu'il importe de remarquer, c'est qu'il y a entre ces deux faits une connexion intime et nécessaire.

Il suffirait donc d'établir expérimentalement l'un des deux pour que l'autre se trouvât établi ipso facto. Il serait sans doute moins difficile de démontrer le second; mais c'est déjà à peu près impossible puisque par exemple, M. Liénard a calculé qu'avec une machine de 100 kW la force complémentaire apparente ne serait que de $\frac{1}{600}$ de dyne.

De cette corrélation entre ces deux faits, découle une conséquence importante; c'est que l'expérience de Fizeau est déjà elle-même contraire au principe de réaction. Si, en effet, comme l'indique cette expérience, l'entraînement des ondes n'est que partiel, c'est que la propagation *relative* des ondes dans un milieu en mouvement ne suit pas les mêmes lois que la propagation dans un milieu en repos, c'est-à-dire que le principe du mouvement relatif ne s'applique pas à la matière seule et qu'il faut lui faire subir au moins une correction à savoir celle dont j'ai parlé plus haut (2°) et qui consiste à tout rapporter au « temps local ». Si cette correction n'est pas compensée par d'autres, on devra conclure que le principe de réaction n'est pas vrai non plus pour la matière seule.

Ainsi se trouveraient condamnées en bloc toutes les théories qui respectent ce principe, *à moins que nous ne consentions à modifier profondément toutes nos idées sur l'électrodynamique.* C'est là une idée que j'ai développée plus longuement dans un article antérieur (*l'Éclairage Électrique*, t. 5, n° 40) [1].

---

[1] Ce tome, p. 495.

SUR

LA DYNAMIQUE DE L'ÉLECTRON

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 140, p. 1504-1508 (5 juin 1905).

Il semble au premier abord que l'aberration de la lumière et les phénomènes optiques qui s'y rattachent vont nous fournir un moyen de déterminer le mouvement absolu de la Terre, ou plutôt son mouvement, non par rapport aux autres astres, mais par rapport à l'éther. Il n'en est rien ; les expériences où l'on ne tient compte que de la première puissance de l'aberration ont d'abord échoué et l'on en a aisément découvert l'explication ; mais Michelson, ayant imaginé une expérience où l'on pouvait mettre en évidence les termes dépendant du carré de l'aberration, ne fut pas plus heureux. Il semble que cette impossibilité de démontrer le mouvement absolu soit une loi générale de la nature.

Une explication a été proposée par Lorentz, qui a introduit l'hypothèse d'une contraction de tous les corps dans le sens du mouvement terrestre ; cette contraction rendrait compte de l'expérience de Michelson et de toutes celles qui ont été réalisées jusqu'ici, mais elle laisserait la place à d'autres expériences plus délicates encore, et plus faciles à concevoir qu'à exécuter, qui seraient de nature à mettre en évidence le mouvement absolu de la Terre. Mais, si l'on regarde l'impossibilité d'une pareille constatation comme hautement probable, il est permis de prévoir que ces expériences, si l'on parvient jamais à les réaliser, donneront encore un résultat négatif. Lorentz a cherché à compléter et à modifier son hypothèse de façon à la mettre en concordance avec le postulat de l'impossibilité *complète* de la détermination du mouvement absolu. C'est ce qu'il a réussi à faire dans son article intitulé *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light* (*Proceedings* de l'Académie d'Amsterdam, 27 mai 1904).

L'importance de la question m'a déterminé à la reprendre ; les résultats que j'ai obtenus sont d'accord sur tous les points importants avec ceux de Lorentz ; j'ai été seulement conduit à les modifier et à les compléter dans quelques points de détail.

Le point essentiel, établi par Lorentz, c'est que les équations du champ électromagnétique ne sont pas altérées par une certaine transformation (que j'appellerai du nom de *Lorentz*) et qui est de la forme suivante :

$$(1)\qquad x' = kl(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl(t + \varepsilon x),$$

x, y, z sont les coordonnées et t le temps avant la transformation, x', y', z' et t' après la transformation. D'ailleurs ε est une constante qui définit la transformation

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

et l est une fonction quelconque de ε. On voit que dans cette transformation l'axe des x joue un rôle particulier, mais on peut évidemment construire une transformation où ce rôle serait joué par une droite quelconque passant par l'origine. L'ensemble de toutes ces transformations, joint à l'ensemble de toutes les rotations de l'espace, doit former un groupe ; mais pour qu'il en soit ainsi, il faut que $l = 1$; on est donc conduit à supposer $l = 1$ et c'est là une conséquence que Lorentz avait obtenue par une autre voie.

Soient ρ la densité électrique de l'électron, ξ, η, ζ sa vitesse avant la transformation ; on aura pour les mêmes quantités $\rho', \xi', \eta', \zeta'$ après la transformation

$$(2)\qquad \rho' = \frac{k}{l^3}\rho(1+\varepsilon\xi), \quad \rho'\xi' = \frac{k}{l^3}\rho(\xi+\varepsilon), \quad \rho'\eta' = \frac{\rho\eta}{l^3}, \quad \rho'\zeta' = \frac{\rho\zeta}{l^3}.$$

Ces formules diffèrent un peu de celles qui avaient été trouvées par Lorentz.

Soient maintenant X, Y, Z et X', Y', Z' les trois composantes de la force avant et après la transformation, *la force est rapportée à l'unité de volume* ; je trouve

$$(3)\qquad X' = \frac{k}{l^5}(X + \varepsilon \Sigma X\xi), \quad Y' = \frac{Y}{l^5}, \quad Z' = \frac{Z}{l^5}.$$

Ces formules diffèrent également un peu de celles de Lorentz ; le terme complémentaire en $\Sigma X\xi$ rappelle un résultat obtenu autrefois par M. Liénard.

Si nous désignons maintenant par X_1, Y_1, Z_1 et X'_1, Y'_1, Z'_1 les composantes

de la force rapportée non plus à l'unité de volume, mais à l'unité de masse de l'électron, nous aurons

$$(4) \qquad X'_1 = \frac{k}{l^5}\frac{\rho}{\rho'}(X_1 + \varepsilon \Sigma X_1 \xi), \qquad Y'_1 = \frac{\rho}{\rho'}\frac{Y_1}{l^5}, \qquad Z'_1 = \frac{\rho}{\rho'}\frac{Z_1}{l^5}.$$

Lorentz est amené également à supposer que l'électron en mouvement prend la forme d'un ellipsoïde aplati ; c'est également l'hypothèse faite par Langevin, seulement, tandis que Lorentz suppose que deux des axes de l'ellipsoïde demeurent constants, ce qui est en accord avec son hypothèse $l = 1$, Langevin suppose que c'est le volume qui reste constant. Les deux auteurs ont montré que ces deux hypothèses s'accordent avec les expériences de Kaufmann, aussi bien que l'hypothèse primitive d'Abraham (électron sphérique). L'hypothèse de Langevin aurait l'avantage de se suffire à elle-même, puisqu'il suffit de regarder l'électron comme déformable et incompressible pour expliquer qu'il prenne quand il est en mouvement la forme ellipsoïdale. Mais je montre, d'accord en cela avec Lorentz, qu'elle est incapable de s'accorder avec l'impossibilité d'une expérience montrant le mouvement absolu. Cela tient, ainsi que je l'ai dit, à ce que $l = 1$ est la seule hypothèse pour laquelle l'ensemble des transformations de Lorentz forme un groupe.

Mais avec l'hypothèse de Lorentz, l'accord entre les formules ne se fait pas tout seul ; on l'obtient, et en même temps une explication possible de la contraction de l'électron, en supposant que *l'électron, déformable et compressible, est soumis à une sorte de pression constante extérieure dont le travail est proportionnel aux variations du volume.*

Je montre, par une application du principe de moindre action, que, dans ces conditions, la compensation est complète, si l'on suppose que l'inertie est un phénomène exclusivement électromagnétique, comme on l'admet généralement depuis l'expérience de Kaufmann, et qu'à part la pression constante dont je viens de parler et qui agit sur l'électron, toutes les forces sont d'origine électromagnétique. On a ainsi l'explication de l'impossibilité de montrer le mouvement absolu et de la contraction de tous les corps dans le sens du mouvement terrestre.

Mais ce n'est pas tout : Lorentz, dans l'Ouvrage cité, a jugé nécessaire de compléter son hypothèse en supposant que toutes les forces, quelle qu'en soit l'origine, soient affectées, par une translation, de la même manière que les forces électromagnétiques, et que, par conséquent, l'effet produit sur leurs

composantes par la transformation de Lorentz est encore défini par les équations (4).

Il importait d'examiner cette hypothèse de plus près et en particulier de rechercher quelles modifications elle nous obligerait à apporter aux lois de la gravitation.

C'est ce que j'ai cherché à déterminer; j'ai été d'abord conduit à supposer que la propagation de la gravitation n'est pas instantanée, mais se fait avec la vitesse de la lumière. Cela semble en contradiction avec un résultat obtenu par Laplace qui annonce que cette propagation est, sinon instantanée, du moins beaucoup plus rapide que celle de la lumière. Mais, en réalité, la question que s'était posée Laplace diffère considérablement de celle dont nous nous occupons ici. Pour Laplace, l'introduction d'une vitesse finie de propagation était la *seule* modification qu'il apportait à la loi de Newton. Ici, au contraire, cette modification est accompagnée de plusieurs autres ; il est donc possible, et il arrive en effet, qu'il se produise entre elles une compensation partielle.

Quand nous parlerons donc de la position ou de la vitesse du corps attirant, il s'agira de cette position ou de cette vitesse à l'instant où l'*onde gravifique* est partie de ce corps ; quand nous parlerons de la position ou de la vitesse du corps attiré, il s'agira de cette position ou de cette vitesse à l'instant où ce corps attiré a été atteint par l'onde gravifique émanée de l'autre corps ; il est clair que le premier instant est antérieur au second.

Si donc x, y, z sont les projections sur les trois axes du vecteur qui joint les deux positions, si la vitesse du corps attiré est ξ, η, ζ, et celle du corps attirant ξ_1, η_1, ζ_1, les trois composantes de l'attraction (que je pourrai encore appeler X_1, Y_1, Z_1) seront des fonctions de x, y, z, ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1. Je me suis demandé s'il était possible de déterminer ces fonctions de telle façon qu'elles soient affectées par la transformation de Lorentz conformément aux équations (4) et qu'on retrouve la loi ordinaire de la gravitation, toutes les fois que les vitesses ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1 sont assez petites pour qu'on puisse en négliger les carrés devant le carré de la vitesse de la lumière.

La réponse doit être affirmative. On trouve que l'attraction corrigée se compose de deux forces, l'une parallèle au vecteur x, y, z, l'autre à la vitesse ξ_1, η_1, ζ_1.

La divergence avec la loi ordinaire de la gravitation est, comme je viens de le dire de l'ordre de ξ^2 ; si l'on supposait seulement, comme l'a fait Laplace, que

la vitesse de propagation est celle de la lumière, cette divergence serait de l'ordre de ξ, c'est-à-dire 10 000 fois plus grande. Il n'est donc pas, à première vue, absurde de supposer que les observations astronomiques ne sont pas assez précises pour déceler une divergence aussi petite que celle que nous imaginons. Mais c'est ce qu'une discussion approfondie permettra seule de décider.

SUR

LA DYNAMIQUE DE L'ÉLECTRON

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 21, p. 129-176 (1906)

TABLE DES MATIÈRES.

Introduction.

Il semble au premier abord que l'aberration de la lumière et les phénomènes optiques et électriques qui s'y rattachent vont nous fournir un moyen de déterminer le mouvement absolu de la Terre, ou plutôt son mouvement, non par rapport aux autres astres, mais par rapport à l'éther. Fresnel l'avait déjà tenté, mais il reconnut bientôt que le mouvement de la Terre n'altère pas les lois de la réfraction et de la réflexion. Les expériences analogues, comme celle de la lunette pleine d'eau et toutes celles où l'on ne tient compte que des termes du premier ordre par rapport à l'aberration, ne donnèrent non plus que des résultats négatifs ; on en découvrit bientôt l'explication ; mais Michelson,

ayant imaginé une expérience où les termes dépendant du carré de l'aberration devenaient sensibles, échoua à son tour.

Il semble que cette impossibilité de mettre en évidence expérimentalement le mouvement absolu de la Terre soit une loi générale de la Nature ; nous sommes naturellement porté à admettre cette loi, que nous appellerons le *Postulat de Relativité* et à l'admettre sans restriction. Que ce postulat, jusqu'ici d'accord avec l'expérience, doive être confirmé ou infirmé plus tard par des expériences plus précises, il est en tout cas intéressant de voir quelles en peuvent être les conséquences.

Une explication a été proposée par Lorentz et Fitz Gérald, qui ont introduit l'hypothèse d'une contraction subie par tous les corps dans le sens du mouvement de la Terre et proportionnelle au carré de l'aberration ; cette contraction, que nous appellerons la *contraction lorentzienne*, rendrait compte de l'expérience de Michelson et de toutes celles qui ont été réalisées jusqu'ici. L'hypothèse deviendrait insuffisante, toutefois, si l'on voulait admettre dans toute sa généralité le postulat de relativité.

Lorentz a cherché alors à la compléter et à la modifier de façon à la mettre en concordance parfaite avec ce postulat. C'est ce qu'il a réussi à faire dans son article intitulé *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light* (*Proceedings* de l'Académie d'Amsterdam, 27 mai 1904).

L'importance de la question m'a déterminé à la reprendre ; les résultats que j'ai obtenus sont d'accord avec ceux de M. Lorentz sur tous les points importants ; j'ai été seulement conduit à les modifier et à les compléter dans quelques points de détail ; on verra plus loin les différences qui sont d'une importance secondaire.

L'idée de Lorentz peut se résumer ainsi : si l'on peut, sans qu'aucun des phénomènes apparents soit modifié, imprimer à tout le système une translation commune, c'est que les équations d'un milieu électromagnétique ne sont pas altérées par certaines transformations, que nous appellerons *transformations de Lorentz;* deux systèmes, l'un immobile, l'autre en translation, deviennent ainsi l'image exacte l'un de l'autre.

Langevin ([1]) avait cherché à modifier l'idée de Lorentz ; pour les deux

---

([1]) Langevin avait été devancé par M. Bucherer de Bonn, qui a émis avant lui la même idée (*Voir* Bucherer, *Mathematische Einführung in die Elektronentheorie*, août 1904, Teubner, Leipzig).

auteurs, l'électron en mouvement prend la forme d'un ellipsoïde aplati, mais pour Lorentz deux des axes de l'ellipsoïde demeurent constants, pour Langevin au contraire c'est le volume de l'ellipsoïde qui demeure constant. Les deux savants ont d'ailleurs montré que ces deux hypothèses s'accordent avec les expériences de Kaufmann, aussi bien que l'hypothèse primitive d'Abraham (électron sphérique indéformable).

L'avantage de la théorie de Langevin, c'est qu'elle ne fait intervenir que les forces électromagnétiques et les forces de liaison ; mais elle est incompatible avec le postulat de relativité ; c'est ce que Lorentz avait montré, c'est ce que je retrouve à mon tour par une autre voie en faisant appel aux principes de la théorie des groupes.

Il faut donc en revenir à la théorie de Lorentz ; mais si l'on veut la conserver et éviter d'intolérables contradictions, il faut supposer une force spéciale qui explique à la fois la contraction et la constance de deux des axes. J'ai cherché à déterminer cette force, j'ai trouvé qu'*elle peut être assimilée à une pression extérieure constante*, *agissant sur l'électron déformable et compressible*, *et dont le travail est proportionnel aux variations du volume de cet électron.*

Si alors l'inertie de la matière était exclusivement d'origine électromagnétique, comme on l'admet généralement depuis l'expérience de Kaufmann, et qu'à part cette pression constante dont je viens de parler, toutes les forces soient d'origine électromagnétique, le postulat de relativité peut être établi en toute rigueur. C'est ce que je montre par un calcul très simple fondé sur le principe de moindre action.

Mais ce n'est pas tout. Lorentz, dans l'ouvrage cité, a jugé nécessaire de compléter son hypothèse de façon que le postulat subsiste quand il y a d'autres forces que les forces électromagnétiques. D'après lui, toutes les forces, quelle qu'en soit l'origine, sont affectées par la transformation de Lorentz (et, par conséquent par une translation) de la même manière que les forces électromagnétiques.

Il importait d'examiner cette hypothèse de plus près et, en particulier de rechercher quelles modifications elle nous obligerait à apporter aux lois de la gravitation.

On trouve d'abord qu'elle nous force à supposer que la propagation de la gravitation n'est pas instantanée, mais se fait avec la vitesse de la lumière. On pourrait croire que c'est une raison suffisante pour rejeter l'hypothèse, Laplace ayant démontré qu'il ne peut en être ainsi. Mais en réalité, l'effet de cette

propagation est compensé, en grande partie, par une cause différente, de sorte qu'il n'y a plus contradiction entre la loi proposée et les observations astronomiques.

Était-il possible de trouver une loi, qui satisfît à la condition imposée par Lorentz, et qui en même temps se réduisît à la loi de Newton toutes les fois que les vitesses des astres sont assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés (ainsi que le produit des accélérations par les distances) devant le carré de la vitesse de la Lumière ?

A cette question, ainsi qu'on le verra plus loin, on doit répondre affirmativement.

La loi modifiée est-elle compatible avec les observations astronomiques ?

A première vue, il semble que oui, mais la question ne pourra être tranchée que par une discussion approfondie.

Mais en admettant même que cette discussion tourne à l'avantage de la nouvelle hypothèse, que devrons-nous conclure? Si la propagation de l'attraction se fait avec la vitesse de la lumière, cela ne peut être par une rencontre fortuite, cela doit être parce que c'est une fonction de l'éther ; et alors il faudra chercher à pénétrer la nature de cette fonction, et la rattacher aux autres fonctions du fluide.

Nous ne pouvons nous contenter de formules simplement juxtaposées et qui ne s'accorderaient que par un hasard heureux ; il faut que ces formules arrivent pour ainsi dire à se pénétrer mutuellement. L'esprit ne sera satisfait que quand il croira apercevoir la raison de cet accord, au point d'avoir l'illusion qu'il aurait pu le prévoir.

Mais la question peut encore se présenter à un autre point de vue, qu'une comparaison fera mieux comprendre. Supposons un astronome antérieur à Copernic et réfléchissant sur le système de Ptolémée ; il remarquera que pour toutes les planètes, un des deux cercles, épicycle ou déférent, est parcouru dans le même temps. Cela ne peut être par hasard, il y a donc entre toutes les planètes je ne sais quel lien mystérieux.

Mais Copernic, en changeant simplement les axes de coordonnées regardés comme fixes, fait évanouir cette apparence ; chaque planète ne décrit plus qu'un seul cercle et les durées de révolutions deviennent indépendantes (jusqu'à ce que Kepler rétablisse entre elles le lien qu'on avait cru détruit).

Ici il est possible qu'il y ait quelque chose d'analogue ; si nous admettions le postulat de relativité, nous trouverions dans la loi de gravitation et dans

les lois électromagnétiques un nombre commun qui serait la vitesse de la lumière ; et nous le retrouverions encore dans toutes les autres forces d'origine quelconque, ce qui ne pourrait s'expliquer que de deux manières :

Ou bien il n'y aurait rien au monde qui ne fût d'origine électromagnétique.

Ou bien cette partie qui serait pour ainsi dire commune à tous les phénomènes physiques ne serait qu'une apparence, quelque chose qui tiendrait à nos méthodes de mesure. Comment faisons-nous nos mesures ? En transportant, les uns sur les autres, des objets regardés comme des solides invariables, répondra-t-on d'abord ; mais cela n'est plus vrai dans la théorie actuelle, si l'on admet la contraction lorentzienne. Dans cette théorie, deux longueurs égales, ce sont, par définition, deux longueurs que la lumière met le même temps à parcourir.

Peut-être suffirait-il de renoncer à cette définition, pour que la théorie de Lorentz fût aussi complètement bouleversée que l'a été le système de Ptolémée par l'intervention de Copernic. Si cela arrive un jour, cela ne prouvera pas que l'effort fait par Lorentz ait été inutile ; car Ptolémée, quoi qu'on en pense, n'a pas été inutile à Copernic.

Aussi n'ai-je pas hésité à publier ces quelques résultats partiels, bien qu'en ce moment même la théorie entière puisse sembler mise en danger par la découverte des rayons magnétocathodiques.

1. — **Transformation de Lorentz.**

Lorentz a adopté un système particulier d'unités, de façon à faire disparaître les facteurs 4π dans les formules. Je ferai de même, et de plus je choisirai les unités de longueur et de temps de telle façon que la vitesse de la lumière soit égale à 1. Dans ces conditions, les formules fondamentales deviennent, en appelant f, g, h le déplacement électrique, α, β, γ la force magnétique, F, G, H le potentiel vecteur, ψ le potentiel scalaire, ρ la densité électrique, ξ, η, ζ la vitesse de l'électron, u, v, w le courant :

$$(1)\quad \begin{cases} u = \dfrac{df}{dt} + \rho\xi = \dfrac{d\gamma}{dy} - \dfrac{d\beta}{dz}, \qquad \alpha = \dfrac{dH}{dy} - \dfrac{dG}{dz}, \qquad f = -\dfrac{dF}{dt} - \dfrac{d\psi}{dx}, \\ \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{dg}{dz} - \dfrac{dh}{dy}, \qquad \dfrac{d\rho}{dt} + \sum \dfrac{d\rho\xi}{dx} = 0, \qquad \sum \dfrac{df}{dx} = \rho, \qquad \dfrac{d\psi}{dt} + \sum \dfrac{dF}{dx} = 0, \\ \square = \Delta - \dfrac{d^2}{dt^2} = \sum \dfrac{d^2}{dx^2} - \dfrac{d^2}{dt^2}, \qquad \square\psi = -\rho, \qquad \square F = -\rho\xi. \end{cases}$$

Un élément de matière de volume $dx\,dy\,dz$, subit une force mécanique dont les composantes $X\,dx\,dy\,dz$, $Y\,dx\,dy\,dz$, $Z\,dx\,dy\,dz$ se déduisent de la formule :

(2) $$X = \rho f + \rho(\eta\gamma - \zeta\beta).$$

Ces équations sont susceptibles d'une transformation remarquable découverte par Lorentz et qui doit son intérêt à ce qu'elle explique pourquoi aucune expérience n'est susceptible de nous faire connaître le mouvement absolu de l'univers. Posons :

(3) $$x' = kl(x + \varepsilon t), \quad t' = kl(t + \varepsilon x), \quad y' = ly, \quad z' = lz.$$

l et ε étant deux constantes quelconques, et étant

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Si alors nous posons :

$$\square = \sum \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dt^2},$$

il viendra :

$$\square' = \square\, l^{-2}.$$

Considérons une sphère entraînée avec l'électron dans un mouvement de translation uniforme et soit :

$$(x - \xi t)^2 + (y - \eta t)^2 + (z - \zeta t)^2 = r^2$$

l'équation de cette sphère mobile dont le volume sera $\frac{4}{3}\pi r^2$.

La transformation la changera en un ellipsoïde, dont il est aisé de trouver l'équation. On déduit aisément, en effet, des équations (3) :

(3 *bis*) $$x = \frac{k}{l}(x' - \varepsilon t'), \quad t = \frac{k}{l}(t' - \varepsilon x'), \quad y = \frac{y'}{l}, \quad z = \frac{z'}{l}.$$

L'équation de l'ellipsoïde devient ainsi :

$$k^2(x' - \varepsilon t' - \xi t' + \varepsilon\xi x')^2 + (y' - \eta k t' + \eta k \varepsilon x')^2 + (z' - \zeta k t' + \zeta k \varepsilon x')^2 = l^2 r^2.$$

Cet ellipsoïde se déplace avec un mouvement uniforme, pour $t' = 0$, il se réduit à

$$k^2 x'^2 (1 + \xi\varepsilon)^2 + (y' + \eta k \varepsilon x')^2 + (z' + \zeta k \varepsilon x')^2 = l^2 r^2.$$

et a pour volume :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{l^3}{k(1 + \xi\varepsilon)}.$$

Si l'on veut que la charge d'un électron ne soit pas altérée par la transformation et si l'on appelle ρ' la nouvelle densité électrique, il viendra :

$$(4) \qquad \rho' = \frac{k}{l^3}(\rho + \varepsilon\rho\xi).$$

Que seront maintenant les nouvelles vitesses ε', η', ζ'? on devra avoir :

$$\xi' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x+\varepsilon t)}{d(t+\varepsilon x)} = \frac{\xi+\varepsilon}{1+\varepsilon\xi},$$

$$\eta' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{kd(t+\varepsilon x)} = \frac{\eta}{k(1+\varepsilon\xi)}, \qquad \zeta' = \frac{\zeta}{k(1+\varepsilon\xi)}.$$

d'où :

$$(4\,bis) \qquad \rho'\xi' = \frac{k}{l^3}(\rho\xi + \varepsilon\rho), \qquad \rho'\eta' = \frac{1}{l^3}\rho\eta, \qquad \rho'\zeta' = \frac{1}{l^3}\rho\zeta.$$

C'est ici que je dois signaler pour la première fois une divergence avec Lorentz.

Lorentz pose (à la différence des notations près) [*loc. cit.*, p. 813 (form. (7) et (8)] :

$$\rho' = \frac{1}{kl^3}\rho, \qquad \xi' = k^2(\xi+\varepsilon), \qquad \eta' = k\eta, \qquad \zeta' = k\zeta.$$

On retrouve ainsi les formules :

$$\rho'\xi' = \frac{k}{l^3}(\rho\xi + \varepsilon\rho), \qquad \rho'\eta' = \frac{1}{l^3}\rho\eta, \qquad \rho'\zeta' = \frac{1}{l^3}\rho\zeta;$$

mais la valeur de ρ' diffère.

Il importe de remarquer que les formules (4) et (4 *bis*) satisfont à la condition de continuité

$$\frac{d\rho'}{dt'} + \sum \frac{d\rho'\xi'}{dx'} = 0.$$

Soit, en effet, λ une quantité indéterminée et D le déterminant fonctionnel de

$$(5) \qquad t+\lambda\rho, \qquad x+\lambda\rho\xi, \qquad y+\lambda\rho\eta, \qquad z+\lambda\rho\zeta$$

par rapport à t, x, y, z. On aura :

$$D = D_0 + D_1\lambda + D_2\lambda^2 + D_3\lambda^3 + D_4\lambda^4,$$

avec

$$D_0 = 1, \qquad D_1 = \frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d\rho\xi}{dx} = 0.$$

Soit $\lambda' = l^2\lambda$, nous voyons que les quatre fonctions

$$(5\,bis) \qquad t'+\lambda'\rho', \qquad x'+\lambda'\rho'\xi', \qquad y'+\lambda'\rho'\eta', \qquad z'+\lambda'\rho'\zeta'$$

sont liées aux fonctions (5) par les mêmes relations linéaires que les variables anciennes aux variables nouvelles. Si donc on désigne par D' le déterminant fonctionnel des fonctions (5 *bis*) par rapport aux variables nouvelles, on aura :

$$D' = D, \qquad D' = D'_0 + D'_1\lambda' + \ldots + D'_4\lambda'^4,$$

d'où :

$$D'_0 = D_0 = 1, \qquad D'_1 = l^{-2}D_1 = 0 = \frac{d\rho'}{dt'} + \sum \frac{d\rho'\xi'}{dx'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Avec l'hypothèse de Lorentz, cette condition ne serait pas remplie, puisque ρ' n'a pas la même valeur.

Nous définirons les nouveaux potentiels, vecteur et scalaire, de façon à satisfaire aux conditions

$$(6) \qquad \square'\psi' = -\rho', \qquad \square' F' = -\rho'\xi'.$$

Nous tirerons ensuite de là :

$$(7) \qquad \psi' = \frac{k}{l}(\psi + \varepsilon F), \qquad F' = \frac{k}{l}(F + \varepsilon\psi), \qquad G' = \frac{1}{l}G, \qquad H' = \frac{1}{l}H.$$

Ces formules diffèrent notablement de celles de Lorentz, mais la divergence ne porte en dernière analyse que sur les définitions.

Nous choisirons les nouveaux champs électrique et magnétique de façon à satisfaire aux équations :

$$(8) \qquad f' = -\frac{dF'}{dt'} - \frac{d\psi'}{dx'}, \qquad \alpha' = \frac{dH'}{dy'} - \frac{dG'}{dz'}.$$

Il est aisé de voir que :

$$\frac{d}{dt'} = \frac{k}{l}\left(\frac{d}{dt} - \varepsilon\frac{d}{dx}\right), \qquad \frac{d}{dx'} = \frac{k}{l}\left(\frac{d}{dx} - \varepsilon\frac{d}{dt}\right),$$

$$\frac{d}{dy'} = \frac{1}{l}\frac{d}{dy}, \qquad \frac{d}{dz'} = \frac{1}{l}\frac{d}{dz}$$

et on en conclut :

$$(9) \qquad \begin{cases} f' = \dfrac{1}{l^2}f, & g' = \dfrac{k}{l^2}(g + \varepsilon\gamma), & h' = \dfrac{k}{l^2}(h - \varepsilon\beta), \\ \alpha' = \dfrac{1}{l^2}\alpha, & \beta' = \dfrac{k}{l^2}(\beta - \varepsilon h), & \gamma' = \dfrac{k}{l^2}(\gamma + \varepsilon g). \end{cases}$$

Ces formules sont identiques à celles de Lorentz.

Notre transformation n'altère pas les équations (1). En effet, la condition de continuité, ainsi que les équations (6) et (8), nous fournissent déjà quelques-unes des équations (1) (sauf l'accentuation des lettres).

Les équations (6) rapprochées de la condition de continuité donnent :

$$(10) \qquad \frac{d\rho'}{dt'} + \sum \frac{d\rho'\xi'}{dx'} = 0.$$

Il reste à établir que :

$$\frac{df'}{dt'} + \rho'\xi' = \frac{d\gamma'}{dy'} - \frac{d\beta'}{dz'}, \qquad \frac{d\alpha'}{dt'} = \frac{dg'}{dz'} - \frac{dh'}{dy'}, \qquad \sum \frac{df'}{dx'} = \rho'$$

et l'on voit aisément que ce sont des conséquences nécessaires des équations (6), (8) et (10).

Nous devons maintenant comparer les forces avant et après la transformation.

Soient X, Y, Z la force avant, et X′, Y′, Z′ la force après la transformation, toutes deux rapportées à l'unité de volume. Pour que X′ satisfasse aux mêmes équations qu'avant la transformation, on doit avoir :

$$X' = \rho' f' + \rho'(\eta'\gamma' - \zeta'\beta'),$$
$$Y' = \rho' g' + \rho'(\zeta'\alpha' - \xi'\gamma'),$$
$$Z' = \rho' h' + \rho'(\xi'\beta' - \eta'\alpha'),$$

ou, en remplaçant toutes les quantités par leurs valeurs (4), (4 *bis*) et (9) et tenant compte des équations (2) :

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} X' &= \frac{k}{l^5}(X + \varepsilon \Sigma X\xi), \\ Y' &= \frac{1}{l^3} Y, \\ Z' &= \frac{1}{l^3} Z. \end{aligned} \right.$$

Si nous représentions par X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la force rapportée, non plus à l'unité de volume, mais à l'unité de charge électrique de l'électron, et par X'_1, Y'_1, Z'_1 les mêmes quantités après la transformation, nous aurions :

$$X_1 = f + \eta\gamma - \zeta\beta, \qquad X'_1 = f' + \eta'\gamma' - \zeta'\beta', \qquad X = \rho X_1, \qquad X' = \rho' X'_1$$

et nous aurions les équations :

$$(11 \textit{ bis}) \qquad \left\{ \begin{aligned} X'_1 &= \frac{k}{l^5}\frac{\rho}{\rho'}(X_1 + \varepsilon \Sigma X_1\xi), \\ Y'_1 &= \frac{1}{l^3}\frac{\rho}{\rho'} Y_1, \\ Z'_1 &= \frac{1}{l^3}\frac{\rho}{\rho'} Z_1. \end{aligned} \right.$$

Lorentz avait trouvé [à la différence des notations près, p. 813, form. (10)] :

$$(11\ ter)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= l^2 X'_1 - l^2\varepsilon(\eta' g' + \zeta' h'), \\ Y_1 &= \frac{l^2}{k} Y'_1 + \frac{l^2\varepsilon}{k}\xi' g', \\ Z_1 &= \frac{l^2}{k} Z'_1 + \frac{l^2\varepsilon}{k}\xi' h'. \end{aligned}\right.$$

Avant d'aller plus loin, il importe de rechercher la cause de cette importante divergence. Elle tient évidemment à ce que les formules pour ξ', η', ζ' ne sont pas les mêmes, tandis que les formules pour les champs électriques et magnétiques sont les mêmes.

Si l'inertie des électrons est exclusivement d'origine électromagnétique, si de plus ils ne sont soumis qu'à des forces d'origine électromagnétique, la condition d'équilibre exige que l'on ait à l'intérieur des électrons :

$$X = Y = Z = 0.$$

Or, en vertu des équations (11), ces relations équivalent à

$$X' = Y' = Z' = 0.$$

Les conditions d'équilibre des électrons ne sont donc pas altérées par la transformation.

Malheureusement, une hypothèse aussi simple est inadmissible. Si, en effet, on suppose $\xi = \eta = \zeta = 0$, les conditions $X = Y = Z = 0$ entraîneraient $f = g = h = 0$, et par conséquent, $\sum \frac{df}{dx} = 0$, c'est-à-dire $\rho = 0$. On arriverait à des résultats analogues dans le cas le plus général. Il faut donc bien admettre qu'il y a, outre les forces électromagnétiques, soit d'autres forces, soit des liaisons. Il faut alors chercher à quelles conditions doivent satisfaire ces forces ou ces liaisons, pour que l'équilibre des électrons ne soit pas troublé par la transformation. Ce sera l'objet d'un paragraphe ultérieur.

2. — Principe de moindre action.

On sait comment Lorentz a déduit ses équations du principe de moindre action. Je reviendrai cependant sur la question, bien que je n'aie rien d'essentiel à ajouter à l'analyse de Lorentz, parce que je préfère la présenter sous une

forme un peu différente qui me sera utile pour mon objet. Je poserai :

$$(1) \qquad J = \int dt\, d\tau \left[\frac{\Sigma f^2}{2} + \frac{\Sigma \alpha^2}{2} - \Sigma F u \right],$$

en supposant que f, α, F, u, ... sont assujetties aux conditions suivantes et à celles qu'on en déduirait par symétrie :

$$(2) \qquad \sum \frac{df}{dx} = \rho, \qquad \alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \qquad u = \frac{df}{dt} + \rho\xi.$$

Quant à l'intégrale J elle doit être étendue :

1° Par rapport à l'élément de volume $d\tau = dx\, dy\, dz$, à l'espace tout entier ;

2° Par rapport au temps t, à l'intervalle compris entre les limites $t = t_0$, $t = t_1$.

D'après le principe de moindre action, l'intégrale J doit être un minimum, si l'on assujettit les diverses quantités qui y figurent :

1° Aux conditions (2);

2° A la condition que l'état du système soit déterminé aux deux époques limites $t = t_0$, $t = t_1$.

Cette dernière condition nous permet de transformer nos intégrales par intégration par parties par rapport au temps. Si nous avons, en effet, une intégrale de la forme

$$\int dt\, d\tau\, A \frac{dB\, \delta C}{dt},$$

où C est une des quantités qui définissent l'état du système et δC sa variation, elle sera égale (en intégrant par parties par rapport au temps) :

$$\int d\tau \left| AB\, \delta C \right|_{t=t_0}^{t=t_1} - \int dt\, d\tau \frac{dA}{dt} dB\, \delta C.$$

Comme l'état du système est déterminé aux deux époques limites, on a $\delta C = 0$ pour $t = t_0$, $t = t_1$; donc la première intégrale qui se rapporte à ces deux époques est nulle, et la seconde subsiste seule.

Nous pouvons, de même, intégrer par parties par rapport à x, y ou z; nous avons, en effet,

$$\int A \frac{dB}{dx} dx\, dy\, dz\, dt = \int AB\, dy\, dz\, dt - \int B \frac{dA}{dx} dx\, dy\, dz\, dt.$$

Nos intégrations s'étendant jusqu'à l'infini, il faut faire $x = \pm \infty$ dans la première intégrale du second membre; donc, comme nous supposons toujours que toutes nos fonctions s'annulent à l'infini, cette intégrale sera nulle et il viendra

$$\int A\frac{dB}{dx}d\tau\,dt = -\int B\frac{dA}{dx}d\tau\,dt.$$

Si le système était supposé soumis à des liaisons, il faudrait adjoindre ces conditions de liaison aux conditions imposées aux diverses quantités qui figurent dans l'intégrale J.

Donnons d'abord à F, G, H des accroissements δF, δG, δH; d'où :

$$\delta\alpha = \frac{d\delta H}{dy} - \frac{d\delta G}{dz}.$$

On devra avoir

$$\delta J = \int dt\,d\tau\left[\sum \alpha\left(\frac{d\delta H}{dy} - \frac{d\delta G}{dz}\right) - \sum u\,\delta F\right] = 0,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\delta J = \int dt\,d\tau\left[\sum\left(\delta G\frac{d\alpha}{dz} - \delta H\frac{d\alpha}{dy}\right) - \sum u\,\delta F\right] = -\int dt\,d\tau\sum \delta F\left(u - \frac{d\gamma}{dy} + \frac{d\beta}{dz}\right) = 0,$$

d'où, en égalant à zéro le coefficient de l'arbitraire δF,

(3) $$u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}.$$

Cette relation nous donne (avec une intégration par parties) :

$$\int \sum F u\,d\tau = \int \sum F\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right)d\tau = \int \sum\left(\beta\frac{dF}{dz} - \gamma\frac{dF}{dy}\right)d\tau = \int \sum \alpha\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)d\tau.$$

ou

$$\int \Sigma F\,u\,d\tau = \int \Sigma\alpha^2 d\tau,$$

d'où enfin :

(4) $$J = \int dt\,d\tau\left(\frac{\Sigma f^2}{2} - \frac{\Sigma\alpha^2}{2}\right).$$

Désormais, et grâce à la relation (3), δJ est indépendant de δF et par conséquent de $\delta\alpha$; faisons varier maintenant les autres variables.

Il vient, en revenant à l'expression (1) de J,

$$\delta J = \int dt\,d\tau(\Sigma f\,\delta f - \Sigma F\,\delta u).$$

Mais f, g, h sont assujettis à la première des deux conditions (2), de sorte que

(5) $$\sum \frac{d\,\delta f}{dx} = \delta\rho,$$

et qu'il convient d'écrire :

(6) $$\delta J = \int dt\,d\tau \left[\sum f\,\delta f - \sum F\,\delta u - \psi\left(\sum \frac{d\,\delta f}{dx} - \delta\rho\right)\right].$$

Les principes du calcul des variations nous apprennent que l'on doit faire le calcul comme si, ψ étant une fonction arbitraire, δJ était représenté par l'expression (6) et si les variations n'étaient plus assujetties à la condition (5).

Nous avons, d'autre part,

$$\delta u = \frac{d\,\delta f}{dt} + \delta\rho\xi,$$

d'où, après intégration par parties,

(7) $$\delta J = \int dt\,d\tau \sum \delta f\left(f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx}\right) + \int dt\,d\tau\left(\psi\,\delta\rho - \sum F\,\delta\rho\xi\right).$$

Si nous supposons d'abord que les électrons ne subissent pas de variation, $\delta\rho = \delta\rho\xi = 0$ et la seconde intégrale est nulle. Comme δJ doit s'annuler, on doit avoir :

(8) $$f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} = 0.$$

Il reste donc dans le cas général :

(9) $$\delta J = \int dt\,d\tau\,(\psi\,\delta\rho - \Sigma F\,\delta\rho\xi).$$

Il reste à déterminer les forces qui agissent sur les électrons. Pour cela nous devons supposer qu'on applique à chaque élément d'électron une force complémentaire $-X\,d\tau$, $-Y\,d\tau$, $-Z\,d\tau$ et écrire que cette force fait équilibre aux forces d'origine électromagnétique. Soit U, V, W les composantes du déplacement de l'élément $d\tau$ d'électron, déplacement compté à partir d'une position initiale quelconque. Soient δU, δV, δW les variations de ce déplacement; le travail virtuel correspondant de la force complémentaire sera :

$$-\int \Sigma X\,\delta U\,d\tau,$$

de sorte que la condition d'équilibre dont venons de parler s'écrira :

(10) $$\delta J = -\int \Sigma X\,\delta U\,d\tau\,dt.$$

Il s'agit de transformer δJ. Pour cela commençons par chercher l'équation de continuité exprimant que la charge d'un électron se conserve par la variation.

Soient x_0, y_0, z_0 la position initiale d'un électron. Sa position actuelle sera :

$$x = x_0 + U, \qquad y = y_0 + V, \qquad z = z_0 + W.$$

Nous introduirons, en outre, une variable auxiliaire ε, qui produira les variations de nos diverses fonctions, de sorte que, pour une fonction A quelconque, on ait :

$$\delta A = \delta\varepsilon \frac{dA}{d\varepsilon}.$$

Il me sera commode, en effet, de pouvoir passer de la notation du calcul des variations, à celle du calcul différentiel ordinaire, ou inversement.

Nos fonctions pourront être regardées : 1° soit comme dépendant des cinq variables x, y, z, t, ε, de telle sorte qu'on reste toujours à la même place quand t et ε varient seuls : nous désignerons alors leurs dérivées par des d ordinaires; 2° soit comme dépendant des cinq variables $x_0, y_0, z_0, t, \varepsilon$, de telle sorte qu'on suive toujours un même électron quand t et ε varient seuls : nous désignerons alors leurs dérivées par des ∂ ronds. On aura alors :

(11) $$\xi = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt} + \xi\frac{dU}{dx} + \eta\frac{dU}{dy} + \zeta\frac{dU}{dz} = \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Désignons maintenant par Δ le déterminant fonctionnel de x, y, z par rapport à x_0, y_0, z_0 :

$$\Delta = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)}.$$

Si ε, x_0, y_0, z_0 restent constants nous donnons à t un accroissement ∂t, il en résultera pour x, y, z des accroissements ∂x, ∂y, ∂z, et pour Δ un accroissement $\partial\Delta$, et on aura :

$$\partial x = \xi\,\partial t, \qquad \partial y = \eta\,\partial t, \qquad \partial z = \zeta\,\partial t,$$

$$\Delta + \partial\Delta = \frac{\partial(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)};$$

d'où

$$1 + \frac{\partial\Delta}{\Delta} = \frac{\partial(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(x + \xi\partial t, y + \eta\partial t, z + \zeta\partial t)}{\partial(x, y, z)}.$$

On en déduit :

(12) $$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial t} = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}.$$

La masse de chaque électron étant invariable, on aura :

$$(13)\qquad \frac{\partial \rho\Delta}{\partial t} = 0,$$

d'où :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \rho \frac{d\xi}{dx} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} + \sum \xi \frac{d\rho}{dx}, \qquad \frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d\rho\xi}{dx} = 0.$$

Telles sont les différentes formes de l'équation de continuité en ce qui concerne la variable t. Nous trouvons des formes analogues en ce qui concerne la variable ε. Soit :

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\delta\varepsilon, \qquad \delta V = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\delta\varepsilon, \qquad \delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\delta\varepsilon,$$

il viendra :

$$(11\ bis)\qquad \delta U = \frac{dU}{d\varepsilon}\delta\varepsilon + \delta U\frac{dU}{dx} + \delta V\frac{dU}{dy} + \delta W\frac{dU}{dz},$$

$$(12\ bis)\qquad \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial \varepsilon} = \sum \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}, \qquad \frac{\partial \rho\Delta}{\partial \varepsilon} = 0,$$

$$(13\ bis)\qquad \delta\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon} + \sum \rho\frac{d\,\delta U}{dx} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon} = \frac{d\rho}{d\varepsilon} + \sum \frac{\delta U}{\delta\varepsilon}\frac{d\rho}{dx}, \qquad \delta\rho + \frac{d\rho\,\delta U}{dx} = 0.$$

On remarquera la différence entre la définition de $\delta U = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\delta\varepsilon$ et celle de $\delta\rho = \frac{d\rho}{d\varepsilon}\delta\varepsilon$; on remarquera que c'est bien cette définition de δU qui convient à la formule (10).

Cette dernière équation va nous permettre de transformer le premier terme de (9); nous trouvons en effet :

$$\int dt\, d\tau\, \psi\, \delta\rho = -\int dt\, d\tau\, \psi \sum \frac{d\rho\,\delta U}{dx},$$

ou, en intégrant par parties,

$$(14)\qquad \int dt\, d\tau\, \psi\, \delta\rho = \int dt\, d\tau \sum \rho\frac{d\psi}{dx}\delta U.$$

Proposons-nous maintenant de déterminer

$$\delta(\rho\xi) = \frac{d(\rho\xi)}{d\varepsilon}\delta\varepsilon.$$

Observons que $\rho\Delta$ ne peut dépendre que de x_0, y_0, z_0; en effet, si l'on considère un élément d'électron dont la position initiale est un parallélépipède rectangle dont les arêtes sont dx_0, dy_0, dz_0, la charge de cet élément est

$$\rho\Delta\, dx_0\, dy_0\, dz_0$$

et, cette charge devant demeurer constante, on a :

$$(15)\qquad \frac{\partial\rho\Delta}{\partial t} = \frac{\partial\rho\Delta}{\partial\varepsilon} = 0.$$

On en déduit :

$$(16)\qquad \frac{\partial^2\rho\Delta U}{\partial t\,\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\rho\Delta\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\Delta\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right).$$

Or on sait que pour une fonction A quelconque on a, par l'équation de continuité,

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial A\Delta}{\partial t} = \frac{dA}{dt} + \sum\frac{dA\xi}{dx}$$

et, de même,

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial A\Delta}{\partial\varepsilon} = \frac{dA}{d\varepsilon} + \sum\frac{dA\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}}{dx}.$$

On a donc :

$$(17)\qquad \frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\rho\Delta\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{d\rho\frac{\partial U}{\partial t}}{d\varepsilon} + \frac{d\left(\rho\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right)}{dx} + \frac{d\left(\rho\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial\varepsilon}\right)}{dy} + \frac{d\left(\rho\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial W}{\partial\varepsilon}\right)}{dz},$$

$$(17\ bis)\qquad \frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\Delta\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right) = \frac{d\rho\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}}{dt} + \frac{d\left(\rho\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right)}{dx} + \frac{d\left(\rho\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right)}{dy} + \frac{d\left(\rho\frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right)}{dz}.$$

Les seconds membres de (17) et (17 *bis*) doivent être égaux et, si l'on se souvient que

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \xi,\qquad \frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon = \delta U,\qquad \frac{d\rho\xi}{d\varepsilon}\delta\varepsilon = \delta\rho\xi,$$

il vient :

$$(18)\quad \delta\rho\xi + \frac{d(\rho\xi\delta U)}{dx} + \frac{d(\rho\xi\delta V)}{dy} + \frac{d(\rho\xi\delta W)}{dz} = \frac{d(\rho\delta U)}{dt} + \frac{d(\rho\xi\delta U)}{dx} + \frac{d(\rho\eta\delta U)}{dy} + \frac{d(\rho\zeta\delta U)}{dz}.$$

Transformons maintenant le second terme de (9); il vient :

$$\int dt\,d\tau\sum F\,\delta\rho\xi$$

$$= \int dt\,d\tau\left[\sum F\frac{d(\rho\delta U)}{dt} + \sum F\frac{d(\rho\eta\delta U)}{dy} + \sum F\frac{d(\rho\zeta\delta U)}{dz} - \sum F\frac{d(\rho\xi\delta V)}{dy} - \sum F\frac{d(\rho\xi\delta W)}{dz}\right].$$

Le second membre devient, par l'intégration par parties :

$$\int dt\,d\tau\left[-\sum\rho\delta U\frac{dF}{dt} - \sum\rho\eta\delta U\frac{dF}{dy} - \sum\rho\zeta\delta U\frac{dF}{dz} + \sum\rho\xi\delta V\frac{dF}{dy} + \sum\rho\xi\delta W\frac{dF}{dz}\right].$$

Remarquons maintenant que :

$$\sum \rho\xi\delta V \frac{dF}{dy} = \sum \rho\zeta\delta U \frac{dH}{dx}, \qquad \sum \rho\xi\delta W \frac{dF}{dz} = \sum \rho\eta\delta U \frac{dG}{dx}.$$

Si, en effet, dans les deux membres de ces relations, on développe les $\sum$, elles deviennent des identités; et souvenons-nous que

$$\frac{dH}{dx} - \frac{dF}{dz} = -\beta, \qquad \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} = \gamma,$$

le second membre en question deviendra :

$$\int dt\, d\tau \left[-\sum \rho\delta U \frac{dF}{dt} + \sum \rho\gamma\eta\delta U - \sum \rho\beta\zeta\delta U \right],$$

de sorte que finalement :

$$\delta J = \int dt\, d\tau \sum \rho\delta U \left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{dF}{dt} + \beta\zeta - \gamma\eta \right) = \int dt\, d\tau \sum \rho\delta U(-f + \beta\zeta - \gamma\eta).$$

En égalant le coefficient de δU dans les deux membres de (10), il vient :

$$X = f - \beta\zeta + \gamma\eta.$$

C'est l'équation (2) du paragraphe précédent.

3. – La transformation de Lorentz et le principe de moindre action.

Voyons si le principe de moindre action nous donne la raison du succès de la transformation de Lorentz. Il faut d'abord voir ce que cette transformation fait de l'intégrale :

$$J = \int dt\, d\tau \left(\frac{\Sigma f^2}{2} - \frac{\Sigma \alpha^2}{2} \right)$$

[form. (4) du paragraphe 2].

Nous trouvons d'abord

$$dt'\, d\tau' = l^4\, dt\, d\tau,$$

car x', y', z', t' sont liés à x, y, z, t par des relations linéaires dont le déterminant est égal à l^4; il vient ensuite :

$$(11) \quad \begin{cases} l^4 \Sigma f'^2 = f^2 + k^2(g^2 + h^2) + k^2\varepsilon^2(\beta^2 + \gamma^2) + 2k^2\varepsilon(g\gamma - h\beta), \\ l^4 \Sigma \alpha'^2 = \alpha^2 + k^2(\beta^2 + \gamma^2) + k^2\varepsilon^2(g^2 + h^2) + 2k^2\varepsilon(g\gamma - h\beta) \end{cases}$$

[form.(9) du paragraphe 1], d'où :

$$k^4(\Sigma f'^2 - \Sigma \alpha'^2) = \Sigma f^2 - \Sigma \alpha^2;$$

de sorte que si l'on pose :

$$J' = \int dt'\, d\tau' \left(\frac{\Sigma f'^2}{2} - \frac{\Sigma \alpha'^2}{2} \right),$$

il vient :

$$J' = J.$$

Il faut toutefois, pour que cette égalité soit justifiée, que les limites d'intégration soient les mêmes; jusqu'ici nous avons admis que t variait depuis t_0 jusqu'à t_1, et x, y, z depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. A ce compte, les limites d'intégration seraient altérées par la transformation de Lorentz; mais rien ne nous empêche de supposer $t_0 = -\infty$, $t_1 = +\infty$; avec ces conditions, les limites sont les mêmes pour J et pour J'.

Nous avons alors à comparer les deux équations suivantes analogues à l'équation (10) du paragraphe 2 :

$$(2) \quad \begin{cases} \delta J = \int \Sigma X \delta U \, d\tau \, dt, \\ \delta J' = \int \Sigma X' \delta U' \, d\tau' \, dt'. \end{cases}$$

Pour cela, il faut d'abord comparer $\delta U'$ à δU.

Considérons un électron dont les coordonnées initiales sont x_0, y_0, z_0; ses coordonnées à l'instant t, seront

$$x = x_0 + U, \qquad y = y_0 + V, \qquad z = z_0 + W.$$

Si l'on considère l'électron correspondant après la transformation de Lorentz, il aura pour coordonnées

$$x'_0 = kl(x_0 + \varepsilon t), \qquad y'_0 = l y_0, \qquad z'_0 = l z_0,$$

où

$$x' = x'_0 + U', \qquad y' = y'_0 + V', \qquad z' = z'_0 + W';$$

mais il n'atteindra ces coordonnées qu'à l'instant

$$t' = kl(t + \varepsilon x).$$

Si nous faisons subir à nos variables des variations δU, δV, δW et que nous donnions en même temps à t un accroissement δt, les coordonnées x, y, z

subiront un accroissement total

$$\delta x = \delta U + \xi \delta t, \qquad \delta y = \delta V + \eta \delta t, \qquad \delta z = \delta W + \zeta \delta t.$$

Nous aurons de même :

$$\delta x' = \delta U' + \xi' \delta t', \qquad \delta y' = \delta V' + \eta' \delta t', \qquad \delta z' = \delta W' + \zeta' \delta t'$$

et en vertu de la transformation de Lorentz :

$$\delta x' = kl(\delta x + \varepsilon \delta t), \qquad \delta y' = l \delta y, \qquad \delta z' = l \delta z, \qquad \delta t' = kl(\delta t + \varepsilon \delta x),$$

d'où, en supposant $\delta t = 0$, les relations :

$$\begin{aligned} \delta x' &= \delta U' + \xi' \delta t' = kl\, \delta U, \\ \delta y' &= \delta V' + \eta' \delta t' = l\, \delta V, \\ \delta t' &= kl\varepsilon\, \delta U. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\xi' = \frac{\xi + \varepsilon}{1 + \xi\varepsilon}, \qquad \eta' = \frac{\eta}{k(1 + \xi\varepsilon)};$$

il viendra, en remplaçant $\delta t'$ par sa valeur,

$$\begin{aligned} kl(1 + \xi\varepsilon)\, \delta U &= \delta U'(1 + \xi\varepsilon) + (\xi + \varepsilon) kl\varepsilon\, \delta U, \\ l(1 + \xi\varepsilon)\, \delta V &= \delta V'(1 + \xi\varepsilon) + \eta l \varepsilon\, \delta U. \end{aligned}$$

Si nous nous rappelons la définition de k, nous tirerons de là :

$$\delta U = \frac{k}{l} \delta U' + \frac{k\varepsilon}{l} \xi \delta U',$$

$$\delta V = \frac{1}{l} \delta V' + \frac{k\varepsilon}{l} \eta \delta U',$$

et, de même,

$$\delta W = \frac{1}{l} \delta W' + \frac{k\varepsilon}{l} \zeta \delta U';$$

d'où

(3) $$\Sigma X \delta U = \frac{1}{l}(kX\, \delta U' + Y\, \delta V' + Z\, \delta W') + \frac{k\varepsilon}{l} \delta U' \Sigma X \xi.$$

Or, en vertu des équations (2), on doit avoir :

$$\int \Sigma X' \delta U'\, dt'\, d\tau' = \int \Sigma X \delta U\, dt\, d\tau = \frac{1}{l^4} \int \Sigma X \delta U\, dt'\, d\tau'.$$

En remplaçant $\Sigma X\, \delta U$ par sa valeur (3) et identifiant, il vient :

$$X' = \frac{k}{l^5} X + \frac{k\varepsilon}{l^5} \Sigma X \xi, \qquad Y' = \frac{1}{l^5} Y, \qquad Z' = \frac{1}{l^5} Z.$$

Ce sont les équations (11) du paragraphe 1. Le principe de moindre action nous conduit donc au même résultat que l'analyse du paragraphe 1.

Si nous nous reportons aux formules (1), nous voyons que $\Sigma f^2 - \Sigma \alpha^2$ n'est pas altérée par la transformation de Lorentz, sauf un facteur constant; il n'en est pas de même de l'expression $\Sigma f^2 + \Sigma \alpha^2$ qui figure dans l'énergie. Si nous nous bornons au cas où ε est assez petit pour qu'on en puisse négliger le carré de sorte que $k = 1$ et si nous supposons aussi $l = 1$ nous trouvons :

$$\Sigma f'^2 = \Sigma f^2 + 2\varepsilon(g\gamma - h\beta),$$
$$\Sigma \alpha'^2 = \Sigma \alpha^2 + 2\varepsilon(g\gamma - h\beta),$$

ou, par addition,

$$\Sigma f'^2 + \Sigma \alpha'^2 = \Sigma f^2 + \Sigma \alpha^2 + 4\varepsilon(g\gamma - h\beta).$$

4. — Le groupe de Lorentz.

Il importe de remarquer que les transformations de Lorentz forment un groupe.

Si l'on pose en effet :

$$x' = kl(x + \varepsilon t), \qquad y' = ly, \qquad z' = lz, \qquad t' = kl(t + \varepsilon x),$$

et, d'autre part,

$$x'' = k'l'(x' + \varepsilon' t'), \qquad y'' = l'y', \qquad z'' = l'z', \qquad t'' = k'l'(t' + \varepsilon' x'),$$

avec

$$k^{-2} = 1 - \varepsilon^2, \qquad k'^{-2} = 1 - \varepsilon'^2,$$

il viendra :

$$x'' = k''l''(x + \varepsilon'' t), \qquad y'' = l''y, \qquad z'' = l''z, \qquad t'' = k''l''(t + \varepsilon'' x),$$

avec

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{1 + \varepsilon\varepsilon'}, \qquad l'' = ll', \qquad k'' = kk'(1 + \varepsilon\varepsilon') = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon''^2}}.$$

Si nous donnons à l la valeur 1, que nous supposions ε infiniment petit,

$$x' = x + \delta x, \qquad y' = y + \delta y, \qquad z' = z + \delta z, \qquad t' = t + \delta t,$$

il viendra :

$$\delta x = \varepsilon t, \qquad \delta y = \delta z = 0, \qquad \delta t = \varepsilon x.$$

C'est là la transformation infinitésimale génératrice du groupe, que

j'appellerai la transformation T_1 et qui d'après la notation de Lie peut s'écrire :

$$t\frac{d\varphi}{dx} + x\frac{d\varphi}{dt} = T_1.$$

Si nous supposons $\varepsilon = 0$ et $l = 1 + \delta l$, nous trouverions au contraire

$$\delta x = x\,\delta l, \qquad \delta y = y\,\delta l, \qquad \delta z = z\,\delta l, \qquad \delta t = t\,\delta l$$

et nous aurions une autre transformation infinitésimale T_0 du groupe (à supposer que l et ε soient regardés comme des variables indépendantes) et on aurait avec la notation de Lie :

$$T_0 = x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi}{dy} + z\frac{d\varphi}{dz} + t\frac{d\varphi}{dt}.$$

Mais on pourrait faire jouer à l'axe des y ou à celui des z le rôle particulier que nous avons fait jouer à l'axe des x ; on aurait ainsi deux autres transformations infinitésimales :

$$T_2 = t\frac{d\varphi}{dy} + y\frac{d\varphi}{dt},$$

$$T_3 = t\frac{d\varphi}{dz} + z\frac{d\varphi}{dt},$$

qui n'altéreraient pas non plus les équations de Lorentz.

On peut former les combinaisons imaginées par Lie, telles que

$$[T_1, T_2] = x\frac{d\varphi}{dy} - y\frac{d\varphi}{dx};$$

mais il est aisé de voir que cette transformation équivaut à un changement d'axes de coordonnées, les axes tournant d'un angle très petit autour de l'axe des z. Nous ne devons donc pas nous étonner si un pareil changement n'altère pas la forme des équations de Lorentz, évidemment indépendantes du choix des axes.

Nous sommes donc amenés à envisager un groupe continu que nous appellerons le *groupe de* Lorentz et qui admettra comme transformations infinitésimales :

1° La transformation T_0 qui sera permutable à toutes les autres ;

2° Les trois transformations T_1, T_2, T_3 ;

3° Les trois rotations $[T_1, T_2]$, $[T_2, T_3]$, $[T_3, T_1]$.

Une transformation quelconque de ce groupe pourra toujours se décomposer

en une transformation de la forme :

$$x' = lx, \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = lt$$

et une transformation linéaire qui n'altère pas la forme quadratique

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Nous pouvons encore engendrer notre groupe d'une autre manière. Toute transformation du groupe pourra être regardée comme une transformation de la forme :

$$(1) \qquad x' = kl(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl(t + \varepsilon x)$$

précédée et suivie d'une rotation convenable.

Mais pour notre objet, nous ne devons considérer qu'une partie des transformations de ce groupe; nous devons supposer que l est une fonction de ε, et il s'agit de choisir cette fonction, de façon que cette partie du groupe, que j'appellerai P, forme encore un groupe.

Faisons tourner le système de 180° autour de l'axe des y, nous devrons retrouver une transformation qui devra encore appartenir à P. Or cela revient à changer le signe de x, x', z et z'; on trouve ainsi :

$$(2) \qquad x' = kl(x - \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl(t - \varepsilon x).$$

Donc l ne change pas quand on change ε en $-\varepsilon$.

D'autre part, si P est un groupe, la substitution inverse de (1), qui s'écrit :

$$(3) \qquad x' = \frac{k}{l}(x - \varepsilon t), \quad y' = \frac{y}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad t' = \frac{k}{l}(t - \varepsilon x),$$

devra également appartenir à P; elle devra donc être identique à (2), c'est-à-dire que

$$l = \frac{1}{l}.$$

On devra donc avoir $l = 1$.

5. — Ondes de Langevin.

M. Langevin a mis sous une forme particulièrement élégante les formules qui définissent le champ électromagnétique produit par le mouvement d'un électron unique.

Reprenons les équations

$$(1) \qquad \square\psi = -\rho, \qquad \square F = -\rho\xi.$$

On sait qu'on peut les intégrer par les potentiels retardés et qu'on a :

$$(2) \qquad \psi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho_1\, d\tau_1}{r}, \qquad F = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho_1 \xi_1\, d\tau_1}{r}.$$

Dans ces formules on a :

$$d\tau_1 = dx_1\, dy_1\, dz_1, \qquad r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

tandis que ρ_1 et ξ_1 sont les valeurs de ρ et de ξ au point x_1, y_1, z_1 et à l'instant

$$t_1 = t - r.$$

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'une molécule d'électron à l'instant t;

$$x_1 = x_0 + U, \qquad y_1 = y_0 + V, \qquad z_1 = z_0 + W$$

ses coordonnées à l'instant t_1.

U, V, W sont des fonctions de x_0, y_0, z_0, de sorte que nous pourrons écrire :

$$dx_1 = dx_0 + \frac{dU}{dx_0}dx_0 + \frac{dU}{dy_0}dy_0 + \frac{dU}{dz_0}dz_0 + \xi_1\, dt_1;$$

et si l'on suppose t constant, ainsi que x, y et z :

$$dt_1 = +\sum \frac{x - x_1}{r_1}\, dx_1.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$dx_1\left(1 + \xi_1\frac{x_1 - x}{r}\right) + dy_1\,\xi_1\frac{y_1 - y}{r} + dz_1\,\xi_1\frac{z_1 - z}{r} = dx_0\left(1 + \frac{dU}{dx_0}\right) + dy_0\frac{dU}{dy_0} + dz_0\frac{dU}{dz_0}$$

avec les deux autres équations qu'on peut en déduire par permutation circulaire.

Nous avons donc :

$$(3) \qquad d\tau_1\left|1 + \xi_1\frac{x_1 - x}{r},\ \xi_1\frac{y_1 - y}{r},\ \xi_1\frac{z_1 - z}{r}\right| = d\tau_0\left|1 + \frac{dU}{dx_0},\ \frac{dU}{dy_0},\ \frac{dU}{dz_0}\right|,$$

en posant

$$d\tau_0 = dx_0\, dy_0\, dz_0.$$

Étudions les déterminants qui figurent dans les deux membres de (3) et d'abord dans le premier membre; si l'on cherche à le développer, on voit que les termes du second et du troisième degré par rapport à ξ_1, η_1, ζ_1 disparaissent

et que le déterminant est égal à

$$1 + \xi_1 \frac{x_1 - x}{r} + \eta_1 \frac{y_1 - y}{r} + \zeta_1 \frac{z_1 - z}{r} = 1 + \omega,$$

ω désignant la composante radiale de la vitesse ξ_1, η_1, ζ_1, c'est-à-dire la composante dirigée suivant le rayon vecteur qui va du point x, y, z au point x_1, y_1, z_1.

Pour obtenir le second déterminant, j'envisage les coordonnées des différentes molécules de l'électron à un instant t'_1 qui est le même pour toutes les molécules, mais de telle façon que pour la molécule que j'envisage on ait $t_1 = t'_1$. Les coordonnées d'une molécule seront alors :

$$x'_1 = x_0 + U', \qquad y'_1 = y_0 + V', \qquad z'_1 = z_0 + W',$$

U', V', W' étant ce que deviennent U, V, W quand on y remplace t_1 par t'_1; comme t'_1 est le même pour toutes les molécules, on aura :

$$dx'_1 = dx_0 \left(1 + \frac{dU'}{dx_0}\right) + dy_0 \frac{dU'}{dy_0} + dz_0 \frac{dU'}{dz_0}$$

et, par conséquent,

$$d\tau'_1 = d\tau_0 \left| 1 + \frac{dU'}{dx_0}, \frac{dU'}{dy_0}, \frac{dU'}{dz_0} \right|,$$

en posant

$$d\tau'_1 = dx'_1 \, dy'_1 \, dz'_1.$$

Mais l'élément de charge électrique est

$$d\mu_1 = \rho_1 \, d\tau'_1$$

et de plus *pour la molécule envisagée*, on a $t_1 = t'_1$ et par conséquent, $\frac{dU'}{dx_0} = \frac{dU}{dx_0}$, ... ; nous pouvons donc écrire :

$$d\mu_1 = \rho_1 \, d\tau_0 \left| 1 + \frac{dU}{dx_0}, \frac{dU}{dy_0}, \frac{dU}{dz_0} \right|,$$

de sorte que l'équation (3) deviendra :

$$\rho_1 \, d\tau_1 (1 + \omega) = d\mu_1$$

et les équations (2) :

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\mu_1}{r(1+\omega)}, \qquad F = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\xi_1 \, d\mu_1}{r(1+\omega)}.$$

Si nous avons affaire à un électron unique, nos intégrales se réduiront à un

seul élément, pourvu que l'on ne considère que des points x, y, z suffisamment éloignés pour que r et ω aient sensiblement la même valeur pour tous les points de l'électron. Les potentiels ψ, F, G, H dépendront de la position de cet électron, et aussi de sa vitesse, car non seulement ξ_1, η_1, ζ_1 figurent au numérateur dans F, G, H, mais la composante radiale ω figure au dénominateur. Il s'agit bien entendu de sa position et de sa vitesse à l'instant t_1.

Les dérivées partielles de ψ, F, G, H par rapport à t, x, y, z (et, par conséquent, les champs électrique et magnétique) dépendront, en outre, de son accélération. De plus, elles en dépendront *linéairement*, puisque dans ces dérivées cette accélération s'introduit par suite d'une différentiation unique.

Langevin a été ainsi conduit à distinguer dans les champs électrique et magnétique les termes qui ne dépendent pas de l'accélération (c'est ce qu'il appelle l'onde de vitesse) et ceux qui sont proportionnels à l'accélération (c'est ce qu'il appelle l'onde d'accélération).

Le calcul de ces deux ondes est facilité par la transformation de Lorentz. Nous pouvons, en effet, appliquer cette transformation au système, de façon que la vitesse de l'électron unique envisagé devienne nulle. Nous prendrons pour l'axe des x la direction de cette vitesse avant la transformation, de sorte que, à l'instant t_1,

$$\eta_1 = \zeta_1 = 0,$$

et nous prendrons $\varepsilon = -\xi_1$, de telle façon que

$$\xi'_1 = \eta'_1 = \zeta'_1 = 0.$$

Nous pouvons donc ramener le calcul des deux ondes au cas où la vitesse de l'électron est nulle. Commençons par l'onde de vitesse; nous pouvons remarquer d'abord que cette onde est la même que si le mouvement de l'électron était uniforme.

Si la vitesse de l'électron est nulle, on a :

$$\omega = 0, \qquad F = G = H = 0, \qquad \psi' = \frac{\mu_1}{4\pi r},$$

μ_1 étant la charge électrique de l'électron. La vitesse ayant été ramenée à zéro par la transformation de Lorentz, nous avons donc :

$$F' = G' = H' = 0, \qquad \psi' = \frac{\mu_1}{4\pi r'},$$

r' étant la distance du point x', y', z' au point x'_1, y'_1, z'_1, et par conséquent :

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 0,$$

$$f' = \frac{\mu_1(x' - x'_1)}{4\pi r'^3}, \qquad g' = \frac{\mu_1(y' - y'_1)}{4\pi r'^3}, \qquad h' = \frac{\mu_1(z' - z'_1)}{4\pi r'^3}.$$

Faisons maintenant la transformation inverse de celle de Lorentz pour trouver le champ véritable correspondant à une vitesse $-\varepsilon, 0, 0$. Nous trouvons, en nous reportant aux équations (9) et (3) du paragraphe I :

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha = 0, \qquad \beta = \varepsilon h, \qquad \gamma = -\varepsilon g, \\ f = \dfrac{\mu_1 k l^3}{4\pi r'^3}(x + \varepsilon t - x_1 - \varepsilon t_1), \qquad g = \dfrac{\mu_1 k l^3}{4\pi r'^3}(y - y_1), \qquad h = \dfrac{\mu_1 k l^3}{4\pi r'^3}(z - z_1). \end{cases}$$

On voit que le champ magnétique est perpendiculaire à l'axe des x (direction de la vitesse) et au champ électrique, et que le champ électrique est dirigé vers le point :

$$(5) \qquad x_1 + \varepsilon(t_1 - t), \quad y_1, \quad z_1.$$

Si l'électron continuait à se mouvoir d'un mouvement rectiligne et uniforme avec la vitesse qu'il avait à l'instant t_1, c'est-à-dire avec la vitesse $-\varepsilon, 0, 0$, ce point (5) serait celui qu'il occuperait à l'instant t.

Passons à l'onde d'accélération ; nous pouvons, grâce à la transformation de Lorentz, ramener sa détermination au cas où la vitesse est nulle. C'est le cas qui est réalisé si l'on imagine un électron qui exécute des oscillations d'amplitude très petites, mais très rapides, de façon que les déplacements et les vitesses soient infiniment petits, mais que les accélérations soient finies. On retombe ainsi sur le champ qui a été étudié dans le célèbre Mémoire de Hertz intitulé *Die Kräfte elektrischer Schwingungen nach der Maxwell'schen Theorie* et cela pour un point très éloigné. Dans ces conditions :

1° Les deux champs électrique et magnétique sont égaux entre eux ;

2° Ils sont perpendiculaires entre eux;

3° Ils sont perpendiculaires à la normale à la sphère d'onde, c'est-à-dire à la sphère d'onde, c'est-à-dire à la sphère dont le centre est le point x_1, y_1, z_1.

Je dis que ces trois propriétés subsisteront encore quand la vitesse ne sera pas nulle, et pour cela, il me suffit de montrer qu'elles ne sont pas altérées par la transformation de Lorentz.

Soit en effet A l'intensité commune des deux champs, soit

$$(x - x_1) = r\lambda, \qquad (y - y_1) = r\mu, \qquad (z - z_1) = r\nu, \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Ces propriétés s'exprimeront par les égalités :

$$\Lambda^2 = \Sigma f^2 = \Sigma \alpha^2, \qquad \Sigma f\alpha = 0, \qquad \Sigma f(x - x_1) = 0, \qquad \Sigma\alpha(x - x_1) = 0,$$
$$\Sigma f\lambda = 0, \qquad \Sigma\alpha\lambda = 0;$$

ce qui veut dire encore que

$$\frac{f}{\Lambda}, \quad \frac{g}{\Lambda}, \quad \frac{h}{\Lambda};$$
$$\frac{\alpha}{\Lambda}, \quad \frac{\beta}{\Lambda}, \quad \frac{\gamma}{\Lambda};$$
$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu,$$

sont les cosinus directeurs de trois directions rectangulaires, et l'on en déduit les relations :

$$f = \beta\nu - \gamma\mu, \qquad \alpha = h\mu - g\nu$$

ou

$$(6) \qquad fr = \beta(z - z_1) - \gamma(y - y_1), \qquad \alpha r = h(y - y_1) - g(z - z_1),$$

avec les équations que l'on en peut déduire par symétrie.

Si nous reprenons les équations (3) du paragraphe 1, nous trouvons :

$$(7) \qquad \begin{cases} x' - x'_1 = kl[(x - x_1) + \varepsilon(t - t_1)] = kl[(x - x_1) + \varepsilon r], \\ y' - y'_1 = l(y - y_1), \\ z' - z'_1 = l(z - z_1). \end{cases}$$

Nous avons trouvé plus haut au paragraphe 3 :

$$l^4(\Sigma f'^2 - \Sigma\alpha'^2) = \Sigma f^2 - \Sigma\alpha^2.$$

Donc $\Sigma f^2 = \Sigma\alpha^2$ entraîne $\Sigma f'^2 = \Sigma\alpha'^2$.

D'autre part, en partant des équations (9) du paragraphe 1, on trouve :

$$l^4 \Sigma f'\alpha' = \Sigma f\alpha,$$

ce qui montre que $\Sigma f\alpha = 0$ entraîne $\Sigma f'\alpha' = 0$.

Je dis maintenant que

$$(8) \qquad \Sigma f'(x' - x'_1) = 0, \qquad \Sigma\alpha'(x' - x'_1) = 0.$$

En effet, en vertu des équations (7) [ainsi que des équations (9) du paragraphe 1] les premiers membres des deux équations (8) s'écrivent respectivement :

$$\frac{k}{l}\Sigma f(x - x_1) + \frac{k\varepsilon}{l}[fr + \gamma(y - y_1) - \beta(z - z_1)],$$
$$\frac{k}{l}\Sigma\alpha(x - x_1) + \frac{k\varepsilon}{l}[\alpha r - h(y - y_1) + g(z - z_1)].$$

Ils s'annulent donc en vertu des équations

$$\Sigma f(x - x_1) = \Sigma\alpha(x - x_1) = 0$$

et en vertu des équations (6). Or c'est là précisément ce qu'il s'agissait de démontrer.

On peut d'ailleurs arriver au même résultat par de simples considérations d'homogénéité.

En effet, ψ, F, G, H sont des fonctions de $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, $\xi_1 = \frac{dx_1}{dt_1}$, $\eta_1 = \frac{dy_1}{dt_1}$, $\zeta_1 = \frac{dz_1}{dt_1}$ homogènes de degré — 1 par rapport à x, y, z, t, x_1, y_1, z_1, t_1 et à leurs différentielles.

Donc les dérivées de ψ, F, G, H par rapport à x, y, z, t (et, par conséquent, aussi les deux champs f, g, h; α, β, γ) seront homogènes de degré — 2 par rapport aux mêmes quantités, si nous nous rappelons d'ailleurs que la relation

$$t - t_1 = r = \sqrt{\Sigma(x - x_1)^2}$$

est homogène par rapport à ces quantités.

Or ces dérivées ou ces champ dépendent des $x - x_1$, des vitesses $\frac{dx_1}{dt_1}$ et des accélérations $\frac{d^2x_1}{dt_1^2}$; ils se composent d'un terme indépendant des accélérations (onde de vitesse) et d'un terme linéaire par rapport aux accélérations (onde d'accélération). Or $\frac{dx_1}{dt_1}$ est homogène de degré 0 et $\frac{d^2x_1}{dt_1^2}$ homogène de degré — 1; d'où il suit que l'onde de vitesse est homogène de degré — 2 par rapport à $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ et l'onde d'accélération homogène de degré — 1. Donc, en un point très éloigné l'onde d'accélération est prépondérante et peut par conséquent être regardée comme se confondant avec l'onde totale. De plus, la loi d'homogénéité nous montre que l'onde d'accélération est semblable à elle-même en un point quelconque. Elle est donc, en un point quelconque, semblable à l'onde totale en un point éloigné. Or en un point éloigné la perturbation ne peut se propager par ondes planes, de sorte que les deux champs doivent être égaux, perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à la direction de propagation.

Je me bornerai à renvoyer pour plus de détails au Mémoire de M. Langevin dans le *Journal de Physique* (Année 1905).

6. — Contraction des électrons.

Supposons un électron unique animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. D'après ce que nous venons de voir, on peut, grâce à la

transformation de Lorentz, ramener l'étude du champ déterminé par cet électron au cas où l'électron serait immobile; la transformation de Lorentz remplace donc l'électron réel en mouvement par un électron idéal immobile.

Soit $\alpha, \beta, \gamma; f, g, h$ le champ réel; soit $\alpha', \beta', \gamma'; f', g', h'$ ce que devient le champ après la transformation de Lorentz, de sorte que le champ idéal α', f' correspond au cas d'un électron immobile; on a :

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 0, \qquad f' = -\frac{d\psi'}{dx'}, \qquad g' = -\frac{d\psi'}{dy'}, \qquad h' = -\frac{d\psi'}{dz'};$$

et pour le champ réel [en vertu des formules (9) du paragraphe I] :

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha = 0, & \beta = \varepsilon h, & \gamma = -\varepsilon g, \\ f = l^2 f', & g = k l^2 g', & h = k l^2 h'. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de déterminer l'énergie totale due au mouvement de l'électron, l'action correspondante et la quantité de mouvement électromagnétique, afin de pouvoir calculer les masses électromagnétiques de l'électron. Pour un point éloigné, il suffit de considérer l'électron comme réduit à un point unique; on est ainsi ramené aux formules (4) du paragraphe précédent qui généralement peuvent convenir. Mais ici elles ne sauraient suffire, parce que l'énergie est principalement localisée dans les parties de l'éther les plus voisines de l'électron.

On peut faire à ce sujet plusieurs hypothèses.

D'après celle d'Abraham, les électrons seraient sphériques et indéformables.

Alors, quand on appliquerait la transformation de Lorentz, comme l'électron réel serait sphérique, l'électron idéal deviendrait un ellipsoïde. L'équation de cet ellipsoïde serait d'après le paragraphe I :

$$k^2(x' - \varepsilon t' - \xi t' - \varepsilon\xi x')^2 + (y' - \eta k t' + \eta k \varepsilon x')^2 + (z' - \zeta k t' + \zeta k \varepsilon x')^2 = l^2 r^2.$$

Mais ici l'on a :

$$\xi + \varepsilon = \eta = \zeta = 0, \qquad 1 + \varepsilon\xi = 1 - \varepsilon^2 = \frac{1}{k^2},$$

de sorte que l'équation de l'ellipsoïde devient :

$$\frac{x'^2}{k^2} + y'^2 + z'^2 = l^2 r^2.$$

Si le rayon de l'électron réel est r, les axes de l'électron idéal seraient donc :

$$klr, \quad lr, \quad lr.$$

Dans l'hypothèse de Lorentz, au contraire, les électrons en mouvement seraient déformés, de telle façon que ce serait l'électron réel qui deviendrait un ellipsoïde, tandis que l'électron idéal immobile serait toujours une sphère de rayon r; les axes de l'électron réel seront alors :

$$\frac{r}{lk}, \quad \frac{r}{l}, \quad \frac{r}{l}.$$

Désignons par

$$A = \frac{1}{2}\int f^2\, d\tau$$

l'*énergie électrique longitudinale*; par

$$B = \frac{1}{2}\int (g^2 + h^2)\, d\tau$$

l'*énergie électrique transversale*; par

$$C = \frac{1}{2}\int (\beta^2 + \gamma^2)\, d\tau$$

l'*énergie magnétique transversale*. Il n'y a pas d'énergie magnétique longitudinale, puisque $\alpha = \alpha' = 0$. Désignons par A', B', C' les quantités correspondantes dans le système idéal. On trouve d'abord :

$$C' = 0, \qquad C = \varepsilon^2 B.$$

D'autre part, nous pouvons observer que le champ réel dépend seulement de $x + \varepsilon t$, y et z, et écrire :

$$d\tau = d(x + \varepsilon t)\, dy\, dz,$$
$$d\tau' = dx'\, dy'\, dz' = kl^3\, d\tau;$$

d'où

$$A' = kl^{-1} A, \qquad B' = k^{-1} l^{-1} B, \qquad A = \frac{lA'}{k}, \qquad B = klB'.$$

Dans l'hypothèse de Lorentz on a $B' = 2A'$, et A', inversement proportionnel au rayon de l'électron, est une constante indépendante de la vitesse de l'électron réel; on trouve ainsi pour l'énergie totale :

$$A + B + C = A'lk(3 + \varepsilon^2)$$

et pour l'action (par unité de temps) :

$$A + B - C = \frac{3A'l}{k}.$$

Calculons maintenant la quantité de mouvement électromagnétique ; nous trouverons :

$$D = \int (g\gamma - h\beta)\,d\tau = -\varepsilon \int (g^2 + h^2)\,d\tau = -2\varepsilon B = -4\varepsilon k l A'.$$

Mais on doit avoir certaines relations entre l'énergie $E = A + B + C$, l'action par unité de temps $H = A + B - C$, et la quantité de mouvement D. La première de ces relations est :

$$E = H - \varepsilon \frac{dH}{d\varepsilon},$$

la seconde est

$$\frac{dD}{d\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{dE}{d\varepsilon};$$

d'où :

(2) $$D = \frac{dH}{d\varepsilon}, \qquad E = H - \varepsilon D.$$

La seconde des équations (2) est toujours satisfaite ; mais la première ne l'est que si

$$l = (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{6}} = k^{-\frac{1}{3}},$$

c'est-à-dire si le volume de l'électron idéal est égal à celui de l'électron réel, ou encore si le volume de l'électron est constant ; c'est l'hypothèse de Langevin.

Cela est en contradiction avec le résultat du paragraphe 4 et avec le résultat obtenu par Lorentz par une autre voie. C'est cette contradiction qu'il s'agit d'expliquer.

Avant d'aborder cette explication, j'observe que, quelle que soit l'hypothèse adoptée, nous aurons

$$H = A + B - C = \frac{l}{k}(A' + B'),$$

ou, à cause de $C' = 0$,

(3) $$H = \frac{l}{k} H'.$$

Nous pouvons rapprocher ce résultat de l'équation $J = J'$ obtenue au paragraphe 3.

Nous avons en effet :

$$J = \int H\,dt, \qquad J' = \int H'\,dt'.$$

Nous observerons que l'état du système dépend seulement de $x + \varepsilon t$, y et z,

c'est-à-dire de x', y', z', et que nous avons :

$$t' = \frac{l}{k} t - \varepsilon x',$$

(4) $$dt' = \frac{l}{k} dt.$$

En rapprochant les équations (3) et (4), on trouve $J = J'$.

Plaçons-nous dans une hypothèse quelconque, qui pourra être, soit celle de Lorentz soit celle d'Abraham, soit celle de Langevin, soit une hypothèse intermédiaire.

Soient

$$r, \quad \theta r, \quad \theta r$$

les trois axes de l'électron réel ; ceux de l'électron idéal seront :

$$klr, \quad \theta lr, \quad \theta lr.$$

Alors $A' + B'$ sera l'énergie électrostatique due à un ellipsoïde ayant pour axes klr, θlr, θlr.

Que l'on suppose l'électricité répandue à la surface de l'électron comme à celle d'un conducteur ou uniformément répandue à l'intérieur de cet électron. cette énergie sera de la forme :

$$A' + B' = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right)}{klr},$$

où φ est une fonction connue.

L'hypothèse d'Abraham consiste à supposer :

$$r = \text{const.}, \qquad \theta = 1.$$

Celle de Lorentz :

$$l = 1, \qquad kr = \text{const.}, \qquad \theta = k.$$

Celle de Langevin :

$$l = k^{-\frac{1}{3}}, \qquad k = \theta, \qquad klr = \text{const.}$$

On trouve ensuite :

$$H = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right)}{k^2 r}.$$

Abraham trouve, à la différence des notations près (*Göttinger Nachrichten*,

1902, p. 37) :

$$H = \frac{a}{r}\,\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

a étant une constante. Or, dans l'hypothèse d'Abraham, on a $\theta = 1$; donc :

$$(5)\qquad \varphi\left(\frac{1}{k}\right) = ak^2\,\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{a}{\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

ce qui définit la fonction φ.

Cela posé, imaginons que l'électron soit soumis à une liaison, de telle façon qu'il y ait une relation entre r et θ; dans l'hypothèse de Lorentz cette relation serait $\theta r =$ const., dans celle de Langevin $\theta^2 r^3 =$ const. Nous supposerons d'une façon plus générale

$$r = b\theta^m,$$

b étant une constante ; d'où :

$$H = \frac{1}{bk^2}\theta^{-m}\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right).$$

Quelle sera la forme que prendra l'électron quand la vitesse deviendra $-\varepsilon t$, *si l'on ne suppose pas l'intervention d'autres forces que celles de liaison?* Cette forme sera définie par l'égalité :

$$(6)\qquad \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0,$$

ou

$$-m\theta^{-m-1}\varphi + \theta^{-m}k^{-1}\varphi' = 0,$$

ou

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{mk}{\theta}.$$

Si nous voulons que l'équilibre ait lieu de telle façon que $\theta = k$, il faut que pour $\frac{\theta}{k} = 1$, la dérivée logarithmique de φ soit égale à m.

Si nous développons $\frac{1}{k}$ et le second membre de (5) suivant les puissances de ε, l'équation (5) devient :

$$\varphi\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right) = a\left(1+\frac{\varepsilon^2}{3}\right),$$

en négligeant les puissances supérieures de ε.

En différentiant, il vient :

$$-\varepsilon\varphi'\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right) = \frac{2}{3}\varepsilon a.$$

Pour $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire quand l'argument de φ est égal à 1, ces équations deviennent :

$$(7) \qquad \varphi = a, \qquad \varphi' = -\frac{2}{3}a, \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{2}{3}.$$

On doit donc avoir $m = -\frac{2}{3}$ conformément à l'hypothèse de Langevin.

Ce résultat doit être rapproché de celui qui est relatif à la première équation (2) et dont en réalité il ne diffère pas. En effet, supposons que tout élément $d\tau$ de l'électron soit soumis à une force $X\,d\tau$ parallèle à l'axe des x, X étant le même pour tous les éléments ; nous aurons alors, conformément à la définition de la quantité de mouvement :

$$\frac{dD}{dt} = \int X\,d\tau.$$

D'autre part, le principe de moindre action nous donne :

$$\delta J = \int X\,\delta U\,d\tau\,dt, \qquad J = \int H\,dt, \qquad \delta J = \int D\,\delta U\,dt,$$

δU étant le déplacement du centre de gravité de l'électron ; H dépend de θ et de ε, si l'on admet que r est lié à θ par l'équation de liaison ; on a alors :

$$\delta J = \int \left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon}\delta\varepsilon + \frac{\partial H}{\partial \theta}\delta\theta\right) dt.$$

D'autre part, $\delta\varepsilon = -\frac{d\,\delta U}{dt}$; d'où, en intégrant par parties :

$$\int D\,\delta\varepsilon\,dt = \int D\,\delta U\,dt,$$

ou

$$\int \left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon}\delta\varepsilon + \frac{\partial H}{\partial \theta}\delta\theta\right) dt = \int D\,\delta\varepsilon\,dt;$$

d'où

$$D = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}, \qquad \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0.$$

Mais la dérivée $\frac{dH}{d\varepsilon}$, qui figure dans le second membre de la première équation (2), c'est la dérivée prise en supposant θ exprimé en fonction de ε, de sorte que

$$\frac{dH}{d\varepsilon} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{d\theta}{d\varepsilon}.$$

L'équation (2) équivaut donc à l'équation (6).

La conclusion est que si l'électron est soumis à une liaison entre ses trois axes, *et si aucune autre force n'intervient en dehors des forces de liaison*, la forme que prendra cet électron, quand il sera animé d'une vitesse uniforme, ne pourra être telle que l'électron idéal correspondant soit une sphère, que dans le cas où la liaison sera que le volume soit constant, conformément à l'hypothèse de Langevin.

Nous sommes amené de la sorte à nous poser le problème suivant : quelles forces supplémentaires, autres que les forces de liaison, serait-il nécessaire de faire intervenir pour rendre compte de la loi de Lorentz ou, plus généralement, de toute loi autre que celle de Langevin?

L'hypothèse la plus simple, et la première que nous devions examiner, c'est que ces forces supplémentaires dérivent d'un potentiel spécial dérivant des trois axes de l'ellipsoïde et, par conséquent, de θ et de r; soit $F(\theta, r)$ ce potentiel; dans ce cas l'action aura pour expression :

$$J = \int [H + F(\theta, r)]\,dt$$

et les conditions d'équilibre s'écriront :

$$(8)\qquad \frac{dH}{d\theta} + \frac{dF}{d\theta} = 0, \qquad \frac{dH}{dr} + \frac{dF}{dr} = 0.$$

Si nous supposons r et θ liés par la liaison $r = b\theta^m$, nous pourrons regarder r comme fonction de θ, envisager F comme ne dépendant que de θ et conserver seulement la première équation (8) avec :

$$H = \frac{\varphi}{bk^2\theta^m}, \qquad \frac{dH}{d\theta} = \frac{-m\varphi}{bk^2\theta^{m+1}} + \frac{\varphi'}{bk^3\theta^m}.$$

Il faut que, pour $k = 0$, l'équation (8) soit satisfaite; ce qui donne, en tenant compte des équations (7) :

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{ma}{b\theta^{m+3}} + \frac{2}{3}\frac{a}{b\theta^{m+3}},$$

d'où :

$$F = \frac{-a}{b\theta^{m+2}}\,\frac{m+\frac{2}{3}}{m+2}$$

et dans l'hypothèse de Lorentz, où $m = -1$:

$$F = \frac{a}{3b\theta}.$$

Supposons maintenant qu'il n'y ait *aucune* liaison et, considérant r et θ comme deux variables indépendantes, conservons les deux équations (8); il viendra :

$$H = \frac{\varphi}{k^2 r}, \qquad \frac{dH}{d\theta} = \frac{\varphi'}{k^3 r}, \qquad \frac{dH}{dr} = \frac{-\varphi}{k^2 r^2}.$$

Les équations (8) doivent être satisfaites pour $k = \theta$, $r = b\theta^m$; ce qui donne :

(9) $$\frac{dF}{dr} = \frac{a}{b^2 \theta^{2m+2}}, \qquad \frac{dF}{d\theta} = \frac{2}{3}\frac{a}{b\theta^{m+3}}.$$

Une des manières de satisfaire à ces conditions est de poser :

(10) $$F = A r^\alpha \theta^\beta,$$

A, α et β étant des constantes ; les équations (9) doivent être satisfaites pour $k = \theta$, $r = b\theta^m$, ce qui donne :

$$A\alpha b^{\alpha-1}\theta^{m\alpha-m+\beta} = \frac{a}{b^2\theta^{2m+2}}, \qquad A\beta b^\alpha \theta^{m\alpha+\beta-1} = \frac{2}{3}\frac{a}{b\theta^{m+3}}.$$

En identifiant, on trouve

(11) $$\alpha = 3\gamma, \qquad \beta = 2\gamma, \qquad \gamma = \frac{m+2}{3m+2}, \qquad A = \frac{a}{\alpha b^{\alpha+1}}.$$

Mais le volume de l'ellipsoïde est proportionnel à $r^3\theta^2$, de sorte que le potentiel supplémentaire est proportionnel à la puissance γ du volume de l'électron.

Dans l'hypothèse de Lorentz, on a $m = -1$, $\gamma = 1$.

On retrouve donc l'hypothèse de Lorentz *à la condition d'ajouter un potentiel supplémentaire proportionnel au volume de l'électron.*

L'hypothèse de Langevin correspond à $\gamma = \infty$.

7. — Mouvement quasi-stationnaire.

Il reste à voir si cette hypothèse sur la contraction des électrons rend compte de l'impossibilité de mettre en évidence le mouvement absolu, et je commencerai par étudier le mouvement quasi-stationnaire d'un électron isolé, ou soumis seulement à l'action d'autres électrons éloignés.

On sait qu'on appelle mouvement quasi stationnaire un mouvement où les variations de la vitesse sont assez lentes pour que les énergies magnétique et

électrique dues au mouvement de l'électron diffèrent peu de ce qu'elles seraient dans le mouvement uniforme; on sait également que c'est en partant de cette notion du mouvement quasi-stationnaire qu'Abraham est arrivé à celle des masses électromagnétiques transversale et longitudinale.

Je crois devoir préciser. Soit H notre action par unité de temps :

$$H = \frac{1}{2}\int(\Sigma f^2 - \Sigma \alpha^2)\,d\tau,$$

où nous ne considérons pour le moment que les champs électrique et magnétique dus au mouvement d'un électron isolé. Au paragraphe précédent, considérant le mouvement comme uniforme, nous regardions H comme dépendant de la vitesse ξ, η, ζ du centre de gravité de l'électron (ces trois composantes, dans le paragraphe précédent, avaient pour valeurs $-\varepsilon$, o, o) et des paramètres r et θ qui définissent la forme de l'électron.

Mais si le mouvement n'est plus uniforme, H dépendra non seulement des valeurs de ξ, η, ζ, r, θ à l'instant considéré, mais des valeurs de ces mêmes quantités à d'autres instants qui pourront en différer de quantités de même ordre que le temps mis par la lumière pour aller d'un point à l'autre de l'électron; en d'autres termes, H dépendra non seulement de ξ, η, ζ, r, θ, mais de leurs dérivées de tous les ordres par rapport au temps.

Eh bien, le mouvement sera dit quasi-stationnaire quand les dérivées partielles de H par rapport aux dérivées successives de ξ, η, ζ, r, θ seront négligeables devant les dérivées partielles de H par rapport aux quantités ξ, η, ζ, r, θ elles-mêmes.

Les équations d'un pareil mouvement pourront s'écrire :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dH}{d\theta} + \dfrac{dF}{d\theta} = \dfrac{dH}{dr} + \dfrac{dF}{dr} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{dH}{d\xi} = -\displaystyle\int X\,d\tau, \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{dH}{d\eta} = -\displaystyle\int Y\,d\tau, \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{dH}{d\zeta} = -\displaystyle\int Z\,d\tau. \end{cases}$$

Dans ces équations, F a la même signification que dans le paragraphe précédent; X, Y, Z sont les composantes de la force qui agit sur l'électron : cette force étant due uniquement aux champs électrique et magnétique produits par les *autres* électrons.

Observons que H ne dépend de ξ, η, ζ que par l'intermédiaire de la combinaison

$$V = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

c'est-à-dire de la grandeur de la vitesse ; on a donc, en appelant encore D la quantité de mouvement :

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{dH}{dV}\frac{\xi}{V} = -D\frac{\xi}{V},$$

d'où :

$$(2)\qquad -\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\xi} = \frac{D}{V}\frac{d\xi}{dt} - D\frac{\xi}{V^2}\frac{dV}{dt} + \frac{dD}{dV}\frac{\xi}{V}\frac{dV}{dt},$$

$$(2\ bis)\qquad \frac{d}{dt}\frac{dH}{d\eta} = \frac{D}{V}\frac{d\eta}{dt} - D\frac{\eta}{V^2}\frac{dV}{dt} + \frac{dD}{dV}\frac{\eta}{V}\frac{dV}{dt},$$

avec

$$(3)\qquad V\frac{dV}{dt} = \sum \xi\frac{d\xi}{dt}.$$

Si nous prenons la direction actuelle de la vitesse pour axe des x, il vient :

$$\xi = V, \qquad \eta = \zeta = 0, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dV}{dt};$$

les équations (2) et (2 *bis*) deviennent :

$$-\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\xi} = \frac{dD}{dV}\frac{d\xi}{dt}, \qquad -\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\eta} = \frac{D}{V}\frac{d\eta}{dt}$$

et les trois dernières équations (1) :

$$(4)\qquad \frac{dD}{dV}\frac{d\xi}{dt} = \int X\,d\tau, \qquad \frac{D}{V}\frac{d\eta}{dt} = \int Y\,d\tau, \qquad \frac{D}{V}\frac{d\zeta}{dt} = \int Z\,d\tau.$$

C'est pourquoi Abraham a donné à $\frac{dD}{dV}$ le nom de *masse longitudinale* et à $\frac{D}{V}$ le nom de *masse transversale* ; rappelons que $D = \frac{dH}{dV}$.

Dans l'hypothèse de Lorentz, on a :

$$D = -\frac{dH}{dV} = -\frac{\partial H}{\partial V},$$

$\frac{\partial H}{\partial V}$ représentant la dérivée par rapport à V, après que r et θ ont été remplacés par leurs valeurs en fonction de V tirées des deux premières équations (1) ; on aura d'ailleurs, après cette substitution,

$$H = +A\sqrt{1-V^2}.$$

Nous choisirons les unités de telle façon que le facteur constant A soit égal à 1, et je pose $\sqrt{1-V^2} = h$, d'où :

$$H = -h, \qquad D = \frac{V}{h}, \qquad \frac{dD}{dV} = h^{-3}, \qquad \frac{dD}{dV}\frac{1}{V^2} - \frac{D}{V^3} = h^{-3}.$$

Nous poserons encore :

$$M = V\frac{dV}{dt} = \sum \xi \frac{d\xi}{dt}, \qquad X_1 = \int X\, d\tau$$

et nous trouverons pour l'équation du mouvement quasi-stationnaire :

$$(5) \qquad h^{-1}\frac{d\xi}{dt} + h^{-3}\xi M = X_1.$$

Voyons ce que deviennent ces équations par la transformation de Lorentz. Nous poserons : $1 + \xi\varepsilon = \mu$, et nous aurons d'abord :

$$\mu\xi' = \xi + \varepsilon, \qquad \mu\eta' = \frac{\eta}{k}, \qquad \mu\zeta' = \frac{\zeta}{k},$$

d'où l'on tire aisément

$$\mu h' = \frac{h}{k}.$$

Nous avons également

$$dt' = k\mu\, dt,$$

d'où :

$$\frac{d\xi'}{dt'} = \frac{d\xi}{dt}\frac{1}{k^3\mu^3}, \qquad \frac{d\eta'}{dt'} = \frac{d\eta}{dt}\frac{1}{k^2\mu^2} - \frac{d\xi}{dt}\frac{\eta\varepsilon}{k^2\mu^3}, \qquad \frac{d\zeta'}{dt'} = \frac{d\zeta}{dt}\frac{1}{k^2\mu^2} - \frac{d\xi}{dt}\frac{\zeta\varepsilon}{k^2\mu^3},$$

d'où encore :

$$M' = \frac{d\xi}{dt}\frac{\varepsilon h^2}{k^3\mu^4} + \frac{M}{k^3\mu^3}$$

et

$$(6) \qquad h'^{-1}\frac{d\xi'}{dt'} + h'^{-3}\xi' M' = \left[h^{-1}\frac{d\xi}{dt} + h^{-3}(\xi + \varepsilon)M\right]\mu^{-1},$$

$$(7) \qquad h'^{-1}\frac{d\eta'}{dt'} + h'^{-3}\eta' M' = \left(h^{-1}\frac{d\eta}{dt} + h^{-3}\eta M\right)\mu^{-1}k^{-1}.$$

Reportons-nous maintenant aux équations (11 *bis*) du paragraphe 1; on peut y regarder X_1, Y_1, Z_1 comme ayant la même signification que dans les équations (5). D'autre part, nous avons $l = 1$ et $\frac{\rho'}{\rho} = k\mu$; ces équations deviennent donc :

$$(8) \qquad \begin{cases} X'_1 = \mu^{-1}(X_1 + \varepsilon \Sigma X_1 \xi), \\ Y'_1 = k^{-1}\mu^{-1} Y_1. \end{cases}$$

Calculons $\Sigma X_1 \xi$ à l'aide des équations (5), nous trouverons :

$$\Sigma X_1 \xi = h^{-3} M,$$

d'où :

$$(9)\qquad \begin{cases} X'_1 = \mu^{-1}(X_1 + \varepsilon h^{-3} M), \\ Y'_1 = k^{-1} \mu^{-1} Y_1. \end{cases}$$

En comparant les équations (5), (6), (7) et (9), on trouve enfin :

$$(10)\qquad \begin{cases} h'^{-1} \dfrac{d\xi'}{dt'} + h'^{-3} \xi' M' = X'_1, \\ h'^{-1} \dfrac{d\eta'}{dt'} + h'^{-3} \eta' M' = Y'_1, \end{cases}$$

ce qui montre que les équations du mouvement quasi-stationnaire ne sont pas altérées par la transformation de Lorentz; mais cela ne prouve pas encore que l'hypothèse de Lorentz est la seule qui conduise à ce résultat.

Pour établir ce point nous allons nous restreindre, ainsi que l'a fait Lorentz, à certains cas particuliers, ce qui nous suffira évidemment pour démontrer une proposition négative.

Comment allons-nous d'abord étendre les hypothèses sur lesquelles reposait le calcul précédent?

1° Au lieu de supposer $l = 1$ dans la transformation de Lorentz, nous supposerons l quelconque.

2° Au lieu de supposer que F est proportionnel au volume et, par conséquent, que H est proportionnel à h, nous supposerons que F est une fonction quelconque de θ et de r, de telle façon que [après avoir remplacé θ et r par leurs valeurs en fonction de V, tirées des deux premières équations (1)] H soit une fonction quelconque de V.

J'observe d'abord que, si l'on suppose $H = h$, on devra avoir $l = 1$; et en effet les équations (6) et (7) subsisteront, sauf que les seconds membres seront multipliés par $\frac{1}{l}$; les équations (9) également, sauf que les seconds membres seront multipliés par $\frac{1}{l^2}$; et enfin les équations (10), sauf que les seconds membres seront multipliés par $\frac{1}{l}$. Si l'on veut que les équations du mouvement ne soient pas altérées par la transformation de Lorentz, c'est-à-dire que les équations (10) ne diffèrent des équations (5) que par l'accentuation des lettres, il faut supposer :

$$l = 1.$$

Supposons maintenant que l'on ait

$$\eta = \zeta = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \xi = \mathrm{V}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\mathrm{V}}{dt};$$

les équations (5) prendront la forme :

$$(5\ bis) \qquad -\frac{d}{dt}\frac{d\mathrm{H}}{d\xi} = \frac{d\mathrm{D}}{d\mathrm{V}}\frac{d\xi}{dt} = \mathrm{X}_1, \qquad \frac{d}{dt}\frac{d\mathrm{H}}{d\eta} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{V}}\frac{d\eta}{dt} = \mathrm{Y}_1.$$

Nous pouvons d'ailleurs poser :

$$\frac{d\mathrm{D}}{d\mathrm{V}} = f(\mathrm{V}) = f(\xi), \qquad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{V}} = \varphi(\mathrm{V}) = \varphi(\xi).$$

Si les équations du mouvement ne sont pas altérées par la transformation de Lorentz, on devra avoir :

$$f(\xi)\frac{d\xi}{dt} = \mathrm{X}_1,$$

$$\varphi(\xi)\frac{d\eta}{dt} = \mathrm{Y}_1,$$

$$f(\xi')\frac{d\xi'}{dt'} = \mathrm{X}'_1 = l^{-2}\mu^{-1}(\mathrm{X}_1 + \varepsilon\Sigma\mathrm{X}_1\xi) = l^{-2}\mu^{-1}\mathrm{X}_1(1+\varepsilon\xi) = l^{-2}\mathrm{X}_1,$$

$$\varphi(\xi')\frac{d\eta'}{dt'} = \mathrm{Y}'_1 = l^{-2}k^{-1}\mu^{-1}\mathrm{Y}_1,$$

et par conséquent :

$$(11) \qquad \begin{cases} f(\xi)\dfrac{d\xi}{dt} = l^2 f(\xi')\dfrac{d\xi'}{dt'}, \\ \varphi(\xi)\dfrac{d\eta}{dt} = l^2 k\mu\,\varphi(\xi')\dfrac{d\eta'}{dt'}. \end{cases}$$

Mais nous avons :

$$\frac{d\xi'}{dt'} = \frac{d\xi}{dt}\frac{1}{k^3\mu^3}, \qquad \frac{d\eta'}{dt'} = \frac{d\eta}{dt}\frac{1}{k^2\mu^2},$$

d'où :

$$f(\xi') = f\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right) = f(\xi)\frac{k^3\mu^3}{l^2},$$

$$\varphi(\xi') = \varphi\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right) = \varphi(\xi)\frac{k\mu}{l^2};$$

d'où, en éliminant l^2, nous trouvons l'équation fonctionnelle :

$$k^2\mu^2\frac{\varphi\left(\dfrac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right)}{\varphi(\xi)} = \frac{f\left(\dfrac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right)}{f(\xi)},$$

ou, en posant

$$\frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)} = \Omega(\xi) = \frac{D}{V\frac{dD}{dV}},$$

celle-ci :

$$\Omega\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right) = \Omega(\xi)\frac{1+\varepsilon^2}{(1+\xi\varepsilon)^2},$$

équation qui doit être satisfaite pour toutes les valeurs de ξ et de ε. Pour $\zeta = 0$, on trouve :

$$\Omega(\varepsilon) = \Omega(0)(1-\varepsilon^2),$$

d'où :

$$D = A\left(\frac{V}{\sqrt{1-V^2}}\right)^m,$$

A étant une constante, et où j'ai fait $\Omega(0) = \frac{1}{m}$.

On trouve alors :

$$\varphi(\xi) = \frac{A}{\xi}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)^m, \qquad \varphi(\xi') = \frac{A\mu}{\xi+\varepsilon}\left(\frac{\xi+\varepsilon}{\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^m.$$

Or $\varphi(\xi') = \varphi(\xi)\frac{k\mu}{l^2}$; donc on a:

$$(\xi+\varepsilon)^{m-1}(1-\varepsilon^2)^{-\frac{m}{2}} = \xi^{m-1}(1-\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}l^{-2}.$$

Comme l ne doit dépendre que de ε (puisque, s'il y a plusieurs électrons, l doit être le même pour tous les électrons dont les vitesses ξ peuvent être différentes), cette identité ne peut avoir lieu que si l'on a :

$$m = 1, \qquad l = 1.$$

Ainsi l'hypothèse de Lorentz est la seule qui soit compatible avec l'impossibilité de mettre en évidence le mouvement absolu ; si l'on admet cette impossibilité, il faut admettre que les électrons en mouvement se contractent de façon à devenir des ellipsoïdes de révolution dont deux des axes demeurent constants ; il faut donc admettre, comme nous l'avons montré au paragraphe précédent, l'existence d'un potentiel supplémentaire proportionnel au volume de l'électron.

L'analyse de Lorentz se trouve donc pleinement confirmée, mais nous pouvons mieux nous rendre compte de la vraie raison du fait qui nous occupe ; cette raison doit être cherchée dans les considérations du paragraphe 4. *Les transformations qui n'altèrent pas les équations du mouvement doivent*

former un groupe, et cela ne peut avoir lieu que si $l=1$. Comme nous ne devons pas pouvoir reconnaître si un électron est en repos ou en mouvement absolu, il faut que quand il est en mouvement il subisse une déformation qui doit être précisément celle que lui impose la transformation correspondante du groupe.

8. — Mouvement quelconque.

Les résultats précédents ne s'appliquent qu'au mouvement quasi-stationnaire, mais il est aisé de les étendre au cas général; il suffit d'appliquer les principes du paragraphe 3, c'est-à-dire de partir du principe de moindre action.

A l'expression de l'action :

$$J=\int dt\,d\tau\left(\frac{\Sigma f^2}{2}-\frac{\Sigma\alpha^2}{2}\right),$$

il convient d'ajouter un terme, représentant le potentiel supplémentaire F du paragraphe 6; ce terme prendra évidemment la forme :

$$J_1=\int\Sigma(F)\,dt,$$

où $\Sigma(F)$ représente la somme des potentiels supplémentaires dus aux différents électrons, chacun d'eux étant proportionnel au volume de l'électron correspondant.

J'écris (F) entre parenthèses pour ne pas confondre avec le vecteur F, G, H.

L'action totale est alors $J+J_1$. Nous avons vu au paragraphe 3 que J n'est pas altéré par la transformation de Lorentz; il faut montrer maintenant qu'il en est de même de J_1.

On a, pour l'un des électrons,

$$(F)=\omega_0\tau,$$

ω_0 étant un coefficient spécial à l'électron et τ son volume; je puis donc écrire :

$$\Sigma(F)=\int\omega_0\,d\tau,$$

l'intégrale devant être étendue à tout l'espace, mais de telle façon que le coefficient ω_0 soit nul en dehors des électrons, et qu'à l'intérieur de chaque élec-

tron il soit égal au coefficient spécial à cet électron. On a alors :

$$J_1 = \int \omega_0 \, d\tau \, dt$$

et, après la transformation de Lorentz :

$$J'_1 = \int \omega'_0 \, d\tau' \, dt'.$$

Or on a $\omega_0 = \omega'_0$; car si un point appartient à un électron, le point correspondant après la transformation de Lorentz appartient encore *au même* électron. D'autre part, nous avons trouvé au paragraphe 3 :

$$d\tau' \, dt' = l^4 \, d\tau \, dt$$

et, puisque nous supposons maintenant $l = 1$,

$$d\tau' \, dt' = d\tau \, dt.$$

On a donc

$$J_1 = J'_1.$$

C. Q. F. D.

Le théorème est donc général, il nous donne en même temps une solution de la question que nous nous posions à la fin du paragraphe 1 : trouver des forces complémentaires non altérées par la transformation de Lorentz. Le potentiel supplémentaire (F) satisfait à cette condition.

Nous pouvons donc généraliser le résultat énoncé à la fin du paragraphe 1 et écrire :

Si l'inertie des électrons est exclusivement d'origine électromagnétique, s'ils ne sont soumis qu'à des forces d'origine électromagnétique, ou aux forces qui engendrent le potentiel supplémentaire (F), *aucune expérience ne pourra mettre en évidence le mouvement absolu.*

Quelles sont alors ces forces qui engendrent le potentiel (F) ? Elles peuvent évidemment être assimilées à une pression qui régnerait à l'intérieur de l'électron; tout se passe comme si chaque électron était une capacité creuse soumise à une pression interne constante (indépendante du volume); le travail d'une pareil pression serait évidemment proportionnel aux variations du volume.

Je dois observer toutefois que cette pression est négative. Reprenons l'équation (10) du paragraphe 6, qui dans l'hypothèse de Lorentz s'écrit :

$$F = A r^3 \theta^2;$$

les équations (11) du paragraphe 6 nous donneront :

$$A = \frac{a}{3b^4}.$$

Notre pression est égale à A, à un coefficient constant près, qui d'ailleurs est négatif.

Évaluons maintenant la masse de l'électron, je veux parler de la « masse expérimentale », c'est-à-dire de la masse pour les vitesses faibles ; on a (*cf.* § 6) :

$$H = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right)}{k^2 r}, \qquad \theta = k, \qquad \varphi = a, \qquad \theta r = b;$$

d'où

$$H = \frac{a}{bk} = \frac{a}{b}\sqrt{1 - V^2}.$$

Pour V très petit je puis écrire :

$$H = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{V^2}{2}\right),$$

de sorte que la masse, tant longitudinale que transversale, sera $\frac{a}{b}$.

Or a est une constante numérique, ce qui montre que : *la pression qui engendre notre potentiel supplémentaire est proportionnelle à la quatrième puissance de la masse expérimentale de l'électron.*

Comme l'attraction newtonienne est proportionnelle à cette masse expérimentale, on est tenté de conclure qu'il y a quelque relation entre la cause qui engendre la gravitation et celle qui engendre ce potentiel supplémentaire

9. — Hypothèses sur la gravitation.

Ainsi la théorie de Lorentz expliquerait complètement l'impossibilité de mettre en évidence le mouvement absolu, si toutes les forces étaient d'origine électromagnétique.

Mais il y a des forces auxquelles on ne peut pas attribuer une origine électromagnétique comme par exemple la gravitation. Il peut arriver, en effet, que deux systèmes de corps produisent des champs électromagnétiques équivalents, c'est-à-dire exerçant la même action sur des corps électrisés et sur des courants, et que cependant ces deux systèmes n'exercent pas la même action gravifique

sur les masses newtoniennes. Le champ gravifique est donc distinct du champ électromagnétique. Lorentz a donc été obligé de compléter son hypothèse en supposant que *les forces de toute origine, et en particulier la gravitation, sont affectées par une translation* (ou, si l'on aime mieux, par la transformation de Lorentz) *de la même manière que les forces électromagnétiques.*

Il convient maintenant d'entrer dans les détails et d'examiner de plus près cette hypothèse. Si nous voulons que la force newtonienne soit affectée de cette façon par la transformation de Lorentz, nous ne pouvons plus admettre que cette force dépend uniquement de la position relative du corps attirant et du corps attiré à l'instant considéré. Elle devra dépendre, en outre, des vitesses des deux corps. Et ce n'est pas tout : il sera naturel de supposer que la force qui agit à l'instant t sur le corps attiré, dépend de la position et de la vitesse de ce corps à ce même instant t; mais elle dépendra, en outre, de la position et de la vitesse du corps *attirant*, non pas à l'instant t, mais à *un instant antérieur*, comme si la gravitation avait mis un certain temps à se propager.

Envisageons donc la position du corps attiré à l'instant t_0 et soient, à cet instant, x_0, y_0, z_0 ses coordonnées, ξ, η, ζ, les composantes de sa vitesse; considérons, d'autre part, le corps attirant à l'instant correspondant t_0+t et soient, à cet instant, x_0+x, y_0+y, z_0+z ses coordonnées, ξ_1, η_1, ζ_1 les composantes de sa vitesse.

Nous devrons d'abord avoir une relation

$$(1) \qquad \varphi(t, x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0$$

pour définir le temps t. Cette relation définira la loi de la propagation de l'action gravifique (je ne m'impose nullement la condition que la propagation se fasse avec la même vitesse dans tous les sens).

Soient maintenant X_1, Y_1, Z_1 les trois composantes de l'action exercée à l'instant t sur le corps attiré; il s'agit d'exprimer X_1, Y_1, Z_1 en fonction de

$$(2) \qquad t, \quad x, \quad y, \quad z, \quad \xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \xi_1, \quad \eta_1, \quad \zeta_1.$$

Quelles sont les conditions à remplir?

1° La condition (1) ne devra pas être altérée par les transformations du groupe de Lorentz.

2° Les composantes X_1, Y_1, Z_1 devront être affectées par les transformations de Lorentz de la même manière que les forces électromagnétiques désignées

par les mêmes lettres, c'est-à-dire conformément aux équations (11 *bis*) du paragraphe 1.

3° Quand les deux corps seront au repos, on devra retomber sur la loi ordinaire de l'attraction.

Il importe de remarquer que dans ce dernier cas, la relation (1) disparaît, car le temps t ne joue plus aucun rôle si les deux corps sont au repos.

Le problème ainsi posé est évidemment indéterminé. Nous chercherons donc à satisfaire autant que possible à d'autres conditions complémentaires :

4° Les observations astronomiques ne semblant pas montrer de dérogation sensible à la loi de Newton, nous choisirons la solution qui s'écarte le moins de cette loi, pour de faibles vitesses des deux corps.

5° Nous nous efforcerons de nous arranger de façon que t soit toujours négatif; si, en effet, on conçoit que l'effet de la gravitation demande un certain temps pour se propager, il serait plus difficile de comprendre comment cet effet pourrait dépendre de la position *non encore atteinte* par le corps attirant.

Il y a un cas où l'indétermination du problème disparaît; c'est celui où les deux corps sont en repos *relatif* l'un par rapport à l'autre, c'est-à-dire où :

$$\xi = \xi_1, \qquad \eta = \eta_1, \qquad \zeta = \zeta_1;$$

c'est donc le cas que nous allons examiner d'abord, en supposant que ces vitesses sont constantes, de telle sorte que les deux corps sont entraînés dans un mouvement de translation commun, rectiligne et uniforme.

Nous pourrons supposer que l'axe des x a été pris parallèle à cette translation, de telle façon que $\eta = \zeta = 0$, et nous prendrons $\varepsilon = -\xi$.

Si dans ces conditions nous appliquons la transformation de Lorentz, après la transformation les deux corps seront au repos et l'on aura :

$$\xi' = \eta' = \zeta' = 0.$$

Alors les composantes X'_1, Y'_1, Z'_1 devront être conformes à la loi de Newton et on aura, à un facteur constant près :

$$(3) \quad \begin{cases} X'_1 = -\dfrac{x'}{r'^3}, \qquad Y'_1 = -\dfrac{y'}{r'^3}, \qquad Z'_1 = -\dfrac{z'}{r'^3}, \\ r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \end{cases}$$

Mais on a, d'après le paragraphe 1 :

$$x' = k(x+\varepsilon t), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = k(t+\varepsilon x),$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = k(1+\xi\varepsilon) = k(1-\varepsilon^2) = \frac{1}{k}, \qquad \Sigma X_1 \xi = -X_1 \varepsilon,$$

$$X'_1 = k\frac{\rho}{\rho'}(X_1 + \varepsilon \Sigma X_1 \xi) = k^2 X_1(1-\varepsilon^2) = X_1,$$

$$Y'_1 = \frac{\rho}{\rho'} Y_1 = k Y_1,$$

$$Z'_1 = k Z_1.$$

On a d'ailleurs :

$$x + \varepsilon t = x - \xi t, \qquad r'^2 = k^2(x-\xi t)^2 + y^2 + z^2$$

et

(4) $$X_1 = \frac{-k(x-\xi t)}{r'^3}, \qquad Y_1 = \frac{-y}{kr'^3}, \qquad Z_1 = \frac{-z}{kr'^3};$$

ce qui peut s'écrire :

(4 *bis*) $$X_1 = \frac{dV}{dx}, \qquad Y_1 = \frac{dV}{dy}, \qquad Z_1 = \frac{dV}{dz}; \qquad V = \frac{1}{kr'}.$$

Il semble d'abord que l'indétermination subsiste, puisque nous n'avons fait aucune hypothèse sur la valeur de t, c'est-à-dire sur la rapidité de la transmission; et que d'ailleurs x est fonction de t; mais il est aisé de voir que $x-\xi t$, y, z qui figurent seuls dans nos formules, ne dépendent pas de t.

On voit que si les deux corps sont simplement animés d'une translation commune, la force qui agit sur le corps attiré est normale à un ellipsoïde ayant pour centre le corps attirant.

Pour aller plus loin il faut chercher les *invariants du groupe de Lorentz*.

Nous savons que les substitutions de ce groupe (en supposant $l=1$) sont les substitutions linéaires qui n'altèrent pas la forme quadratique

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Posons, d'autre part :

$$\xi = \frac{\delta x}{\delta t}, \qquad \eta = \frac{\delta y}{\delta t}, \qquad \zeta = \frac{\delta z}{\delta t};$$

$$\xi_1 = \frac{\delta_1 x}{\delta_1 t}, \qquad \eta_1 = \frac{\delta_1 y}{\delta_1 t}, \qquad \zeta_1 = \frac{\delta_1 z}{\delta_1 t};$$

nous voyons que la transformation de Lorentz aura pour effet de faire subir à δx, δy, δz, δt, et à $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1 t$ les mêmes substitutions linéaires qu'à x, y, z, t.

Regardons

$$x,\quad y,\quad z,\quad t\sqrt{-1},$$
$$\delta x,\quad \delta y,\quad \delta z,\quad \delta t\sqrt{-1},$$
$$\delta_1 x,\quad \delta_1 y,\quad \delta_1 z,\quad \delta_1 t\sqrt{-1},$$

comme les coordonnées de trois points P, P′, P″ dans l'espace à quatre dimensions. Nous voyons que la transformation de Lorentz n'est qu'une rotation de cet espace autour de l'origine, regardée comme fixe. Nous n'aurons donc pas d'autres invariants distincts que les six distances des trois points P, P′, P″ entre eux et à l'origine, ou, si l'on aime mieux que les deux expressions :

$$x^2+y^2+z^2-t^2,\qquad x\,\delta x+y\,\delta y+z\,\delta z-t\,\delta t,$$

ou les quatre expressions de même forme qu'on en déduit en permutant d'une manière quelconque les trois points P, P′, P″.

Mais ce que nous cherchons ce sont les fonctions des dix variables (2) qui sont des invariants; nous devons donc, parmi les combinaisons de nos six invariants, rechercher celles qui ne dépendent que de ces dix variables, c'est-à-dire celles qui sont homogènes de degré 0 tant par rapport à δx, δy, δz, δt, que par rapport à $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1 t$. Il nous restera quatre invariants distincts, qui sont :

$$(5)\qquad \Sigma x^2-t^2,\qquad \frac{t-\Sigma x\xi}{\sqrt{1-\Sigma\xi^2}},\qquad \frac{t-\Sigma x\xi_1}{\sqrt{1-\Sigma\xi_1^2}},\qquad \frac{1-\Sigma\xi\xi_1}{\sqrt{(1-\Sigma\xi^2)(1-\Sigma\xi_1^2)}}.$$

Occupons-nous maintenant des transformations subies par les composantes de la force; reprenons les équations (11) du paragraphe 1, qui se rapportent non à la force X_1, Y_1, Z_1, que nous considérons ici, mais à la force X, Y, Z rapportée à l'unité de volume. Posons d'ailleurs :

$$T=\Sigma X\xi;$$

nous verrons que ces équations (11) peuvent s'écrire ($l=1$) :

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{ll} X'=k(X+\varepsilon T), & T'=k(T+\varepsilon X),\\ Y'=Y, & Z'=Z;\end{array}\right.$$

de sorte que X, Y, Z, T subissent la même transformation que x, y, z, t. Les invariants du groupe seront donc

$$\Sigma X^2-T^2,\quad \Sigma Xx-Tt,\quad \Sigma X\,\delta x-T\,\delta t,\quad \Sigma X\,\delta_1 x-T\,\delta_1 t.$$

Mais ce n'est pas de X, Y, Z que nous avons besoin, c'est de X_1, Y_1, Z_1, avec

$$T_1 = \Sigma X_1 \xi.$$

Nous voyons que

$$\frac{X_1}{X} = \frac{Y_1}{Y} = \frac{Z_1}{Z} = \frac{T_1}{T} = \frac{1}{\rho}.$$

Donc la transformation de Lorentz agira sur X_1, Y_1, Z_1, T_1 de la même manière que sur X, Y, Z, T, avec cette différence que ces expressions seront, en outre, multipliées par

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{k(1+\xi\varepsilon)} = \frac{\delta t}{\delta t'}.$$

De même, elle agira sur ξ, η, ζ, 1, de la même manière que sur δx, δy, δz, δt, avec cette différence que ces expressions seront, en outre, multipliées par le *même* facteur :

$$\frac{\delta t}{\delta t'} = \frac{1}{k(1+\xi\varepsilon)}.$$

Considérons alors X, Y, Z, $T\sqrt{-1}$ comme les coordonnées d'un quatrième point Q; alors les invariants seront les fonctions des distances mutuelles des cinq points

$$O, \quad P, \quad P', \quad P'', \quad Q$$

et parmi ces fonctions nous devons conserver seulement celles qui sont homogènes de degré o, d'une part par rapport à

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad T, \quad \delta x, \quad \delta y, \quad dz, \quad \delta t$$

(variables que l'on peut remplacer ensuite par X_1, Y_1, Z_1, T_1, ξ, η, ζ, 1), d'autre part par rapport à

$$\delta_1 x, \quad \delta_1 y, \quad \delta_1 z, \quad \delta_1 t$$

(variables que l'on peut remplacer ensuite par ξ_1, η_1, ζ_1, 1).

Nous trouvons ainsi, outre les quatre invariants (5), quatre invariants distincts nouveaux, qui sont :

$$(7) \qquad \frac{\Sigma X_1^2 - T_1^2}{1-\Sigma\xi^2}, \quad \frac{\Sigma X_1 x - T_1 t}{\sqrt{1-\Sigma\xi^2}}, \quad \frac{\Sigma X_1 \xi_1 - T_1}{\sqrt{1-\Sigma\xi^2}\sqrt{1-\Sigma\xi_1^2}}, \quad \frac{\Sigma X_1 \xi - T_1}{1-\Sigma\xi^2}.$$

Le dernier invariant est toujours nul, d'après la définition de T_1.

Cela posé, quelles sont les conditions à remplir?

1° Le premier membre de la relation (1), qui définit la vitesse de propagation, doit être une fonction des quatre invariants (5).

On peut faire évidemment une foule d'hypothèses; nous n'en examinerons que deux :

a. On peut avoir

$$\Sigma x^2 - t^2 = r^2 - t^2 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad t = \pm r,$$

et, puisque t doit être négatif, $t = -r$. Cela veut dire que la vitesse de propagation est égale à celle de la lumière. Il semble d'abord que cette hypothèse doive être rejetée sans examen. Laplace a montré, en effet, que la propagation est, ou bien instantanée, ou beaucoup plus rapide que celle de la lumière. Mais Laplace avait examiné l'hypothèse de la vitesse finie de propagation, *ceteris non mutatis*; ici, au contraire, cette hypothèse est compliquée de beaucoup d'autres, et il peut se faire qu'il y ait entre elles une compensation plus ou moins parfaite, comme celles dont les applications de la transformation de Lorentz nous ont déjà donné tant d'exemples.

b. On peut avoir

$$\frac{t - \Sigma x\xi_1}{\sqrt{1 - \Sigma \xi_1^2}} = 0, \qquad t = \Sigma x\xi_1.$$

La vitesse de propagation est alors beaucoup plus rapide que celle de la lumière; mais dans certains cas t pourrait être négatif, ce qui, comme nous l'avons dit, ne paraît guère admissible. *Nous nous en tiendrons donc à l'hypothèse* (*a*).

2° Les quatre invariants (7) doivent être des fonctions des invariants (5).

3° Quand les deux corps sont en repos absolu, X_1, Y_1, Z_1 doivent avoir la valeur déduite de la loi de Newton, et quand ils sont en repos relatif, la valeur déduite des équations (4).

Dans l'hypothèse du repos absolu, les deux premiers invariants (7) doivent se réduire à

$$\Sigma X_1^2, \quad \Sigma X_1 x,$$

ou, par la loi de Newton, à

$$\frac{1}{r^4}, \quad \frac{1}{r};$$

d'autre part, dans l'hypothèse (a), le second et le troisième des invariants (5) deviennent :

$$\frac{-r-\Sigma x\xi}{\sqrt{1-\Sigma\xi^2}}, \quad \frac{-r-\Sigma x\xi_1}{\sqrt{1-\Sigma\xi_1^2}},$$

c'est-à-dire, pour le repos absolu,

$$-r, \quad -r.$$

Nous pouvons donc admettre *par exemple* que les deux premiers invariants (4) se réduisent à

$$\frac{(1-\Sigma\xi_1^2)^2}{(r+\Sigma x\xi_1)^4}, \quad -\frac{\sqrt{1-\Sigma\xi_1^2}}{r+\Sigma x\xi_1};$$

mais d'autres combinaisons sont possibles.

Il faut faire un choix entre ces combinaisons et, d'autre part, pour définir X_1, Y_1, Z_1 il nous faut une troisième équation. Pour un pareil choix, nous devons nous efforcer de nous rapprocher autant que possible de la loi de Newton. Voyons donc ce qui se passe quand (faisant toujours $t=-r$) on néglige les carrés des vitesses ξ, η, ... Les quatre invariants (5) deviennent alors :

$$0, \quad -r-\Sigma x\xi, \quad -r-\Sigma x\xi_1, \quad 1$$

et les quatre invariants (7) :

$$\Sigma X_1^2, \quad \Sigma X_1(x+\xi r), \quad \Sigma X_1(\xi_1-\xi), \quad 0.$$

Mais pour pouvoir comparer avec la loi de Newton, une autre transformation est nécessaire; ici x_0+x, y_0+y, z_0+z représentent les coordonnées du corps attirant à l'instant t_0+t, et $r=\sqrt{\Sigma x^2}$; dans la loi de Newton il faut envisager les coordonnées x_0+x_1, y_0+y_1, z_0+z_1 du corps attirant à l'instant t_0, et la distance $r_1=\sqrt{\Sigma x_1^2}$.

Nous pouvons négliger le carré du temps t nécessaire à la propagation et, par conséquent faire comme si le mouvement était uniforme; nous avons alors :

$$x=x_1+\xi_1 t, \quad y=y_1+\eta_1 t, \quad z=z_1+\zeta_1 t,$$
$$r(r-r_1)=\Sigma x\xi_1 t;$$

ou, puisque $t=-r$,

$$x=x_1-\xi_1 r, \quad y=y_1-\eta_1 r, \quad z=z_1-\zeta_1 r, \quad r=r_1-\Sigma x\xi_1;$$

de sorte que nos quatre invariants (5) deviennent :

$$0, \quad -r_1 + \Sigma x(\xi_1 - \xi), \quad -r_1, \quad 1$$

et nos quatre invariants (7) :

$$\Sigma X_1^2, \quad \Sigma X_1[x_1 + (\xi - \xi_1) r_1], \quad \Sigma X_1(\xi_1 - \xi), \quad 0.$$

Dans la seconde de ces expressions j'ai écrit r_1 au lieu de r, parce que r est multiplié par $\xi - \xi_1$ et que je néglige le carré de ξ.

D'autre part, la loi de Newton nous donnerait, pour ces quatre invariants (7),

$$\frac{1}{r_1^4}, \quad \frac{1}{r_1} - \frac{\Sigma x_1(\xi - \xi_1)}{r_1^3}, \quad \frac{\Sigma x_1(\xi - \xi_1)}{r_1^3}, \quad 0.$$

Si donc nous appelons A et B, le second et le troisième des invariants (5), et M, N, P les trois premiers invariants (7), nous satisferons à la loi de Newton, aux termes près de l'ordre du carré des vitesses, en faisant :

$$(8) \qquad M = \frac{1}{B^4}, \qquad N = \frac{+A}{B^2}, \qquad P = \frac{A - B}{B^3}.$$

Cette solution n'est pas unique. Soit, en effet, C le quatrième invariant (5), $C - 1$ est de l'ordre du carré de ξ, et il en est de même de $(A - B)^2$.

Nous pourrions donc ajouter aux seconds membres de chacune des équations (8) un terme formé de $C - 1$ multiplié par une fonction arbitraire de A, B, C et un terme formé de $(A - B)^2$ multiplié également par une fonction de A, B, C.

Au premier abord, la solution (8) paraît la plus simple, elle ne peut néanmoins être adoptée; en effet, comme M, N, P sont des fonctions de X_1, Y_1, Z_1 et de $T_1 = \Sigma X_1 \xi$, on peut tirer de ces trois équations (8) les valeurs de X_1, Y_1, Z_1; mais dans certains cas ces valeurs deviendraient imaginaires.

Pour éviter cet inconvénient, nous opérerons d'une autre manière. Posons :

$$k_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \Sigma \xi^2}}, \qquad k_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \Sigma \xi_1^2}},$$

ce qui est justifié par l'analogie avec la notation

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

qui figure dans la substitution de Lorentz.

Dans ce cas, et à cause de la condition $-r = t$, les invariants (5) deviennent :

$$0, \qquad A = -k_0(r + \Sigma x\xi), \qquad B = -k_1(r + \Sigma x\xi_1), \qquad C = k_0 k_1(1 - \Sigma \xi\xi_1).$$

D'autre part, nous voyons que les systèmes suivants de quantités :

$$\begin{array}{cccc} x, & y, & z, & -r = t \\ k_0 X_1, & k_0 Y_1, & k_0 Z_1, & k_0 T_1 \\ k_0 \xi, & k_0 \eta, & k_0 \zeta, & k_0 \\ k_1 \xi_1, & k_1 \eta_1, & k_1 \zeta_1, & k_1 \end{array}$$

subissent les *mêmes* substitutions linéaires quand on leur applique les transformations du groupe de Lorentz. Nous sommes donc conduit à poser :

$$(9) \qquad \begin{cases} X_1 = x \dfrac{\alpha}{k_0} + \xi\beta + \xi_1 \dfrac{k_1}{k_0}\gamma, \\ Y_1 = y \dfrac{\alpha}{k_0} + \eta\beta + \eta_1 \dfrac{k_1}{k_0}\gamma, \\ Z_1 = z \dfrac{\alpha}{k_0} + \zeta\beta + \zeta_1 \dfrac{k_1}{k_0}\gamma, \\ T_1 = -r \dfrac{\alpha}{k_0} + \beta + \dfrac{k_1}{k_0}\gamma. \end{cases}$$

Il est clair que si α, β, γ sont des invariants, X_1, Y_1, Z_1, T_1 satisferont à la condition fondamentale, c'est-à-dire subiront, par l'effet de transformations de Lorentz, une substitution linéaire convenable.

Mais pour que les équations (9) soient compatibles, il faut que l'on ait :

$$\Sigma X_1 \xi - T_1 = 0,$$

ce qui, en remplaçant X_1, Y_1, Z_1, T_1 par leurs valeurs (9) et en multipliant par k_0^2, devient :

$$(10) \qquad -A\alpha - \beta - C\gamma = 0.$$

Ce que nous voulons, c'est que si l'on néglige, devant le carré de la vitesse de la lumière, les carrés des vitesses ξ, ainsi que le produit des accélérations par les distances, comme nous l'avons fait plus haut, les valeurs de X_1, Y_1, Z_1 restent conforme à la loi de Newton.

Nous pourrons prendre :

$$\beta = 0, \qquad \gamma = -\frac{A\alpha}{C}.$$

Avec l'ordre d'approximation adopté, on a :

$$k_0 = k_1 = 1, \qquad C = 1, \qquad A = -r_1 + \Sigma x(\xi_1 - \xi), \qquad B = -r_1,$$
$$x = x_1 + \xi_1 t = x_1 - \xi_1 r.$$

La première équation (9) devient alors :

$$X_1 = \alpha(x - A\xi_1).$$

Mais si on néglige le carré de ξ, on peut remplacer $A\xi_1$ par $-r_1\xi_1$ ou encore par $-r\xi_1$, ce qui donne :

$$X_1 = \alpha(x + \xi_1 r) = \alpha x_1.$$

La loi de Newton donnerait

$$X_1 = -\frac{x_1}{r_1^3}.$$

Nous devons donc choisir, pour l'invariant α, celui qui se réduit à $-\frac{1}{r_1^3}$ à l'ordre d'approximation adopté, c'est-à-dire $\frac{1}{B^3}$. Les équations (9) deviendront :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{x}{k_0 B^3} - \xi_1 \frac{k_1}{k_0} \frac{A}{B^3 C}, \\ Y_1 &= \frac{y}{k_0 B^3} - \eta_1 \frac{k_1}{k_0} \frac{A}{B^3 C}, \\ Z_1 &= \frac{z}{k_0 B^3} - \zeta_1 \frac{k_1}{k_0} \frac{A}{B^3 C}, \\ T_1 &= -\frac{r}{k_0 B^3} - \frac{k_1}{k_0} \frac{A}{B^3 C}. \end{aligned}\right.$$

Nous voyons d'abord que l'attraction corrigée se compose de deux composantes ; l'une parallèle au vecteur qui joint les positions des deux corps, l'autre parallèle à la vitesse du corps attirant.

Rappelons que quand nous parlons de la position ou de la vitesse du corps attirant, il s'agit de sa position ou de sa vitesse au moment où l'onde gravifique le quitte ; pour le corps attiré, au contraire, il s'agit de sa position ou de sa vitesse du moment où l'onde gravifique l'atteint, cette onde étant supposée se propager avec la vitesse de la lumière.

Je crois qu'il serait prématuré de vouloir pousser plus loin la discussion de ces formules ; je me bornerai donc à quelques remarques.

1° Les solutions (11) ne sont pas uniques ; on peut, en effet, remplacer $\frac{1}{B^3}$, qui entre en facteur partout, par

$$\frac{1}{B^3} + (C - 1) f_1(A, B, C) + (A - B)^2 f_2(A, B, C),$$

f_1 et f_2 étant des fonctions arbitraires de A, B, C, ou encore ne plus prendre β

nul, mais ajouter à α, β, γ des termes complémentaires quelconques, pourvu qu'ils satisfassent à la condition (10) et qu'ils soient du second ordre par rapport aux ξ, en ce qui concerne α, et du premier ordre en ce qui concerne β et γ.

2° La première équation (11) peut s'écrire :

(11 *bis*) $$X_1 = \frac{k_1}{B^3 C}[x(1 - \Sigma\xi\xi_1) + \xi_1(r + \Sigma x\xi)]$$

et la quantité entre crochets peut, elle-même, s'écrire :

(12) $$(x + r\xi_1) + \eta(\xi_1 y - x\eta_1) + \zeta(\xi_1 z - x\zeta_1),$$

de sorte que la force totale peut être partagée en trois composantes correspondant aux trois parenthèses de l'expression (12); la première composante a une vague analogie avec la force mécanique due au champ électrique, les deux autres avec la force mécanique due au champ magnétique; pour compléter l'analogie je puis, en vertu de la première remarque, remplacer dans les équations (11) $\frac{1}{B^3}$ par $\frac{C}{B^3}$, de façon que X_1, Y_1, Z_1 ne dépendent plus que linéairement de la vitesse ξ, η, ζ du corps attiré, puisque C a disparu du dénominateur de (11 *bis*).

Posons alors :

(13) $$\begin{cases} k_1\ (x + r\xi_1) = \lambda, & k_1\ (y + r\eta_1) = \mu, & k_1\ (z + r\zeta_1) = \nu, \\ k_1(\eta_1 z - \zeta_1 y) = \lambda', & k_1(\zeta_1 x - \xi_1 z) = \mu', & k_1(\xi_1 y - x\eta_1) = \nu'; \end{cases}$$

il viendra, C ayant disparu du dénominateur de (11 *bis*) :

(14) $$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\lambda}{B^3} + \dfrac{\eta\nu' - \zeta\mu'}{B^3}, \\ Y_1 = \dfrac{\mu}{B^3} + \dfrac{\zeta\lambda' - \xi\nu'}{B^3}, \\ Z_1 = \dfrac{\nu}{B^3} + \dfrac{\xi\mu' - \eta\lambda'}{B^3}, \end{cases}$$

et on aura d'ailleurs :

(15) $$B^2 = \Sigma\lambda^2 - \Sigma\lambda'^2.$$

Alors λ, μ, ν, ou $\frac{\lambda}{B^3}$, $\frac{\mu}{B^3}$, $\frac{\nu}{B^3}$, est une espèce de champ électrique, tandis que λ', μ', ν', ou plutôt $\frac{\lambda'}{B^3}$, $\frac{\mu'}{B^3}$, $\frac{\nu'}{B^3}$, est une espèce de champ magnétique.

3° Le postulat de relativité nous obligerait à adopter la solution (11) ou la solution (14) ou l'une quelconque des solutions qui s'en déduiraient à l'aide de la première remarque; mais la première question qui se pose est celle de savoir si elles sont compatibles avec les observations astronomiques; la divergence avec la loi de Newton est de l'ordre de ξ^2, c'est-à-dire 10 000 fois plus petite que si elle était de l'ordre de ξ, c'est-à-dire si la propagation se faisait avec la vitesse de la lumière, *ceteris non mutatis*; il est donc permis d'espérer qu'elle ne sera pas trop grande. Mais une discussion approfondie pourra seule nous l'apprendre.

Paris, juillet 1905.

LA DYNAMIQUE DE L'ÉLECTRON

Revue générale des Sciences pures et appliquées, t. 19, p. 386-402 (1908).

I. — Introduction.

Les principes généraux de la Dynamique, qui ont, depuis Newton, servi de fondement à la Science physique et qui paraissaient inébranlables, sont-ils sur le point d'être abandonnés ou tout au moins d'être profondément modifiés ? C'est ce que bien des personnes se demandent depuis quelques années. La découverte du radium aurait, d'après elles, renversé les dogmes scientifiques que l'on croyait les plus solides : d'une part, l'impossibilité de la transmutation des métaux; d'autre part, les postulats fondamentaux de la Mécanique. Peut-être s'est-on trop hâté de considérer ces nouveautés comme définitivement établies et de briser nos idoles d'hier; peut-être conviendrait-il, avant de prendre parti, d'attendre des expériences plus nombreuses et plus probantes. Il n'en est pas moins nécessaire, dès aujourd'hui, de connaître les doctrines nouvelles et les arguments, déjà très sérieux, sur lesquels elles s'appuient.

Rappelons d'abord en quelques mots en quoi consistent ces principes :

A. Le mouvement d'un point matériel isolé et soustrait à toute force extérieure est rectiligne et uniforme; c'est le principe d'inertie : pas d'accélération sans force.

B. L'accélération d'un point mobile a même direction que la résultante de toutes les forces auxquelles ce point est soumis; elle est égale au quotient de cette résultante par un coefficient appelé *masse* du point mobile.

La masse d'un point mobile, ainsi définie, est une constante; elle ne dépend pas de la vitesse acquise par ce point; elle est la même si la force, étant

parallèle à cette vitesse, tend seulement à accélérer ou à retarder le mouvement du point, ou si, au contraire, étant perpendiculaire à cette vitesse, elle tend à faire dévier ce mouvement vers la droite, ou la gauche, c'est-à-dire à *courber* la trajectoire.

C. Toutes les forces subies par un point matériel proviennent de l'action d'autres points matériels; elles ne dépendent que des positions et des vitesses *relatives* de ces différents points matériels.

En combinant les deux principes B et C, on arrive au *principe du mouvement relatif*, en vertu duquel les lois du mouvement d'un système sont les mêmes soit que l'on rapporte ce système à des axes fixes, soit qu'on le rapporte à des axes mobiles animés d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, de sorte qu'il est impossible de distinguer le mouvement absolu d'un mouvement relatif par rapport à de pareils axes mobiles.

D. Si un point matériel A agit sur un autre point matériel B, le corps B réagit sur A, et ces deux actions sont deux forces égales et directement opposées. C'est *le principe de l'égalité de l'action et de la réaction*, ou, plus brièvement, le *principe de réaction*.

Les observations astronomiques, les phénomènes physiques les plus habituels, semblent avoir apporté à ces principes une confirmation complète, constante et très précise. C'est vrai, dit-on maintenant, mais c'est parce qu'on n'a jamais opéré qu'avec de faibles vitesses; Mercure, par exemple, qui est la planète la plus rapide, ne fait guère que 100km/s. Cet astre se comporterait-il de la même manière, s'il allait 1000 fois plus vite? On voit qu'il n'y a pas encore lieu de s'inquiéter; quels que puissent être les progrès de l'automobilisme, il s'écoulera encore longtemps avant qu'on doive renoncer à appliquer à nos machines les principes classiques de la Dynamique.

Comment donc est-on parvenu à réaliser des vitesses mille fois plus grandes que celles de Mercure, égales, par exemple, au dixième et au tiers de la vitesse de la lumière, ou se rapprochant plus encore de cette vitesse? C'est à l'aide des rayons cathodiques et des rayons du radium.

On sait que le radium émet trois sortes de rayons, que l'on désigne par les trois lettres grecques α, β, γ; dans ce qui va suivre, sauf mention expresse du contraire, il s'agira toujours des rayons β, qui sont analogues aux rayons cathodiques.

Après la découverte des rayons cathodiques, deux théories se trouvèrent en présence : Crookes attribuait les phénomènes à un véritable bombardement moléculaire; Hertz, à des ondulations particulières de l'éther. C'était un renouvellement du débat qui avait divisé les physiciens il y a un siècle à propos de la lumière; Crookes reprenait la théorie de l'émission, abandonnée pour la lumière; Hertz tenait pour la théorie ondulatoire. Les faits semblent donner raison à Crookes.

On a reconnu, en premier lieu, que les rayons cathodiques transportent avec eux une charge électrique négative; ils sont déviés par un champ magnétique et par un champ électrique; et ces déviations sont précisément celles que produiraient ces mêmes champs sur des projectiles animés d'une très grande vitesse et fortement chargés d'électricité. Ces deux déviations dépendent de deux quantités : la vitesse, d'une part, et le rapport de la charge électrique du projectile à sa masse, d'autre part; on ne peut connaître la valeur absolue de cette masse, ni celle de la charge, mais seulement leur rapport; il est clair, en effet, que, si l'on double à la fois la charge et la masse, sans changer la vitesse, on doublera la force qui tend à dévier le projectile; mais, comme sa masse est également doublée, l'accélération et la déviation observable ne seront pas changées. L'observation des deux déviations nous fournira donc deux équations pour déterminer ces deux inconnues. On trouve une vitesse de 10 000 à 30 000 km/s; quant au rapport de la charge à la masse, il est très grand. On peut le comparer au rapport correspondant en ce qui concerne l'ion hydrogène dans l'électrolyse; on trouve alors qu'un projectile cathodique transporte environ 1000 fois plus d'électricité que n'en transporterait une masse égale d'hydrogène dans un électrolyte.

Pour confirmer ces vues, il faudrait une mesure directe de cette vitesse, que l'on comparerait avec la vitesse ainsi calculée. Des expériences anciennes de J.-J. Thomson avaient donné des résultats plus de 100 fois trop faibles; mais elles étaient sujettes à certaines causes d'erreur. La question a été reprise par Wiechert dans un dispositif où l'on utilise les oscillations hertziennes; on a trouvé des résultats concordant avec la théorie, au moins comme ordre de grandeur; il y aurait un grand intérêt à reprendre ces expériences. Quoi qu'il en soit, la théorie des ondulations paraît impuissante à rendre compte de cet ensemble de faits.

Les mêmes calculs, faits sur les rayons β du radium, ont donné des vitesses encore plus considérables : 100 000, 200 000 km ou plus encore. Ces vitesses

dépassent de beaucoup toutes celles que nous connaissions. La lumière, il est vrai, on le sait depuis longtemps, fait 300 000 km/s; mais elle n'est pas un transport de matière, tandis que, si l'on adopte la théorie de l'émission pour les rayons cathodiques, il y aurait des molécules matérielles réellement animées des vitesses en question, et il convient de rechercher si les lois ordinaires de la Mécanique leur sont encore applicables.

II. — Masse longitudinale et masse transversale.

On sait que les courants électriques donnent lieu aux phénomènes d'induction, en particulier à la *self-induction*. Quand un courant croît, il se développe une force électromotrice de self-induction qui tend à s'opposer au courant; au contraire, quand le courant décroît, la force électromotrice de self-induction tend à maintenir le courant. La self-induction s'oppose donc à toute variation de l'intensité du courant, de même qu'en Mécanique l'inertie d'un corps s'oppose à toute variation de sa vitesse. *La self-induction est une véritable inertie.* Tout se passe comme si le courant ne pouvait s'établir sans mettre en mouvement l'éther environnant et comme si l'inertie de cet éther tendait, en conséquence, à maintenir constante l'intensité de ce courant. Il faudrait vaincre cette inertie pour établir le courant, il faudrait la vaincre encore pour le faire cesser.

Un rayon cathodique, qui est une pluie de projectiles chargés d'électricité négative, peut être assimilé à un courant; sans doute, ce courant diffère, au premier abord tout au moins, des courants de conduction ordinaire, où la matière est immobile et où l'électricité circule à travers la matière. C'est un *courant de convection*, où l'électricité, attachée à un véhicule matériel, est emportée par le mouvement de ce véhicule. Mais Rowland a démontré que les courants de convection produisent les mêmes effets magnétiques que les courants de conduction; ils doivent produire aussi les mêmes effets d'induction. D'abord, s'il n'en était pas ainsi, le principe de la conservation de l'énergie serait violé; d'ailleurs, Crémieu et Pender ont employé une méthode où l'on mettait en évidence *directement* ces effets d'induction.

Si la vitesse d'un corpuscule cathodique vient à varier, l'intensité du courant correspondant variera également, et il se développera des effets de self-induction qui tendront à s'opposer à cette variation. Ces corpuscules doivent

donc posséder une double inertie : leur inertie propre d'abord, et l'inertie apparente due à la self-induction qui produit les mêmes effets. Ils auront donc une masse totale apparente, composée de leur masse réelle et d'une masse fictive d'origine électromagnétique. Le calcul montre que cette masse fictive varie avec la vitesse, et que la force d'inertie de self-induction n'est pas la même quand la vitesse du projectile s'accélère ou se ralentit, ou bien quand elle est déviée; il en est donc de même de la force d'inertie apparente totale.

La masse totale apparente n'est donc pas la même quand la force réelle appliquée au corpuscule est parallèle à sa vitesse et tend à en faire varier la grandeur, et quand cette force est perpendiculaire à la vitesse et tend à en faire varier la direction. Il faut donc distinguer la *masse totale longitudinale* et la *masse totale transversale*. Ces deux masses totales dépendent, d'ailleurs, de la vitesse. Voilà ce qui résulte des travaux théoriques d'Abraham.

Dans les mesures dont nous parlions au chapitre précédent, qu'est-ce qu'on détermine en mesurant les deux déviations? C'est la vitesse, d'une part, et d'autre part, le rapport de la charge à la *masse transversale totale*. Comment, dans ces conditions, faire, dans cette masse totale, la part de la masse réelle et celle de la masse fictive électromagnétique? Si l'on n'avait que les rayons cathodiques proprement dits, il n'y faudrait pas songer; mais, heureusement, on a les rayons du radium qui, nous l'avons vu, sont notablement plus rapides. Ces rayons ne sont pas tous identiques et ne se comportent pas de la même manière sous l'action d'un champ électrique et magnétique. On trouve que la déviation électrique est fonction de la déviation magnétique, et l'on peut, en recevant sur une plaque sensible des rayons du radium qui ont subi l'action des deux champs, photographier la courbe qui représente la relation entre ces deux déviations. C'est ce qu'a fait Kaufmann, qui en a déduit la relation entre la vitesse et le rapport de la charge à la masse apparente totale, rapport que nous appellerons ε.

On pourrait supposer qu'il existe plusieurs espèces de rayons, caractérisés chacun par une vitesse déterminée, par une charge déterminée et par une masse déterminée. Mais cette hypothèse est peu vraisemblable; pour quelle raison, en effet, tous les corpuscules de même masse prendraient-ils toujours la même vitesse? Il est plus naturel de supposer que la charge ainsi que la masse *réelle* sont les mêmes pour tous les projectiles, et que ceux-ci ne diffèrent que par leur vitesse. Si le rapport ε est fonction de la vitesse, ce n'est pas parce que la masse réelle varie avec cette vitesse; mais, comme la masse

fictive électromagnétique dépend de cette vitesse, la masse totale apparente, seule observable, doit en dépendre, bien que la masse réelle n'en dépende pas et soit constante.

Les calculs d'Abraham nous font connaître la loi suivant laquelle la masse *fictive* varie en fonction de la vitesse; l'expérience de Kaufmann nous fait connaître la loi de variation de la masse *totale*. La comparaison de ces deux lois nous permettra donc de déterminer le rapport de la masse *réelle* à la masse totale.

Telle est la méthode dont s'est servi Kaufmann pour déterminer ce rapport. Le résultat est bien surprenant : *la masse réelle est nulle*.

On s'est trouvé ainsi conduit à des conceptions tout à fait inattendues. On a étendu à tous les corps ce qu'on n'avait démontré que pour les corpuscules cathodiques. Ce que nous appelons masse ne serait qu'une apparence; toute inertie serait d'origine électromagnétique. Mais alors la masse ne serait plus constante, elle augmenterait avec la vitesse; sensiblement constante pour des vitesses pouvant aller jusqu'à 1 000 km/s, elle croîtrait ensuite et deviendrait infinie pour la vitesse de la lumière. La masse transversale ne serait plus égale à la masse longitudinale : elles seraient seulement à peu près égales si la vitesse n'est pas trop grande. Le principe B de la Mécanique ne serait plus vrai.

III. — **Les rayons-canaux.**

Au point où nous en sommes, cette conclusion peut sembler prématurée. Peut-on appliquer à la matière tout entière ce qui n'a été établi que pour ces corpuscules si légers, qui ne sont qu'une émanation de la matière et peut-être pas de la vraie matière? Mais, avant d'aborder cette question, il est nécessaire de dire un mot d'une autre sorte de rayons. Je veux parler d'abord des *rayons-canaux*, les *Kanalstrahlen* de Goldstein. La cathode, en même temps que les rayons cathodiques chargés d'électricité négative, émet des rayons-canaux chargés d'électricité positive. En général, ces rayons-canaux, n'étant pas repoussés par la cathode, restent confinés dans le voisinage immédiat de cette cathode, où ils constituent la « couche chamois », qu'il n'est pas très aisé d'apercevoir; mais si la cathode est percée de trous, et si elle obstrue presque complètement le tube, les rayons-canaux vont se propager *en arrière* de la cathode, dans le sens opposé à celui des rayons cathodiques, et il

deviendra possible de les étudier. C'est ainsi qu'on a pu mettre en évidence leur charge positive et montrer que les déviations magnétiques et électriques existent encore, comme pour les rayons cathodiques, mais sont beaucoup plus faibles.

Le radium émet également des rayons analogues aux rayons-canaux, et relativement très absorbables, que l'on appelle les rayons α.

On peut, comme pour les rayons cathodiques, mesurer les deux déviations et en déduire la vitesse et le rapport ε. Les résultats sont moins constants que pour les rayons cathodiques, mais la vitesse est plus faible ainsi que le rapport ε; les corpuscules positifs sont moins chargés que les corpuscules négatifs ; ou si, ce qui est plus naturel, on suppose que les charges sont égales et de signe contraire, les corpuscules positifs sont beaucoup plus gros. Ces corpuscules, chargés les uns positivement, les autres négativement, ont reçu le nom d'*électrons*.

IV. — La théorie de Lorentz.

Mais les électrons ne manifestent pas seulement leur existence dans ces rayons où ils nous apparaissent animés de vitesses énormes. Nous allons les voir dans des rôles bien différents, et ce sont eux qui nous rendront compte des principaux phénomènes de l'Optique et de l'Électricité. La brillante synthèse dont nous allons dire un mot est due à Lorentz.

La matière est tout entière formée d'électrons portant des charges énormes et, si elle nous semble neutre, c'est que les charges de signe contraire de ces électrons se compensent. On peut se représenter, par exemple, une sorte de système solaire formé d'un gros électron positif, autour duquel graviteraient de nombreuses petites planètes qui seraient des électrons négatifs, attirés par l'électricité de nom contraire qui charge l'électron central. Les charges négatives de ces planètes compenseraient la charge positive de ce Soleil, de sorte que la somme algébrique de toutes ces charges serait nulle.

Tous ces électrons baigneraient dans l'éther. L'éther serait partout identique à lui-même, et les perturbations s'y propageraient suivant les mêmes lois que la lumière ou les oscillations hertziennes *dans le vide*. En dehors des électrons et de l'éther, il n'y aurait rien. Quand une onde lumineuse pénétrerait dans une partie de l'éther où les électrons seraient nombreux, ces électrons se mettraient en mouvement sous l'influence de la perturbation de l'éther, et ils

réagiraient ensuite sur l'éther. C'est ainsi que s'expliqueraient la réfraction, la dispersion, la double réfraction et l'absorption. De même, si un électron se mettait en mouvement pour une cause quelconque, il troublerait l'éther autour de lui et donnerait naissance à des ondes lumineuses, ce qui expliquerait l'émission de la lumière par les corps incandescents.

Dans certains corps, les métaux par exemple, nous aurions des électrons immobiles, entre lesquels circuleraient des électrons mobiles jouissant d'une entière liberté, sauf celle de sortir du corps métallique et de franchir la surface qui le sépare du vide extérieur, ou de l'air, ou de tout autre corps non métallique. Ces électrons mobiles se comportent alors, à l'intérieur du corps métallique, comme le font, d'après la théorie cinétique des gaz, les molécules d'un gaz à l'intérieur du vase où ce gaz est renfermé. Mais, sous l'influence d'une différence de potentiel, les électrons mobiles négatifs tendraient à aller tous d'un côté, et les électrons mobiles positifs de l'autre. C'est ce qui produirait les courants électriques, et *c'est pour cela que ces corps seraient conducteurs*. D'autre part, les vitesses de nos électrons seraient d'autant plus grandes que la température serait plus élevée, si nous acceptons l'assimilation avec la théorie cinétique des gaz. Quand un de ces électrons mobiles rencontrerait la surface du corps métallique, surface qu'il ne peut franchir, il se réfléchirait, comme une bille de billard qui a touché la bande, et sa vitesse subirait un brusque changement de direction. Mais, quand un électron change de direction, ainsi que nous le verrons plus loin, il devient la source d'une onde lumineuse, et c'est pour cela que les métaux chauds sont incandescents.

Dans d'autres corps, les diélectriques et les corps transparents, les électrons mobiles jouissent d'une liberté beaucoup moins grande. Ils restent comme attachés à des électrons fixes qui les attirent. Plus ils s'en éloignent, plus cette attraction devient grande et tend à les ramener en arrière. Ils ne peuvent donc subir que de petits écarts; ils ne peuvent plus circuler, mais seulement osciller autour de leur position moyenne. C'est pour cette raison que ces corps ne seraient pas conducteurs; ils seraient d'ailleurs le plus souvent transparents, et ils seraient réfringents parce que les vibrations lumineuses se communiqueraient aux électrons mobiles, susceptibles d'oscillation, et qu'il en résulterait une perturbation.

Je ne puis donner ici le détail des calculs; je me bornerai à dire que cette théorie rend compte de tous les faits connus, et qu'elle en a fait prévoir de nouveaux, tels que le phénomène de Zeeman.

V. — Conséquences mécaniques.

Maintenant, nous pouvons envisager deux hypothèses :

1° Les électrons positifs possèdent une masse réelle, beaucoup plus grande que leur masse fictive électromagnétique ; les électrons négatifs sont seuls dépourvus de masse réelle. On pourrait même supposer qu'en dehors des électrons des deux signes, il y a des atomes neutres qui n'ont plus d'autre masse que leur masse réelle. Dans ce cas, la Mécanique n'est pas atteinte ; nous n'avons pas besoin de toucher à ses lois ; la masse réelle est constante ; seulement les mouvements sont troublés par les effets de self-induction, ce qu'on a toujours su ; ces perturbations sont d'ailleurs à peu près négligeables, sauf pour les électrons négatifs qui, n'ayant pas de masse réelle, ne sont pas de la vraie matière.

2° Mais il y a un autre point de vue ; on peut supposer qu'il n'y a pas d'atome neutre, et que les électrons positifs sont dépourvus de masse réelle au même titre que les électrons négatifs. Mais alors, la masse réelle s'évanouissant, ou bien le mot *masse* n'aura plus aucun sens, ou bien il faudra qu'il désigne la masse fictive électromagnétique ; dans ce cas, la masse ne sera plus constante, la *masse* transversale ne sera plus égale à la masse longitudinale, les principes de la Mécanique seront renversés.

Un mot d'explication d'abord. Nous avons dit que, pour une même charge, la masse *totale* d'un électron positif est beaucoup plus grande que celle d'un électron négatif. Et alors il est naturel de penser que cette différence s'explique parce que l'électron positif a, outre sa masse fictive, une masse réelle considérable ; ce qui nous ramènerait à la première hypothèse. Mais on peut admettre également que la masse réelle est nulle pour les uns comme pour les autres, mais que la masse fictive de l'électron positif est beaucoup plus grande, parce que cet électron est beaucoup plus petit. Je dis bien : beaucoup plus petit. Et, en effet, dans cette hypothèse, l'inertie est d'origine exclusivement électromagnétique ; elle se réduit à l'inertie de l'éther ; les électrons ne sont plus rien par eux-mêmes ; ils sont seulement des trous dans l'éther, et autour desquels s'agite l'éther ; plus ces trous seront petits, plus il y aura d'éther, plus par conséquent l'inertie de l'éther sera grande.

Comment décider entre ces deux hypothèses? En opérant sur les rayons-canaux comme Kaufmann l'a fait sur les rayons β? C'est impossible; la vitesse de ces rayons est beaucoup trop faible. Chacun devra-t-il donc se décider d'après son tempérament, les conservateurs allant d'un côté et les amis du nouveau de l'autre? Peut-être; mais, pour bien faire comprendre les arguments des novateurs, il faut faire intervenir d'autres considérations.

VI. — L'Aberration.

On sait en quoi consiste le phénomène de l'aberration, découvert par Bradley. La lumière émanée d'une étoile met un certain temps pour parcourir une lunette; pendant ce temps, la lunette, entraînée par le mouvement de la Terre, s'est déplacée. Si donc on braquait la lunette dans la direction *vraie* de l'étoile, l'image se formerait au point qu'occupait la croisée des fils du réticule quand la lumière a atteint l'objectif; et cette croisée ne serait plus en ce même point quand la lumière atteindrait le plan du réticule. On serait donc conduit à dépointer la lunette pour ramener l'image sur la croisée des fils. Il en résulte que l'astronome ne pointera pas la lunette dans la direction de la vitesse absolue de la lumière, c'est-à-dire sur la position vraie de l'étoile, mais bien dans la direction de la vitesse relative de la lumière par rapport à la Terre, c'est-à-dire sur ce qu'on appelle la position apparente de l'étoile. Sur la figure 1, nous avons représenté en AB la vitesse absolue de la lumière (changée de sens, puisque l'observateur est en A et l'étoile à une grande distance dans la direction AB), en BD la vitesse de la Terre, en AD la vitesse *relative* de la lumière (changée de sens); l'astronome devrait pointer son instrument dans la direction AB : il le pointe dans la direction AD.

La grandeur de AB, c'est-à-dire la vitesse de la lumière, est connue; on pourrait donc croire que nous avons le moyen de calculer BD, c'est-à-dire la vitesse *absolue* de la Terre. (Je m'expliquerai tout à l'heure sur ce mot absolu.) Il n'en est rien; nous connaissons bien la position apparente de l'étoile, c'est-à-dire la direction AD que nous observons; mais nous ne connaissons pas sa position vraie : nous ne connaissons AB qu'en grandeur et pas en direction.

Si donc la vitesse absolue de la Terre était rectiligne et uniforme, nous n'aurions jamais soupçonné le phénomène de l'aberration; mais elle est variable; elle se compose de deux parties : la vitesse du système solaire, qui est

rectiligne et uniforme et que je représente en BC; la vitesse de la Terre par rapport au Soleil, qui est variable et que je représente en CD, de telle façon que la résultante soit représentée en BD.

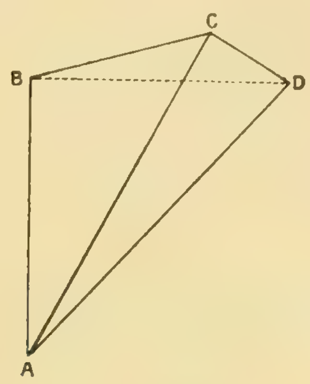


Fig. 1.

Comme BC est constant, la direction AC est invariable; elle définit la position apparente *moyenne* de l'étoile, tandis que la direction AD, qui est variable, définit la position apparente actuelle, qui décrit une petite ellipse autour de la position apparente moyenne, et c'est cette ellipse qu'on observe.

Nous connaissons CD en grandeur et en direction d'après les lois de Kepler et notre connaissance de la distance du Soleil; nous connaissons AC et AD en direction et nous pouvons, par conséquent, construire le triangle ACD; connaissant AC, nous aurons la vitesse de la lumière (représentée par AB), puisque, BC étant supposé très petit au regard de AB, AC diffère très peu de AB. La vitesse *relative* de la Terre par rapport au Soleil est seule intervenue.

Halte-là ! toutefois. Nous avons regardé AC comme égal à AB; cela n'est pas rigoureux, cela n'est qu'approché; poussons l'approximation un peu plus loin. Les dimensions de l'ellipse décrite pendant une année par la position apparente d'une étoile dépendent du rapport de CD, qui est connue, à la longueur AC; l'observation nous fait donc connaître cette dernière longueur. Comparons les grands axes de l'ellipse pour les différentes étoiles : nous aurons pour chacune d'elles le moyen de déterminer AC en grandeur et en direction. La longueur AB est constante (c'est la vitesse de la lumière), de sorte que les points B correspondant aux diverses étoiles seront tous sur une sphère de centre A. Comme BC est constant en grandeur et direction, les points C

correspondant aux différentes étoiles seront tous sur une sphère de rayon AB et de centre A', le vecteur AA' étant égal et parallèle à BC. Si alors on avait pu déterminer, comme nous venons de le dire, les différents points C, on connaîtrait cette sphère, son centre A' et, par conséquent, la grandeur et la direction de la vitesse absolue BC.

On aurait donc un moyen de déterminer la vitesse absolue de la Terre; cela serait peut-être moins choquant qu'il ne semble d'abord; il ne s'agit pas, en effet, de la vitesse par rapport à un espace absolu vide, mais de la vitesse par rapport à l'éther, que l'on regarde *par définition* comme étant en repos absolu.

D'ailleurs, ce moyen est purement théorique. En effet, l'aberration est très petite; les variations possibles de l'ellipse d'aberration sont beaucoup plus petites encore, et, si nous regardons l'aberration comme du premier ordre, elles doivent donc être regardées comme du second ordre : un millième de seconde environ; elles sont absolument inappréciables pour nos instruments. Nous verrons enfin plus loin pourquoi la théorie précédente doit être rejetée, et pourquoi nous ne pourrions déterminer BC quand même nos instruments seraient 10 000 fois plus précis !

On pourrait songer à un autre moyen, et l'on y a songé en effet. La vitesse de la lumière n'est pas la même dans l'eau que dans l'air; ne pourrait-on comparer les deux positions apparentes d'une étoile vue à travers une lunette tantôt pleine d'air, tantôt pleine d'eau? Les résultats ont été négatifs; les lois apparentes de la réflexion et de la réfraction ne sont pas altérées par le mouvement de la Terre. Ce phénomène comporte deux explications :

1° On pourrait supposer que l'éther n'est pas en repos, mais qu'il est entraîné par les corps en mouvement. Il ne serait pas étonnant alors que les phénomènes de réfraction ne fussent pas altérés par le mouvement de la Terre, puisque tout, prismes, lunettes et éther, est entraîné à la fois dans une même translation. Quant à l'aberration elle-même, elle s'expliquerait par une sorte de réfraction qui se produirait à la surface de séparation de l'éther en repos dans les espaces interstellaires et de l'éther entraîné par le mouvement de la Terre. C'est sur cette hypothèse (entraînement total de l'éther) qu'est fondée la *théorie de Hertz* sur l'Électrodynamique des corps en mouvement.

2° Fresnel suppose, au contraire, que l'éther est en repos absolu dans le vide, en repos presque absolu dans l'air, quelle que soit la vitesse de cet air,

et qu'il est partiellement entraîné par les milieux réfringents. Lorentz a donné à cette théorie une forme plus satisfaisante. Pour lui, l'éther est en repos, les électrons seuls sont en mouvement; dans le vide, où l'éther entre seul en jeu, dans l'air, où il entre presque seul en jeu, l'entraînement est nul ou presque nul; dans les milieux réfringents, où la perturbation est produite à la fois par les vibrations de l'éther et par celles des électrons mis en branle par l'agitation de l'éther, les ondulations se trouvent *partiellement* entraînées.

Pour décider entre les deux hypothèses, nous avons l'expérience de Fizeau, qui a comparé, par des mesures de franges d'interférence, la vitesse de la lumière dans l'air en repos ou en mouvement, ainsi que dans l'eau en repos ou en mouvement. Ces expériences ont confirmé l'hypothèse de l'entraînement partiel de Fresnel. Elles ont été reprises avec le même résultat par Michelson. *La théorie de Hertz doit donc être rejetée.*

VII. — Le principe de relativité.

Mais si l'éther n'est pas entraîné par le mouvement de la Terre, est-il possible de mettre en évidence, par le moyen des phénomènes optiques, la vitesse absolue de la Terre, ou plutôt sa vitesse par rapport à l'éther immobile? L'expérience a répondu négativement, et cependant on a varié les procédés expérimentaux de toutes les manières possibles. Quel que soit le moyen qu'on emploie, on ne pourra jamais déceler que des vitesses relatives, j'entends les vitesses de certains corps matériels par rapport à d'autres corps matériels. En effet, si la source de lumière et les appareils d'observation sont sur la Terre et participent à son mouvement, les résultats expérimentaux ont toujours été les mêmes, quelle que soit l'orientation de l'appareil par rapport à la direction du mouvement orbital de la Terre. Si l'aberration astronomique se produit, c'est que la source, qui est une étoile, est en mouvement par rapport à l'observateur.

Les hypothèses faites jusqu'ici rendent parfaitement compte de ce résultat général, *si l'on néglige les quantités très petites de l'ordre du carré de l'aberration*. L'explication s'appuie sur la notion du *temps local*, que je vais chercher à faire comprendre, et qui a été introduite par Lorentz. Supposons deux observateurs, placés l'un en A, l'autre en B, et voulant régler leurs montres par le moyen de signaux optiques. Ils conviennent que B enverra un

signal à A quand sa montre marquera une heure déterminée, et A remet sa montre à l'heure au moment où il aperçoit le signal. Si l'on opérait seulement de la sorte, il y aurait une erreur systématique, car comme la lumière met un certain temps t pour aller de B en A, la montre de A va retarder d'un temps t sur celle de B. Cette erreur est aisée à corriger. Il suffit de croiser les signaux. Il faut que A envoie à son tour des signaux à B; et, après ce nouveau réglage, ce sera la montre de B qui retardera d'un temps t sur celle de A. Il suffira alors de prendre la moyenne arithmétique entre les deux réglages.

Mais cette façon d'opérer suppose que la lumière met le même temps pour aller de A en B et pour revenir de B en A. Cela est vrai si les observateurs sont immobiles; cela ne l'est plus s'ils sont entraînés dans une translation commune, parce qu'alors A, par exemple, ira au-devant de la lumière qui vient de B, tandis que B fuira devant la lumière qui vient de A. Si donc les observateurs sont entraînés dans une translation commune et s'ils ne s'en doutent pas, leur réglage sera défectueux; leurs montres n'indiqueront pas le même temps; chacune d'elles indiquera le *temps local*, convenant au point où elle se trouve.

Les deux observateurs n'auront aucun moyen de s'en apercevoir, si l'éther immobile ne peut leur transmettre que des signaux lumineux, marchant tous avec la même vitesse, et si les autres signaux qu'ils pourraient s'envoyer leur sont transmis par des milieux entraînés avec eux dans leur translation. Le phénomène que chacun d'eux observera sera soit en avance, soit en retard; il ne se produira pas au même moment que si la translation n'existait pas; mais, comme on l'observera avec une montre mal réglée, on ne s'en apercevra pas et les apparences ne seront pas altérées.

Il résulte de là que la compensation est facile à expliquer tant qu'on néglige le carré de l'aberration, et longtemps les expériences ont été trop peu précises pour qu'il y eût lieu d'en tenir compte. Mais un jour Michelson a imaginé un procédé beaucoup plus délicat : il a fait interférer des rayons qui avaient parcouru des trajets différents après s'être réfléchis sur des miroirs; chacun des trajets approchant d'un mètre et les franges d'interférence permettant d'apprécier des différences d'une fraction de millième de millimètre, on ne pouvait plus négliger le carré de l'aberration, et *cependant les résultats furent encore négatifs*. La théorie demandait donc à être complétée, et elle l'a été par *l'hypothèse de Lorentz et Fitz-Gerald*.

Ces deux physiciens supposent que tous les corps entraînés dans une translation subissent une contraction dans le sens de cette translation, tandis que

leurs dimensions perpendiculaires à cette translation demeurent invariables. *Cette contraction est la même pour tous les corps;* elle est d'ailleurs très faible, d'environ un deux cent millionième pour une vitesse comme celle de la Terre. Nos instruments de mesure ne pourraient d'ailleurs la déceler, même s'ils étaient beaucoup plus précis; les mètres avec lesquels nous mesurons subissent, en effet, la même contraction que les objets à mesurer. Si un corps s'applique exactement sur le mètre, quand on oriente le corps et, par conséquent, le mètre dans le sens du mouvement de la Terre, il ne cessera pas de s'appliquer exactement sur le mètre dans une autre orientation, et cela bien que le corps et le mètre aient changé de longueur en même temps que d'orientation, et précisément parce que le changement est le même pour l'un et pour l'autre. Mais il n'en est pas de même si nous mesurons une longueur non plus avec un mètre, mais par le temps que la lumière met à la parcourir, et c'est précisément ce qu'a fait Michelson.

Un corps sphérique, lorsqu'il est en repos, prendra ainsi la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati lorsqu'il sera en mouvement; mais l'observateur le croira toujours sphérique, parce qu'il a subi lui-même une déformation analogue, ainsi que tous les objets qui lui servent de points de repère. Au contraire, les surfaces d'ondes de la lumière, qui sont restées rigoureusement sphériques, lui paraîtront des ellipsoïdes allongés.

Que va-t-il se passer alors ? Supposons un observateur et une source entraînés ensemble dans la translation : les surfaces d'onde émanées de la source seront des sphères ayant pour centres les positions successives de la source; la distance de ce centre à la position actuelle de la source sera proportionnelle au temps écoulé depuis l'émission, c'est-à-dire au rayon de la sphère. Toutes ces sphères seront donc homothétiques l'une de l'autre, par rapport à la position actuelle S de la source. Mais, pour notre observateur, à cause de la contraction, toutes ces sphères paraîtront des ellipsoïdes allongés; et tous ces ellipsoïdes seront encore homothétiques par rapport au point S; l'excentricité de tous ces ellipsoïdes est la même et dépend seulement de la vitesse de la Terre. *Nous choisirons la loi de contraction, de façon que le point* S *soit au foyer de la section méridienne de l'ellipsoïde.*

Comment allons-nous faire alors, pour évaluer le temps que met la lumière pour aller de B en A ? Je représente en A et en B (*fig.* 2) les positions *apparentes* de ces deux points. Je construis un ellipsoïde semblable aux ellipsoïdes des ondes que nous venons de définir et ayant son grand axe dans la direction

du mouvement de la Terre. Je construis cet ellipsoïde de façon qu'il passe par B et ait son foyer en A.

D'après une propriété bien connue de l'ellipsoïde, on a une relation entre la distance apparente AB des deux points et sa projection AB'; cette relation est :

$$AB + e.AB' = OQ\sqrt{1-e^2}.$$

Mais le demi-petit axe de l'ellipsoïde, qui en est la dimension inaltérée, est égal à Vt, V étant la vitesse de la lumière et t la durée de transmission ; d'où :

$$AB + e.AB' = Vt\sqrt{1-e^2}.$$

L'excentricité e est une constante ne dépendant que de la vitesse de la Terre; nous avons donc une relation linéaire entre AB, AB' et t. Mais AB' est la

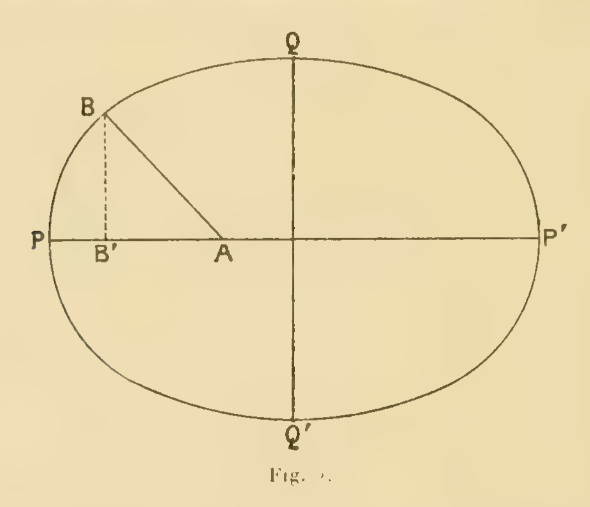


Fig. 1.

différence des abscisses des points A et B. Supposons que la différence entre le temps vrai et le temps local en un point quelconque soit égale à l'abscisse de ce point multipliée par la constante :

$$\frac{e}{V\sqrt{1-e^2}};$$

la durée *apparente* de transmission sera :

$$\tau = t - AB'\frac{e}{V\sqrt{1-e^2}},$$

d'où

$$AB = V\tau\sqrt{1-e^2}.$$

c'est-à-dire que la durée *apparente* de transmission est proportionnelle à la distance *apparente*. Cette fois, la compensation est *rigoureuse*, et c'est ce qui explique l'expérience de Michelson.

J'ai dit plus haut que, d'après les théories ordinaires, les observations de l'aberration astronomique pourraient nous faire connaître la vitesse absolue de la Terre, si nos instruments étaient 1000 fois plus précis. Il me faut modifier cette conclusion. Oui, les angles observés seraient modifiés par l'effet de cette vitesse absolue, mais les cercles divisés dont nous nous servons pour mesurer les angles seraient déformés par la translation : ils deviendraient des ellipses; il en résulterait une erreur sur l'angle mesuré, et *cette seconde erreur compenserait exactement la première*.

Cette hypothèse de Lorentz et Fitz-Gerald paraîtra au premier abord fort extraordinaire; tout ce que nous pouvons dire pour le moment en sa faveur, c'est qu'elle n'est que la traduction immédiate du résultat expérimental de Michelson, si l'on *définit* les longueurs par les temps que la lumière met à les parcourir.

Quoi qu'il en soit, il est impossible d'échapper à cette impression que le principe de relativité est une loi générale de la Nature, qu'on ne pourra jamais par aucun moyen imaginable mettre en évidence que des vitesses relatives, et j'entends par là non pas seulement les vitesses des corps par rapport à l'éther, mais les vitesses des corps les uns par rapport aux autres. Trop d'expériences diverses ont donné des résultats concordants pour qu'on ne se sente pas tenté d'attribuer à ce principe de relativité une valeur comparable à celle du principe d'équivalence, par exemple. Il convient, en tout cas, de voir à quelles conséquences nous conduirait cette façon de voir et de soumettre ensuite ces conséquences au contrôle de l'expérience.

VIII. — **Le principe de réaction.**

Voyons ce que devient, dans la théorie de Lorentz, le principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Voilà un électron A qui entre en mouvement pour une cause quelconque; il produit une perturbation dans l'éther; au bout d'un certain temps, cette perturbation atteint un autre électron B, qui sera dérangé de sa position d'équilibre. Dans ces conditions, il ne peut y avoir égalité entre l'action et la réaction, au moins si l'on ne considère pas l'éther, mais seule-

ment les électrons *qui sont seuls observables*, puisque notre matière est formée d'électrons.

En effet, c'est l'électron A qui a dérangé l'électron B; alors même que l'électron B réagirait sur A, cette réaction pourrait être égale à l'action, mais elle ne saurait, en aucun cas, être simultanée, puisque l'électron B ne pourrait entrer en mouvement qu'après un certain temps, nécessaire pour la propagation. Si l'on soumet le problème à un calcul plus précis, on arrive au résultat suivant : Supposons un excitateur de Hertz placé au foyer d'un miroir parabolique auquel il est lié mécaniquement; cet excitateur émet des ondes électromagnétiques, et le miroir renvoie toutes ces ondes dans la même direction; l'excitateur va donc rayonner de l'énergie dans une direction déterminée. Eh bien, le calcul montre que *l'excitateur va reculer* comme un canon qui a envoyé un projectile. Dans le cas du canon, le recul est le résultat naturel de l'égalité de l'action et de la réaction. Le canon recule, parce que le projectile sur lequel il a agi réagit sur lui.

Mais ici, il n'en est plus de même. Ce que nous avons envoyé au loin, ce n'est plus un projectile matériel : c'est de l'énergie, et l'énergie n'a pas de masse; il n'y a pas de contre-partie. Et, au lieu d'un excitateur, nous aurions pu considérer tout simplement une lampe avec un réflecteur concentrant ses rayons dans une seule direction.

Il est vrai que, si l'énergie émanée de l'excitateur ou de la lampe vient à atteindre un objet matériel, cet objet va subir une poussée mécanique comme s'il avait été atteint par un projectile véritable, et cette poussée sera égale au recul de l'excitateur et de la lampe, s'il ne s'est pas perdu d'énergie en route et si l'objet absorbe cette énergie en totalité. On serait donc tenté de dire qu'il y a encore compensation entre l'action et la réaction. Mais cette compensation, alors même qu'elle est complète, est toujours retardée. Elle ne se produit jamais si la lumière, après avoir quitté la source, erre dans les espaces interstellaires sans jamais rencontrer un corps matériel; elle est incomplète, si le corps qu'elle frappe n'est pas parfaitement absorbant.

Ces actions mécaniques sont-elles trop petites pour être mesurées, ou bien sont-elles accessibles à l'expérience? Ces actions ne sont autre chose que celles qui sont dues aux pressions *Maxwell-Bartholi*; Maxwell avait prévu ces pressions par des calculs relatifs à l'Électrostatique et au Magnétisme; Bartholi était arrivé au même résultat par des considérations de Thermodynamique.

C'est de cette façon que s'expliquent les *queues des comètes*. De petites

particules se détachent du noyau de la comète; elles sont frappées par la lumière du Soleil, qui les repousse comme ferait une pluie de projectiles venant du Soleil. La masse de ces particules est tellement petite que cette répulsion l'emporte sur l'attraction newtonienne; elles vont donc former les queues en s'éloignant du Soleil.

La vérification expérimentale directe n'était pas aisée à obtenir. La première tentative a conduit à la construction du *radiomètre*. Mais cet appareil *tourne à l'envers*, dans le sens opposé au sens théorique, et l'explication de sa rotation, découverte depuis, est toute différente. On a réussi enfin, en poussant plus loin le vide d'une part, et d'autre part en ne noircissant pas l'une des faces des palettes et dirigeant un faisceau lumineux sur l'une des faces. Les effets radiométriques et les autres causes perturbatrices sont éliminés par une série de précautions minutieuses, et l'on obtient une déviation qui est fort petite, mais qui est, paraît-il, conforme à la théorie.

Les mêmes effets de la pression Maxwell-Bartholi sont prévus également par la théorie de Hertz, dont nous avons parlé plus haut, et par celle de Lorentz. Mais il y a une différence. Supposons que l'énergie, sous forme de lumière par exemple, aille d'une source lumineuse à un corps quelconque à travers un milieu transparent. La pression de Maxwell-Bartholi agira, non seulement sur la source au départ, et sur le corps éclairé à l'arrivée, mais sur la matière du milieu transparent qu'elle traverse. Au moment où l'onde lumineuse atteindra une région nouvelle de ce milieu, cette pression poussera en avant la matière qui s'y trouve répandue et la ramènera en arrière quand l'onde quittera cette région. De sorte que le recul de la source a pour contre-partie la marche en avant de la matière transparente qui est au contact de cette source; un peu plus tard, le recul de cette même matière a pour contre-partie la marche en avant de la matière transparente qui se trouve un peu plus loin, et ainsi de suite.

Seulement la compensation est-elle parfaite ? L'action de la pression Maxwell-Bartholi sur la matière du milieu transparent est-elle égale à sa réaction sur la source, et cela quelle que soit cette matière ? Ou bien cette action est-elle d'autant plus petite que le milieu est moins réfringent et plus raréfié, pour devenir nulle dans le vide ? Si l'on admettait la théorie de Hertz, qui regarde la matière comme mécaniquement liée à l'éther, de façon que l'éther soit entraîné entièrement par la matière, il faudrait répondre oui à la première question et non à la seconde.

Il y aurait alors compensation parfaite, comme l'exige le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, même dans les milieux les moins réfringents, même dans l'air, même dans le vide interplanétaire, où il suffirait de supposer un reste de matière, si subtile qu'elle soit. Si l'on admet, au contraire, la théorie de Lorentz, la compensation, toujours imparfaite, est insensible dans l'air et devient nulle dans le vide.

Mais nous avons vu plus haut que l'expérience de Fizeau ne permet pas de conserver la théorie de Hertz; il faut donc adopter la théorie de Lorentz et, par conséquent, *renoncer au principe de réaction*.

IX. — Conséquences du principe de relativité.

Nous avons vu plus haut les raisons qui portent à regarder le principe de relativité comme une loi générale de la Nature. Voyons à quelles conséquences nous conduirait ce principe, si nous le regardions comme définitivement démontré.

D'abord il nous oblige à généraliser l'hypothèse de Lorentz et Fitz-Gerald sur la contraction de tous les corps dans le sens de la translation. En particulier, nous devrons étendre cette hypothèse aux électrons eux-mêmes. Abraham considérait ces électrons comme sphériques et indéformables; il nous faudra admettre que ces électrons, sphériques quand ils sont au repos, subissent la contraction de Lorentz quand ils sont en mouvement et prennent alors la forme d'ellipsoïdes aplatis.

Cette déformation des électrons va influer sur leurs propriétés mécaniques. En effet, j'ai dit que le déplacement de ces électrons chargés est un véritable courant de convection et que leur inertie apparente est due à la self-induction de ce courant : exclusivement en ce qui concerne les électrons négatifs; exclusivement ou non, nous n'en savons rien encore, pour les électrons positifs. Eh bien, la déformation des électrons, déformation qui dépend de leur vitesse, va modifier la distribution de l'électricité à leur surface, par conséquent l'intensité du courant de convection qu'ils produisent, par conséquent les lois suivant lesquelles la self-induction de ce courant variera en fonction de la vitesse.

A ce prix, la compensation sera parfaite et conforme aux exigences du principe de relativité, mais cela à deux conditions :

1° Que les électrons positifs n'aient pas de masse réelle, mais seulement une masse fictive électromagnétique; ou tout au moins que leur masse réelle, si elle existe, ne soit pas constante et varie avec la vitesse suivant les mêmes lois que leur masse fictive;

2° Que toutes les forces soient d'origine électromagnétique, ou tout au moins qu'elles varient avec la vitesse suivant les mêmes lois que les forces d'origine électromagnétique.

C'est encore Lorentz qui a fait cette remarquable synthèse; arrêtons-nous-y un instant et voyons ce qui en découle. D'abord, il n'y a plus de matière, puisque les électrons positifs n'ont plus de masse réelle, ou tout au moins plus de masse réelle constante. Les principes actuels de notre Mécanique, fondés sur la constance de la masse, doivent donc être modifiés.

Ensuite, il faut chercher une explication électromagnétique de toutes les forces connues, en particulier de la gravitation, ou tout au moins modifier la loi de la gravitation de telle façon que cette force soit altérée par la vitesse de la même façon que les forces électromagnétiques. Nous reviendrons sur ce point.

Tout cela paraît, au premier abord, un peu artificiel. En particulier, cette déformation des électrons semble bien hypothétique. Mais on peut présenter la chose autrement, de façon à éviter de mettre cette hypothèse de la déformation à la base du raisonnement. Considérons les électrons comme des points matériels et demandons-nous comment doit varier leur masse en fonction de la vitesse pour ne pas contrevenir au principe de relativité. Où, plutôt encore, demandons-nous quelle doit être leur accélération sous l'influence d'un champ électrique ou magnétique, pour que ce principe ne soit pas violé et qu'on retombe sur les lois ordinaires en supposant la vitesse très faible. Nous trouverons que les variations de cette masse, ou de ces accélérations, doivent se passer *comme si* l'électron subissait la déformation de Lorentz.

X. — L'expérience de Kaufmann.

Nous voilà donc en présence de deux théories : l'une où les électrons sont indéformables, c'est celle d'Abraham; l'autre où ils subissent la déformation

de Lorentz. Dans les deux cas, leur masse croît avec la vitesse, pour devenir infinie quand cette vitesse devient égale à celle de la lumière; mais la loi de la variation n'est pas la même. La méthode employée par Kaufmann pour mettre en évidence la loi de variation de la masse semble donc nous donner un moyen expérimental de décider entre les deux théories.

Malheureusement, ses premières expériences n'étaient pas assez précises pour cela; aussi a-t-il cru devoir les reprendre avec plus de précautions, et en mesurant avec grand soin l'intensité des champs. Sous leur nouvelle forme, *elles ont donné raison à la théorie d'Abraham*. Le principe de relativité n'aurait donc pas la valeur rigoureuse qu'on était tenté de lui attribuer; on n'aurait plus aucune raison de croire que les électrons positifs sont dénués de masse réelle comme les électrons négatifs.

Toutefois, avant d'adopter définitivement cette conclusion, un peu de réflexion est nécessaire. La question est d'une telle importance qu'il serait à désirer que l'expérience de Kaufmann fût reprise par un autre expérimentateur. Malheureusement, cette expérience est fort délicate et ne pourra être menée à bien que par un physicien de la même habileté que Kaufmann. Toutes les précautions ont été convenablement prises et l'on ne voit pas bien quelle objection on pourrait faire.

Il y a cependant un point sur lequel je désirerais attirer l'attention : c'est sur la mesure du champ électrostatique, mesure d'où tout dépend. Ce champ était produit entre les deux armatures d'un condensateur; et, entre ces armatures, on avait dû faire un vide extrêmement parfait, afin d'obtenir un isolement complet. On a mesuré alors la différence de potentiel des deux armatures, et l'on a obtenu le champ en divisant cette différence par la distance des armatures. Cela suppose que le champ est uniforme; cela est-il certain? Ne peut-il se faire qu'il y ait une chute brusque de potentiel dans le voisinage d'une des armatures, de l'armature négative, par exemple? Il peut y avoir une différence de potentiel au contact entre le métal et le vide, et il peut se faire que cette différence ne soit pas la même du côté positif et du côté négatif ; ce qui me porterait à le croire, ce sont les effets de soupape électrique entre mercure et vide.

Quelque faible que soit la probabilité pour qu'il en soit ainsi, il semble qu'il y ait lieu d'en tenir compte.

XI. — Le principe d'inertie.

Dans la nouvelle Dynamique, le principe d'inertie est encore vrai, c'est-à-dire qu'un électron *isolé* aura un mouvement rectiligne et uniforme. Du moins, on s'accorde généralement à l'admettre; cependant, Lindemann a fait des objections à cette façon de voir; je ne veux pas prendre parti dans cette discussion, que je ne puis exposer ici à cause de son caractère trop ardu. Il suffirait en tout cas de légères modifications à la théorie pour se mettre à l'abri des objections de Lindemann.

On sait qu'un corps plongé dans un fluide éprouve, quand il est en mouvement, une résistance considérable, mais c'est parce que nos fluides sont visqueux; dans un fluide idéal, parfaitement dépourvu de viscosité, le corps agiterait derrière lui une poupe liquide, une sorte de sillage; au départ, il faudrait un grand effort pour le mettre en mouvement, puisqu'il faudrait ébranler non seulement le corps lui-même, mais le liquide de son sillage. Mais, une fois le mouvement acquis, il se perpétuerait sans résistance, puisque le corps, en s'avançant, transporterait simplement avec lui la perturbation du liquide, sans que la force vive totale de cė liquide augmentât. Tout se passerait donc comme si son inertie était augmentée. Un électron s'avançant dans l'éther se comporterait de la même manière : autour de lui, l'éther serait agité, mais cette perturbation accompagnerait le corps dans son mouvement; de sorte que, pour un observateur entraîné avec l'électron, les champs électrique et magnétique qui accompagnent cet électron paraîtraient invariables, et ne pourraient changer que si la vitesse de l'électron venait à varier. Il faudrait donc un effort pour mettre l'électron en mouvement, puisqu'il faudrait créer l'énergie de ces champs; au contraire, une fois le mouvement acquis, aucun effort ne serait nécessaire pour le maintenir, puisque l'énergie créée n'aurait plus qu'à se transporter derrière l'électron comme un sillage. Cette énergie ne peut donc qu'augmenter l'inertie de l'électron, comme l'agitation du liquide augmente celle du corps plongé dans un fluide parfait. Et même les électrons négatifs, tout au moins, n'ont pas d'autre inertie que celle-là.

Dans l'hypothèse de Lorentz, la force vive, qui n'est autre que l'énergie de l'éther, n'est pas proportionnelle à v^2, mais à $\frac{V - \sqrt{V^2 - v^2}}{\sqrt{V^2 - v^2}}$, V représentant la

vitesse de la lumière; la quantité de mouvement n'est plus proportionnelle à v, mais à $\frac{v}{\sqrt{V^2-v^2}}$; la masse transversale est en raison inverse de $\sqrt{V^2-v^2}$, et la masse longitudinale en raison inverse du cube de cette quantité.

On voit que, si v est très faible, la force vive est sensiblement proportionnelle à v^2, la quantité de mouvement sensiblement proportionnelle à v, les deux masses sensiblement constantes et égales entre elles. Mais, *quand la vitesse tend vers la vitesse de la lumière, la force vive, la quantité de mouvement et les deux masses croissent au delà de toute limite.*

Dans l'hypothèse d'Abraham, les expressions sont un peu plus compliquées : mais ce que nous venons de dire subsiste dans ses traits essentiels.

Ainsi la masse, la quantité de mouvement, la force vive deviennent infinis quand la vitesse est égale à celle de la lumière. Il en résulte qu'*aucun corps ne pourra atteindre par aucun moyen une vitesse supérieure à celle de la lumière.* Et, en effet, à mesure que sa vitesse croît, sa masse croît, de sorte que son inertie oppose à tout nouvel accroissement de vitesse un obstacle de plus en plus grand.

Les auteurs qui ont écrit sur la Dynamique de l'Électron parlent, il est vrai, des corps qui vont plus vite que la lumière; mais c'est pour se demander comment se comporterait un corps dont la vitesse *initiale* serait plus grande que celle de la lumière, qui aurait, par conséquent, déjà franchi la limite, avant qu'on s'occupât de lui; ce n'est pas pour nous dire par quels moyens il pourrait franchir cette limite.

Une question se pose alors : admettons le principe de relativité; un observateur en mouvement ne doit pas avoir le moyen de s'apercevoir de son propre mouvement. Si donc aucun corps dans son mouvement absolu ne peut dépasser la vitesse de la lumière, mais peut en approcher autant qu'on veut, il doit en être de même en ce qui concerne son mouvement relatif par rapport à notre observateur. Et alors on pourrait être tenté de raisonner comme il suit : L'observateur peut atteindre une vitesse de 200 000 km; le corps, dans son mouvement relatif par rapport à l'observateur, peut atteindre la même vitesse; sa vitesse absolue sera alors de 400 000 km, ce qui est impossible, puisque c'est un chiffre supérieur à la vitesse de la lumière.

C'est qu'il faut tenir compte de la façon dont il convient d'évaluer les vitesses relatives; il faut les compter non avec le temps vrai, mais avec le temps *local.* Soient A et B deux points invariablement liés à l'observateur; soit t et $t+h$

les moments où le corps passe en A et en B, moments évalués en temps vrais : soient αt et $\alpha(t+h)$ ces mêmes moments évalués en temps local de A ; soient $\alpha(t+\varepsilon)$ et $\alpha(t+h+\varepsilon)$ ces mêmes moments évalués en temps local de B. Si l'on évaluait la durée du parcours en temps vrai, cette durée serait donc h et la vitesse relative $\frac{AB}{h}$; mais nous devons l'évaluer en temps local, c'est-à-dire noter l'instant du passage en A en temps local de A, et celui du passage en B en temps local de B, de sorte que la durée du parcours sera $\alpha(\varepsilon+h)$ et la vitesse relative $\frac{AB}{\alpha(\varepsilon+h)}$.

Et c'est ainsi que se fait la compensation.

XII. — **L'onde d'accélération.**

Quand un électron est en mouvement, il produit dans l'éther qui l'entoure une perturbation; si son mouvement est rectiligne et uniforme, cette perturbation se réduit au sillage dont nous avons parlé au chapitre précédent. Mais il n'en est plus de même si le mouvement est curviligne ou varié. La perturbation peut alors être regardée comme la superposition de deux autres, auxquelles Langevin a donné les noms d'*onde de vitesse* et d'*onde d'accélération*.

L'onde de vitesse n'est autre chose que le sillage qui se produit dans le mouvement uniforme. Je précise : soit M un point quelconque de l'éther, envisagé à un instant t; soit P la position qu'occupait l'électron à un instant antérieur $t-h$, de telle sorte que h soit précisément le temps que la lumière mettrait pour aller de P en M. Soit v la vitesse qu'avait l'électron à cet instant $t-h$. Eh bien, si nous n'envisageons que l'onde de vitesse, la perturbation au point M sera la même que si l'électron avait continué sa route depuis l'instant $t-h$, en conservant la vitesse v et avec un mouvement rectiligne et uniforme.

Quant à l'onde d'accélération, c'est une perturbation tout à fait analogue aux ondes lumineuses, qui part de l'électron au moment où il subit une accélération, et qui se propage ensuite par ondes sphériques successives avec la vitesse de la lumière.

D'où cette conséquence : dans un mouvement rectiligne et uniforme,

l'énergie se conserve intégralement; mais, dès qu'il y a une accélération, il y a perte d'énergie, qui se dissipe sous forme d'ondes lumineuses et s'en va à l'infini à travers l'éther.

Toutefois, les effets de cette onde d'accélération, en particulier la perte d'énergie correspondante, sont négligeables dans la plupart des cas, c'est-à-dire non seulement dans la Mécanique ordinaire et dans les mouvements des corps célestes, mais même dans les rayons du radium, où la vitesse est très grande sans que l'accélération le soit. On peut alors se borner à appliquer les lois de la Mécanique, en écrivant que la force est égale au produit de l'accélération par la masse, cette masse, toutefois, variant avec la vitesse d'après les lois exposées plus haut. On dit alors que le mouvement est *quasi-stationnaire*.

Il n'en serait plus de même dans tous les cas où l'accélération est grande, et dont les principaux sont les suivants : 1° Dans les gaz incandescents, certains électrons prennent un mouvement oscillatoire de très haute fréquence; les déplacements sont très petits, les vitesses sont finies, et les accélérations très grandes; l'énergie se communique alors à l'éther, et c'est pour cela que ces gaz rayonnent de la lumière de même période que les oscillations de l'électron; 2° Inversement, quand un gaz reçoit de la lumière, ces mêmes électrons sont mis en branle avec de fortes accélérations et ils absorbent de la lumière; 3° Dans l'excitateur de Hertz, les électrons qui circulent dans la masse métallique subissent, au moment de la décharge, une brusque accélération et prennent ensuite un mouvement oscillatoire de haute fréquence. Il en résulte qu'une partie de l'énergie rayonne sous forme d'ondes hertziennes; 4° Dans un métal incandescent, les électrons enfermés dans ce métal sont animés de grandes vitesses; en arrivant à la surface du métal, qu'ils ne peuvent franchir, ils se réfléchissent et subissent ainsi une accélération considérable. C'est pour cela que le métal émet de la lumière. C'est ce que j'ai déjà expliqué au chapitre IV. Les détails des lois de l'émission de la lumière par les corps noirs sont parfaitement expliqués par cette hypothèse; 5° Enfin, quand les rayons cathodiques viennent frapper l'anticathode, les électrons négatifs qui constituent ces rayons, et qui sont animés de très grandes vitesses, sont brusquement arrêtés. Par suite de l'accélération qu'ils subissent ainsi, ils produisent des ondulations dans l'éther. Ce serait là, d'après certains physiciens, l'origine des rayons Röntgen, qui ne seraient autre chose que des rayons lumineux de très courte longueur d'onde.

XIII. — La gravitation.

La masse peut être définie de deux manières : 1° par le quotient de la force par l'accélération ; c'est la véritable définition de la masse, qui mesure l'inertie du corps ; 2° par l'attraction qu'exerce le corps sur un corps extérieur, en vertu de la loi de Newton. Nous devons donc distinguer la masse coefficient d'inertie, et la masse coefficient d'attraction. D'après la loi de Newton, il y a proportionnalité rigoureuse entre ces deux coefficients. Mais cela n'est démontré que pour les vitesses auxquelles les principes généraux de la Dynamique sont applicables. Maintenant, nous avons vu que la masse coefficient d'inertie croît avec la vitesse ; devons-nous conclure que la masse coefficient d'attraction croît également avec la vitesse et reste proportionnelle au coefficient d'inertie, ou, au contraire, que ce coefficient d'attraction demeure constant ? C'est là une question que nous n'avons aucun moyen de décider.

D'autre part, si le coefficient d'attraction dépend de la vitesse, comme les vitesses des deux corps qui s'attirent mutuellement ne sont généralement pas les mêmes, comment ce coefficient dépendra-t-il de ces deux vitesses ?

Nous ne pouvons faire à ce sujet que des hypothèses, mais nous sommes naturellement amenés à rechercher quelles seraient celles de ces hypothèses qui seraient compatibles avec le Principe de Relativité. Il y en a un grand nombre ; la seule dont je parlerai ici est celle de Lorentz, que je vais exposer brièvement.

Considérons d'abord des électrons en repos. Deux électrons de même signe se repoussent et deux électrons de signe contraire s'attirent ; dans la théorie ordinaire, leurs actions mutuelles sont proportionnelles à leurs charges électriques ; si donc nous avons quatre électrons, deux positifs A et A′, et deux négatifs B et B′, et que les charges de ces quatre électrons soient les mêmes, en valeur absolue, la répulsion de A sur A′ sera, à la même distance, égale à la répulsion de B sur B′, et égale encore à l'attraction de A sur B′, ou de A′ sur B. Si donc A et B sont très près l'un de l'autre, de même que A′ et B′, et que nous examinions l'action du système A + B sur le système A′ + B′, nous aurons deux répulsions et deux attractions qui se compenseront exactement et l'action résultante sera nulle.

Or, les molécules matérielles doivent précisément être regardées comme des espèces de systèmes solaires où circulent des électrons, les uns positifs, les

autres négatifs, et *de telle façon que la somme algébrique de toutes les charges soit nulle*. Une molécule matérielle est donc de tout point assimilable au système A + B dont nous venons de parler, de sorte que l'action électrique totale de deux molécules l'une sur l'autre devrait être nulle.

Mais l'expérience nous montre que ces molécules s'attirent par suite de la gravitation newtonienne ; et alors on peut faire deux hypothèses : on peut supposer que la gravitation n'a aucun rapport avec les attractions électrostatiques, qu'elle est due à une cause entièrement différente, et qu'elle vient simplement s'y superposer ; ou bien on peut admettre qu'il n'y a pas proportionnalité des attractions aux charges et que l'attraction exercée par une charge + 1 sur une charge — 1 est plus grande que la répulsion mutuelle de deux charges + 1, ou que celle de deux charges — 1.

En d'autres termes, le champ électrique produit par les électrons positifs et celui que produisent les électrons négatifs se superposeraient en restant distincts. Les électrons positifs seraient plus sensibles au champ produit par les électrons négatifs qu'au champ produit par les électrons positifs ; ce serait le contraire pour les électrons négatifs. Il est clair que cette hypothèse complique un peu l'Électrostatique, mais qu'elle y fait rentrer la gravitation. C'était, en somme, l'hypothèse de Franklin.

Qu'arrive-t-il maintenant si les électrons sont en mouvement? Les électrons positifs vont engendrer une perturbation dans l'éther et y feront naître un champ électrique et un champ magnétique. Il en sera de même pour les électrons négatifs. Les électrons, tant positifs que négatifs, subiront ensuite une impulsion mécanique par l'action de ces différents champs. Dans la théorie ordinaire, le champ électromagnétique, dû au mouvement des électrons positifs, exerce, sur deux électrons de signe contraire et de même charge absolue, des actions égales et de signe contraire. On peut alors sans inconvénient ne pas distinguer le champ dû au mouvement des électrons positifs et le champ dû au mouvement des électrons négatifs et ne considérer que la somme algébrique de ces deux champs, c'est-à-dire le résultant.

Dans la nouvelle théorie, au contraire, l'action sur les électrons positifs du champ électromagnétique dû aux électrons positifs se fait d'après les lois ordinaires; il en est de même de l'action sur les électrons négatifs du champ dû aux électrons négatifs. Considérons maintenant l'action du champ dû aux électrons positifs sur les électrons négatifs (ou inversement); elle suivra encore les mêmes lois, mais *avec un coefficient différent*. Chaque électron est plus

sensible au champ créé par les électrons de nom contraire qu'au champ créé par les électrons de même nom.

Telle est l'hypothèse de Lorentz, qui se réduit à l'hypothèse de Franklin aux faibles vitesses ; elle rendra donc compte, pour ces faibles vitesses, de la loi de Newton. De plus, comme la gravitation se ramène à des forces d'origine électrodynamique, la théorie générale de Lorentz s'y appliquera et, par conséquent, le principe de la relativité ne sera pas violé.

On voit que la loi de Newton n'est plus applicable aux grandes vitesses et qu'elle doit être modifiée, pour les corps en mouvement, précisément de la même manière que les lois de l'Électrostatique pour l'électricité en mouvement.

On sait que les perturbations électromagnétiques se propagent avec la vitesse de la lumière. On sera donc tenté de rejeter la théorie précédente, en rappelant que la gravitation se propage, d'après les calculs de Laplace, au moins dix millions de fois plus vite que la lumière, et que, par conséquent, elle ne peut être d'origine électrodynamique. Le résultat de Laplace est bien connu, mais on en ignore généralement la signification. Laplace supposait que, si la propagation de la gravitation n'est pas instantanée, sa vitesse de propagation se combine avec celle du corps attiré, comme cela se passe pour la lumière dans le phénomène de l'aberration astronomique, de telle façon que la force effective n'est pas dirigée suivant la droite qui joint les deux corps, mais fait avec cette droite un petit angle. C'est là une hypothèse toute particulière, assez mal justifiée, et en tout cas entièrement différente de celle de Lorentz. Le résultat de Laplace ne prouve rien contre la théorie de Lorentz.

XV. — Comparaison avec les observations astronomiques.

Les théories précédentes sont-elles conciliables avec les observations astronomiques? Tout d'abord, si on les adopte, l'énergie des mouvements planétaires sera constamment dissipée par l'effet de l'*onde d'accélération*. Il en résulterait que les moyens mouvements des astres iraient constamment en s'accélérant, comme si ces astres se mouvaient dans un milieu résistant. Mais cet effet est excessivement faible, beaucoup trop pour être décelé par les observations les plus précises. L'accélération des corps célestes est relativement faible, de sorte que les effets de l'onde d'accélération sont négligeables et que le mouvement peut être regardé comme *quasi-stationnaire*. Il est vrai que les

effets de l'onde d'accélération vont constamment en s'accumulant, mais cette accumulation elle-même est si lente qu'il faudrait bien des milliers d'années d'observation pour qu'elle devînt sensible.

Faisons donc le calcul en considérant le mouvement comme quasi-stationnaire, et cela dans les trois hypothèses suivantes :

A. Admettons l'hypothèse d'Abraham (électrons indéformables) et conservons la loi de Newton sous sa forme habituelle ;

B. Admettons l'hypothèse de Lorentz sur la déformation des électrons et conservons la loi de Newton habituelle ;

C. Admettons l'hypothèse de Lorentz sur les électrons et modifions la loi de Newton, comme nous l'avons fait au chapitre XIII, de façon à la rendre compatible avec le principe de relativité.

C'est dans le mouvement de Mercure que l'effet sera le plus sensible, parce que cette planète est celle qui possède la plus grande vitesse. Tisserand avait fait un calcul analogue autrefois, en admettant la loi de Weber ; je rappelle que Weber avait cherché à expliquer à la fois les phénomènes électrostatiques et électrodynamiques en supposant que les électrons (dont le nom n'était pas encore inventé) exercent les uns sur les autres des attractions et des répulsions dirigées suivant la droite qui les joint, et dépendant non seulement de leurs distances, mais des dérivées premières et secondes de ces distances, par conséquent de leurs vitesses et de leurs accélérations. Cette loi de Weber, assez différente de celles qui tendent à prévaloir aujourd'hui, n'en présente pas moins avec elles une certaine analogie.

Tisserand a trouvé que, si l'attraction newtonienne se faisait conformément à la loi de Weber, il en résulterait pour le périhélie de Mercure une variation séculaire de 14″, *de même sens que celle qui a été observée et n'a pu être expliquée*, mais plus petite, puisque celle-ci est de 38″.

Revenons aux hypothèses A, B et C, et étudions d'abord le mouvement d'une planète attirée par un centre fixe. Les hypothèses B et C ne se distinguent plus alors, puisque, si le point attirant est fixe, le champ qu'il produit est un champ purement électrostatique, où l'attraction varie en raison inverse du carré des distances, conformément à la loi électrostatique de Coulomb, identique à celle de Newton.

L'équation des forces vives subsiste, en prenant pour la force vive la définition

nouvelle ; de même, l'équation des aires est remplacée par une autre équivalente ; le moment de la quantité de mouvement est une constante, mais la quantité de mouvement doit être définie comme on le fait dans la nouvelle Dynamique.

Le seul effet sensible sera un mouvement séculaire du périhélie. Avec la théorie de Lorentz, on trouvera pour ce mouvement la moitié de ce que donnait la loi de Weber ; avec la théorie d'Abraham, les deux cinquièmes.

Si l'on suppose maintenant deux corps mobiles gravitant autour de leur centre de gravité commun, les effets sont très peu différents, quoique les calculs soient un peu plus compliqués. Le mouvement du périhélie de Mercure serait donc de $7''$ dans la théorie de Lorentz et de $5'',6$ dans celle d'Abraham.

L'effet est d'ailleurs proportionnel à n^3a^2, n étant le moyen mouvement de l'astre et a le rayon de son orbite. Pour les planètes, en vertu de la loi de Képler, l'effet varie donc en raison inverse de $\sqrt{a^5}$; il est donc insensible, sauf pour Mercure.

Il est insensible également pour la Lune, bien que n soit grand, parce que a est extrêmement petit ; en somme, il est cinq fois plus petit pour Vénus, et six cents fois plus petit pour la Lune que pour Mercure. Ajoutons qu'en ce qui concerne Vénus et la Terre, le mouvement du périhélie (pour une même vitesse angulaire de ce mouvement) serait beaucoup plus difficile à déceler par les observations astronomiques, parce que l'excentricité des orbites est beaucoup plus faible que pour Mercure.

En résumé, *le seul effet sensible sur les observations astronomiques serait un mouvement du périhélie de Mercure, de même sens que celui qui a été observé sans être expliqué, mais notablement plus faible.*

Cela ne peut pas être regardé comme un argument en faveur de la nouvelle Dynamique, puisqu'il faudra toujours chercher une autre explication pour la plus grande partie de l'anomalie de Mercure ; mais cela peut encore moins être regardé comme un argument contre elle.

XV. — **La théorie de Lesage.**

Il convient de rapprocher ces considérations d'une théorie proposée depuis longtemps pour expliquer la gravitation universelle. Supposons que, dans les espaces interplanétaires, circulent dans tous les sens, avec de très grandes

vitesses, des corpuscules très ténus. Un corps isolé dans l'espace ne sera pas affecté en apparence par les chocs de ces corpuscules, puisque ces chocs se répartissent également dans toutes les directions. Mais, si deux corps A et B sont en présence, le corps B jouera le rôle d'écran et interceptera une partie des corpuscules qui, sans lui, auraient frappé A. Alors, les chocs reçus par A dans la direction opposée à celle de B n'auront plus de contre-partie, ou ne seront plus qu'imparfaitement compensés, et ils pousseront A vers B.

Telle est la théorie de Lesage; et nous allons la discuter en nous plaçant d'abord au point de vue de la Mécanique ordinaire. Comment, d'abord, doivent avoir lieu les chocs prévus par cette théorie; est-ce d'après les lois des corps parfaitement élastiques, ou d'après celles des corps dépourvus d'élasticité, ou d'après une loi intermédiaire? Les corpuscules de Lesage ne peuvent se comporter comme des corps parfaitement élastiques; sans cela, l'effet serait nul, parce que les corpuscules interceptés par le corps B seraient remplacés par d'autres qui auraient rebondi sur B, et que le calcul prouve que la compensation serait parfaite.

Il faut donc que le choc fasse perdre de l'énergie aux corpuscules, et cette énergie devrait se retrouver sous forme de chaleur. Mais quelle serait la quantité de chaleur ainsi produite? Observons que l'attraction passe à travers les corps; il faut donc nous représenter la Terre, par exemple, non pas comme un écran plein, mais comme formée d'un très grand nombre de molécules sphériques très petites, qui jouent individuellement le rôle de petits écrans, mais entre lesquelles les corpuscules de Lesage peuvent circuler librement. Ainsi, non seulement la Terre n'est pas un écran plein, mais ce n'est pas même une passoire, puisque les vides y tiennent beaucoup plus de place que les pleins. Pour nous en rendre compte, rappelons que Laplace a démontré que l'attraction, en traversant la Terre, est affaiblie tout au plus d'un dix-millionième, et sa démonstration ne laisse rien à désirer : si, en effet, l'attraction était absorbée par les corps qu'elle traverse, elle ne serait plus proportionnelle aux masses; elle serait *relativement* plus faible pour les gros corps que pour les petits, puisqu'elle aurait une plus grande épaisseur à traverser. L'attraction du Soleil sur la Terre serait donc *relativement* plus faible que celle du Soleil sur la Lune, et il en résulterait, dans le mouvement de la Lune, une inégalité très sensible. Nous devons donc conclure, si nous adoptons la théorie de Lesage, que la surface totale des molécules sphériques qui composent la Terre est tout au plus la dix-millionième partie de la surface totale de la Terre.

Darwin a démontré que la théorie de Lesage ne conduit exactement à la loi de Newton qu'en supposant des corpuscules entièrement dénués d'élasticité. L'attraction exercée par la Terre sur une masse 1 à la distance 1 sera alors proportionnelle, à la fois, à la surface totale S des molécules sphériques qui la composent, à la vitesse v des corpuscules, à la racine carrée de la densité ρ du milieu formé par les corpuscules. La chaleur produite sera proportionnelle à S, à la densité ρ, et au cube de la vitesse v.

Mais il faut tenir compte de la résistance éprouvée par un corps qui se meut dans un pareil milieu ; il ne peut mouvoir, en effet, sans aller au-devant de certains chocs, en fuyant, au contraire, devant ceux qui viennent dans la direction opposée, de sorte que la compensation réalisée à l'état de repos ne peut plus subsister. La résistance calculée est proportionnelle à S, à ρ et à v ; or, on sait que les corps célestes se meuvent comme s'ils n'éprouvaient aucune résistance, et la précision des observations nous permet de fixer une limite à la résistance du milieu.

Cette résistance variant comme $S\rho v$, tandis que l'attraction varie comme $S\sqrt{\rho}v$, nous voyons que le rapport de la résistance au carré de l'attraction est en raison inverse du produit Sv.

Nous avons donc une limite inférieure du produit Sv. Nous avions déjà une limite supérieure de S (par l'absorption de l'attraction par les corps qu'elle traverse) ; nous avons donc une limite inférieure de la vitesse v, qui doit être au moins égale à 24.10^{17} fois celle de la lumière.

Nous pouvons en déduire ρ et la quantité de chaleur produite ; cette quantité suffirait pour élever la température de 10^{26} degrés par seconde ; la Terre recevrait dans un temps donné 10^{20} fois plus de chaleur que le Soleil n'en émet dans le même temps ; je ne veux pas parler de la chaleur que le Soleil envoie à la Terre, mais de celle qu'il rayonne dans toutes les directions.

Il est évident que la Terre ne résisterait pas longtemps à un pareil régime.

On ne serait pas conduit à des résultats moins fantastiques si, contrairement aux vues de Darwin, on douait les corpuscules de Lesage d'une élasticité imparfaite sans être nulle. A la vérité, la force vive de ces corpuscules ne serait pas entièrement convertie en chaleur, mais l'attraction produite serait moindre également, de sorte que ce serait seulement la portion de cette force vive convertie en chaleur qui contribuerait à produire l'attraction et que cela reviendrait au même ; un emploi judicieux du théorème du viriel permettrait de s'en rendre compte.

On peut transformer la théorie de Lesage; supprimons les corpuscules et imaginons que l'éther soit parcouru dans tous les sens par des ondes lumineuses venues de tous les points de l'espace. Quand un objet matériel reçoit une onde lumineuse, cette onde exerce sur lui une action mécanique due à la pression Maxwell-Bartholi, tout comme s'il avait reçu le choc d'un projectile matériel. Les ondes en question pourront donc jouer le rôle des corpuscules de Lesage. C'est là ce qu'admet, par exemple, M. Tommasina.

Les difficultés ne sont pas écartées pour cela ; la vitesse de propagation ne peut être que celle de la lumière et l'on est ainsi conduit, pour la résistance du milieu, à un chiffre inadmissible. D'ailleurs, si la lumière se réfléchit intégralement, l'effet est nul, tout comme dans l'hypothèse des corpuscules parfaitement élastiques. Pour qu'il y ait attraction, il faut que la lumière soit partiellement absorbée ; mais alors il y a production de chaleur. Les calculs ne diffèrent pas essentiellement de ceux qu'on fait dans la théorie de Lesage ordinaire, et le résultat conserve le même caractère fantastique.

D'un autre côté, l'attraction n'est pas absorbée par les corps qu'elle traverse, ou elle l'est à peine ; il n'en est pas de même de la lumière que nous connaissons. La lumière qui produirait l'attraction newtonienne devrait être considérablement différente de la lumière ordinaire et être, par exemple, de très courte longueur d'onde. Sans compter que, si nos yeux étaient sensibles à cette lumière, le ciel entier devrait nous paraître beaucoup plus brillant que le Soleil, de telle sorte que le Soleil nous paraîtrait s'y détacher en noir, sans quoi le Soleil nous repousserait au lieu de nous attirer. Pour toutes ces raisons, la lumière qui permettrait d'expliquer l'attraction devrait se rapprocher beaucoup plus des rayons X de Röntgen que de la lumière ordinaire. Et encore les rayons X ne suffiraient pas ; quelque pénétrants qu'ils nous paraissent, ils ne sauraient passer à travers la Terre tout entière ; il faudra donc imaginer des rayons X' beaucoup plus pénétrants que les rayons X ordinaires. Ensuite une portion de l'énergie de ces rayons X' devrait être détruite, sans quoi il n'y aurait pas d'attraction. Si on ne veut pas qu'elle soit transformée en chaleur, ce qui conduirait à une production de chaleur énorme, il faut admettre qu'elle est rayonnée dans tous les sens sous forme de rayons secondaires, que l'on pourra appeler X'' et qui devront être beaucoup plus pénétrants encore que les rayons X', sans quoi ils troubleraient à leur tour les phénomènes d'attraction.

Telles sont les hypothèses compliquées auxquelles on est conduit quand on veut rendre viable la théorie de Lesage.

Mais, tout ce que nous venons de dire suppose les lois ordinaires de la Mécanique. Les choses iront-elles mieux si nous admettons la nouvelle Dynamique? Et d'abord, pouvons-nous conserver le Principe de Relativité? Donnons d'abord à la théorie de Lesage sa forme primitive et supposons l'espace sillonné par des corpuscules matériels; si ces corpuscules étaient parfaitement élastiques, les lois de leur choc seraient conformes à ce Principe de Relativité, mais nous savons qu'alors leur effet serait nul. Il faut donc supposer que ces corpuscules ne sont pas élastiques, et alors il est difficile d'imaginer une loi de choc compatible avec le Principe de Relativité. D'ailleurs, on trouverait encore une production de chaleur considérable, et cependant une résistance du milieu très sensible.

Si nous supprimons les corpuscules et si nous revenons à l'hypothèse de la pression Maxwell-Bartholi, les difficultés ne seront pas moindres. C'est ce qu'a tenté Lorentz lui-même dans son Mémoire à l'Académie des Sciences d'Amsterdam du 25 avril 1900.

Considérons un système d'électrons plongés dans un éther parcouru en tous sens par des ondes lumineuses; un de ces électrons, frappé par l'une de ces ondes, va entrer en vibration; sa vibration va être synchrone de celle de la lumière; mais il pourra y avoir une différence de phase, si l'électron absorbe une partie de l'énergie incidente. Si, en effet, il absorbe de l'énergie, c'est que c'est la vibration de l'éther qui *entraîne* l'électron; l'électron doit donc être en retard sur l'éther. Un électron en mouvement est assimilable à un courant de convection; donc tout champ magnétique, en particulier celui qui est dû à la perturbation lumineuse elle-même, doit exercer une action mécanique sur cet électron. Cette action est très faible; de plus, elle change de signe dans le courant de la période; néanmoins, l'action moyenne n'est pas nulle s'il y a une différence de phase entre les vibrations de l'électron et celles de l'éther. L'action moyenne est proportionnelle à cette différence, par conséquent à l'énergie absorbée par l'électron.

Je ne puis entrer ici dans le détail des calculs; disons seulement que le résultat final est une attraction entre deux électrons quelconques, égale à : $\frac{EE_1}{4\pi E' r^2}$.

Dans cette formule, r est la distance des deux électrons, E et E_1 l'énergie absorbée par les deux électrons pendant l'unité des temps, E' l'énergie de l'onde incidente par unité de volume.

Il ne peut donc y avoir d'attraction sans absorption de lumière et, par consé-

quent, sans production de chaleur, et c'est ce qui a déterminé Lorentz à abandonner cette théorie, qui ne diffère pas au fond de celle de Lesage-Maxwell-Bartholi. Il aurait été beaucoup plus effrayé encore s'il avait poussé le calcul jusqu'au bout. Il aurait trouvé que la température de la Terre devrait s'accroître de 10^{13} degrés par seconde.

XVI. — Conclusions.

Je me suis efforcé de donner en peu de mots une idée aussi complète que possible de ces nouvelles doctrines ; j'ai cherché à expliquer comment elles avaient pris naissance, sans quoi le lecteur aurait eu lieu d'être effrayé par leur hardiesse. Les théories nouvelles ne sont pas encore démontrées, il s'en faut de beaucoup ; elles s'appuient seulement sur un ensemble assez sérieux de probabilités pour qu'on n'ait pas le droit de les traiter par le mépris.

De nouvelles expériences nous apprendront, sans doute, ce qu'on en doit définitivement penser. Le nœud de la question est dans l'expérience de Kaufmann et celles qu'on pourra tenter pour la vérifier.

Qu'on me permette un vœu, pour terminer. Supposons que, d'ici quelques années, ces théories subissent de nouvelles épreuves et qu'elles en triomphent ; notre enseignement secondaire courra alors un grand danger : quelques professeurs voudront, sans doute, faire une place aux nouvelles théories. Les nouveautés sont si attrayantes, et il est si dur de ne pas sembler assez avancé ! Au moins, on voudra ouvrir aux enfants des aperçus et, avant de leur enseigner la Mécanique ordinaire, on les avertira qu'elle a fait son temps et qu'elle était bonne tout au plus pour cette vieille ganache de Laplace. Et alors, ils ne prendront pas l'habitude de la Mécanique ordinaire.

Est-il bon de les avertir qu'elle n'est qu'approchée? Oui ; mais plus tard, quand ils s'en seront pénétrés jusqu'aux moelles, quand ils auront pris le pli de ne penser que par elle, quand ils ne risqueront plus de la désapprendre, alors on pourra, sans inconvénient, leur en montrer les limites.

C'est avec la Mécanique ordinaire qu'ils doivent vivre ; c'est la seule qu'ils auront jamais à appliquer ; quels que soient les progrès de l'automobilisme, nos voitures n'atteindront jamais les vitesses où elle n'est plus vraie. L'autre n'est qu'un luxe, et l'on ne doit penser au luxe que quand il ne risque plus de nuire au nécessaire.

RÉFLEXIONS
SUR LA THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ

Journal de Physique théorique et appliquée, 4e série, t. 5, p. 369-403 (1906).
Bulletin des séances de la Société française de Physique, p. 150-184 (6 juillet 1906).

1. — Introduction.

La théorie cinétique des gaz laisse encore subsister bien des points embarrassants pour ceux qui sont accoutumés à la rigueur mathématique; bien des résultats, insuffisamment précisés, se présentent sous une forme paradoxale et semblent engendrer des contradictions qui ne sont d'ailleurs qu'apparentes. Ainsi la notion d'un système de molécules, *molar geordnet* ou *molekular geordnet*, ne paraît pas définie avec une netteté suffisante.

L'un des points qui m'embarrassaient le plus était le suivant : il s'agit de démontrer que l'entropie va en diminuant, mais le raisonnement de Gibbs semble supposer qu'après avoir fait varier les conditions extérieures on attend que le régime soit établi avant de les faire varier de nouveau. Cette supposition est-elle essentielle, ou en d'autres termes, pourrait-on arriver à des résultats contraires au principe de Carnot en faisant varier les conditions extérieures trop vite pour que le régime permanent ait le temps de s'établir? J'ai voulu éclaircir la question, sinon dans le cas général, au moins dans certains cas particuliers, plus simples que ceux qui sont réalisés dans la nature.

On verra plus loin ce que sont les gaz simplifiés que j'appelle gaz à une dimension, et dont l'étude, beaucoup moins compliquée que celle des gaz proprement dits, permet de mieux comprendre la raison et la portée de certains résultats paradoxaux.

Avant d'aller plus loin, je voudrais préciser le sens de l'intégrale par laquelle on a coutume de représenter l'entropie et faire à son sujet certaines distinctions qui me seront nécessaires dans la suite.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les quantités qui définissent l'état d'un système matériel, et

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \tag{1}$$

les équations différentielles auxquelles satisfont ces quantités. Nous supposerons que ces variables x ont été choisies de telle sorte que :

$$\sum \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0. \tag{2}$$

C'est ce qui arrivera si ces variables sont les coordonnées rectangulaires des divers points matériels et les composantes de leurs vitesses.

Un système de valeurs des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ constitue ce que Gibbs appelle une *phase*; l'ensemble de toutes les phases satisfaisant à certaines inégalités s'appelle un domaine ; l'intégrale n-uple :

$$\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

étendue à ce domaine, est ce que Gibbs appelle l'*extension en phase* de ce domaine. J'écrirai ordinairement $d\tau$ au lieu du produit $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$.

Soit alors $P\, d\tau$ la probabilité pour que le système se trouve dans un certain domaine infiniment petit dont l'extension en phase est $d\tau$; alors l'entropie est généralement représentée par l'intégrale

$$\int P \log P\, d\tau, \tag{3}$$

étendue à toutes les phases.

Alors l'intégrale :

$$\int P\, d\tau,$$

étendue à un domaine fini quelconque, représente la probabilité pour que le système se trouve dans ce domaine, d'où il résulte que l'on a :

$$\int P\, d\tau = 1, \tag{4}$$

si l'intégrale est étendue à toutes les phases. De même, si φ est une fonction

quelconque des variables x, la valeur probable de la fonction φ sera représentée par l'intégrale :

$$(5) \qquad \int \varphi \mathrm{P}\, d\tau,$$

étendue à toutes les phases.

Mais il faut insister sur le sens à attacher à la fonction P ainsi qu'aux intégrales (3), (4) et (5). Nous pouvons d'abord supposer que l'on a un nombre très grand de systèmes semblables ; c'est ce qui arrive dans le cas des gaz à une dimension, où chaque molécule peut être regardée comme un pareil système ; c'est ce qui arrive encore dans le cas des gaz ordinaires, où l'on peut envisager un grand nombre de systèmes qui ne diffèrent les uns des autres que parce que les différentes molécules du gaz y sont permutées entre elles d'une manière quelconque. Nous pouvons supposer, de plus, que les conditions initiales du mouvement sont entièrement connues pour chacun de ces systèmes, et qu'il en est de même, par conséquent, de la situation du système à un instant quelconque. Dans ce cas, la probabilité pour qu'un système se trouve dans un domaine donné à un instant donné n'est autre chose que le rapport du nombre des systèmes qui se trouvent à cet instant dans ce domaine au nombre total des systèmes. C'est ce que j'appellerai l'*hypothèse discontinue*.

Je puis supposer au contraire que, pour chaque système, les conditions initiales du mouvement ne sont pas entièrement connues, et que nous pouvons seulement évaluer la probabilité pour qu'à l'origine du temps le système envisagé se trouve dans un certain domaine ; la situation du système à un instant ultérieur ne sera donc pas non plus entièrement connue ; tout ce que nous pourrons faire, ce sera d'évaluer la probabilité pour qu'à cet instant le système se trouve dans un domaine donné très petit dont l'extension en phase soit $d\tau$; nous représenterons cette probabilité par $p\, d\tau$ et, en général, p sera une fonction continue des x. Si, au lieu d'un seul système, nous avons, comme tout à l'heure, un très grand nombre de systèmes semblables, la probabilité pour qu'un système soit dans le domaine $d\tau$ sera :

$$\mathrm{P}\, d\tau = \frac{\Sigma p}{\mathrm{N}}\, d\tau,$$

N étant le nombre total des systèmes, et P sera encore une fonction continue des x. Cette probabilité sera donc le rapport du nombre *probable* des systèmes qui se trouvent à cet instant dans ce domaine au nombre total des systèmes. C'est là ce que j'appellerai l'*hypothèse continue*.

Soit maintenant un domaine fini D dont l'extension en phase soit δ ; soit $\Pi\delta$ la probabilité pour que le système soit dans ce domaine. Si le domaine δ devient de plus en plus petit, de façon à se réduire finalement à un domaine $d\tau$ infiniment petit, qu'arrivera-t-il de Π? Le résultat est bien différent dans les deux hypothèses : dans l'hypothèse discontinue, Π tendra vers zéro ou vers $+\infty$, suivant qu'il n'y aura pas effectivement ou qu'il y aura un système au centre du domaine $d\tau$; il n'y aura pas de milieu ; dans l'hypothèse continue, Π tendra vers la fonction continue P que nous venons de définir.

Les intégrales (3), (4), (5), sont, par définition, les limites des sommes :

$$\Sigma\Pi \log \Pi\delta, \quad \Sigma\Pi\delta, \quad \Sigma\varphi\Pi\delta,$$

étendues à un certain nombre de domaines, qui, à eux tous, contiennent toutes les phases possibles ; ici δ représente l'extension en phase d'un de ces domaines et $\Pi\delta$ la probabilité correspondante. Les intégrales sont les limites vers lesquelles tendent ces sommes quand les domaines deviennent de plus en plus petits.

Dans l'hypothèse discontinue, cette limite est *infinie* en ce qui concerne l'intégrale (3), c'est-à-dire l'entropie, tandis que les deux autres intégrales se comportent comme des intégrales ordinaires.

Adoptons donc l'hypothèse continue. Il y aura néanmoins des cas où la somme $\Sigma\Pi \log \Pi\delta$ différera notablement de sa limite, tandis que les deux autres sommes différeront fort peu de la leur. Supposons, en effet, que les domaines δ soient très petits, et que cependant dans chacun d'eux la fonction P, quoique continue, prenne des valeurs très différentes ; c'est ainsi, par exemple, que, si a est très petit, la fonction $\sin\frac{x}{a}$, quoique continue, peut prendre des valeurs très différentes dans le domaine défini par les inégalités $x_0 < x < x_0 + b$, lorsque b, quoique très petit d'une manière absolue, est grand par rapport à a. Dans ce cas l'expression $\Pi \log \Pi\delta$, relative à l'un de ces domaines, pourra différer beaucoup de l'intégrale :

$$\int P \log P \, d\tau,$$

étendue à ce domaine. Au contraire, on aura par définition pour ce même domaine :

$$\Pi\delta = \int P \, d\tau,$$

et, si le domaine est assez petit pour que la fonction φ n'y varie pas beaucoup,

$\varphi \Pi \delta$ sera sensiblement égal à :

$$\int \varphi \, \mathrm{P} \, d\tau.$$

Nous sommes ainsi conduit à distinguer l'*entropie grossière* de l'*entropie fine*.

Faisons décroître les domaines δ ; si nous poussons jusqu'à la limite, la limite de $\Sigma \Pi \log \Pi \delta$ sera l'*entropie fine* ; elle sera finie dans l'hypothèse continue.

Si, au contraire, nous nous arrêtons quand les domaines δ sont devenus assez petits pour que nos moyens d'investigation habituels ne nous permettent pas de discerner deux phases intérieures à un même domaine, nous aurons l'*entropie grossière*. C'est l'entropie grossière qu'on envisage habituellement en physique.

L'*entropie grossière est toujours plus petite que l'entropie fine.*

Si, en effet, nous divisons un domaine δ en deux domaines partiels δ_1 et δ_2, et si les probabilités correspondantes sont $\Pi \delta$ pour le domaine total, $\Pi_1 \delta_1$ et $\Pi_2 \delta_2$ pour les domaines partiels, on aura :

$$\delta = \delta_1 + \delta_2, \qquad \Pi \delta = \Pi_1 \delta_1 + \Pi_2 \delta_2$$

et, par conséquent :

$$\Pi \log \Pi \delta < \Pi_1 \log \Pi_1 \delta_1 + \Pi_2 \log \Pi_2 \delta_2.$$

La somme $\Sigma \Pi \log \Pi \delta$ va donc toujours en augmentant quand on subdivise les domaines δ.

On sait que l'entropie grossière des physiciens va toujours en diminuant, *au moins quand on laisse au régime le temps de s'établir*. Au contraire, nous allons voir que *l'entropie fine demeure toujours constante.*

Et, en effet, la fonction P satisfait aux équations différentielles évidemment équivalentes à cause de la relation (2) :

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} + \sum \mathrm{X}_i \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} + \sum \frac{\partial \mathrm{P X}_i}{\partial x_i} = 0 ;$$

soit alors

$$\mathrm{S} = \int \mathrm{P} \log \mathrm{P} \, d\tau = \int f(\mathrm{P}) \, d\tau$$

l'entropie fine ; on aura :

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt} = \int f'(\mathrm{P}) \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} d\tau$$

ou

$$\frac{dS}{dt} = -\sum \int f(P) X_i \frac{\partial P}{\partial x_i} d\tau$$

ou à cause de (2) :

$$\frac{dS}{dt} = -\sum \int f(P) X_i \frac{\partial P}{\partial x_i} d\tau - \sum \int f(P) \frac{\partial X_i}{\partial x_i} d\tau,$$

$$\frac{dS}{dt} = -\sum \int \frac{\partial}{\partial x_i} [X_i f(P)] \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n.$$

L'intégration par parties montre que cette dernière intégrale est nulle.

C. Q. F. D.

Les propriétés de l'entropie fine diffèrent donc beaucoup de celles de l'entropie grossière. On verra plus loin le parti qu'on peut tirer de ce fait.

2. — Le problème des petites planètes.

Nous commencerons par traiter un problème analogue à celui de la théorie des gaz, mais beaucoup plus simple.

Supposons un très grand nombre de petites planètes décrivant des orbites circulaires (sans excentricité ni inclinaison, ni sans aucune perturbation bien entendu); soit l la longitude de l'une d'elles, et ω sa vitesse angulaire, de telle sorte que :

$$l = l_0 + \omega t, \qquad \omega = \text{const}.$$

De cette façon, l'extension en phase est représentée par l'intégrale

$$\int dl \, d\omega = \int dl_0 \, d\omega.$$

Il s'agit de montrer qu'au bout d'un temps suffisamment long les longitudes de ces petites planètes seront uniformément distribuées. Soit en effet, à l'instant zéro,

$$f(l_0, \omega) \, dl_0 \, d\omega$$

le nombre des petites planètes dont la longitude est entre l_0 et $l_0 + dl_0$ et la vitesse angulaire entre ω et $\omega + d\omega$. Le nombre des petites planètes étant supposé très grand, nous pourrons traiter ce cas comme si dl_0 et $d\omega$ étaient des différentielles infiniment petites et f une fonction continue.

Soit alors

$$J = \int \cos(ml + h) f(l_0, \omega)\, dx_0\, d\omega$$

une intégrale égale au nombre des planètes multiplié par la valeur *moyenne* de $\cos(ml + h)$. Il s'agit de démontrer que J tend vers zéro quand t croît indéfiniment. Or nous avons :

$$\cos(ml + h) = \cos(ml_0 + m\omega t + h) = \frac{d}{d\omega} \frac{\sin(ml_0 - m\omega t + h)}{mt}.$$

Nous avons donc, en intégrant par parties par rapport à ω :

$$J = -\frac{1}{mt} \int \sin(ml + h) \frac{df}{d\omega}\, dl_0\, d\omega.$$

Or $\frac{df}{d\omega}$ est fini, puisque nous supposons la fonction f continue, de sorte que J tend vers zéro quand t augmente.

C. Q. F. D.

Occupons-nous de concilier ce résultat avec les lois ordinaires de la Mécanique. Ces lois nous apprennent d'abord que, dans certaines conditions, si un système a passé par un état, il repassera une infinité de fois infiniment près de cet état. C'est bien ce qui arrive ici; supposons que toutes les vitesses angulaires ω soient commensurables entre elles et qu'au temps zéro toutes les longitudes des l_0 soient nulles et toutes les planètes en conjonction. Soit ε la commune mesure de toutes les vitesses ω.

Alors aux époques $\frac{2\pi}{\varepsilon}$, $\frac{4\pi}{\varepsilon}$, ..., toutes les planètes se retrouveront de nouveau en conjonction.

Si les ω ne sont pas commensurables, la conjonction de toutes les planètes ne peut être réalisée qu'une fois *d'une façon rigoureuse*, mais la théorie des fractions continues nous montre qu'elle le sera une infinité de fois avec une approximation aussi grande qu'on le veut.

Si les planètes sont très nombreuses et que les vitesses angulaires ω soient commensurables, leur commune mesure ε ne pourra être que très petite, de sorte que l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux conjonctions consécutives et qui est $\frac{2\pi}{\varepsilon}$ sera très grand. De même, si les ω ne sont pas commensurables, l'intervalle de temps qui s'écoulera entre deux conjonctions *approchées* consécutives sera d'autant plus grand que les planètes seront plus nombreuses et, d'autre part, que l'approximation exigée sera plus grande.

L'analyse qui précède montrerait que J tend toujours vers zéro et par conséquent qu'une conjonction même approchée ne peut se produire qu'une fois; mais c'est parce que cette analyse suppose les planètes *infiniment* nombreuses. Quelque nombreuses qu'elles soient, il y aura un retour de la conjonction; mais, comme le délai au bout duquel ce retour doit se réaliser croît avec le nombre des planètes, il devient infini quand ce nombre est lui-même regardé comme infini. Il n'y a donc pas de contradiction.

Venons à ce qui concerne la réversibilité. Si la longitude initiale avait été $-l_0$ au lieu de l_0, la longitude à l'époque $-t$ aurait été :

$$l_0 - \omega t = -l.$$

Envisageons donc une fonction paire de l et, par exemple, faisons $h = 0$ dans l'expression de J, de telle façon que

$$J = \int f \cos ml\, dl_0\, d\omega.$$

Formons, d'autre part, une autre fonction J′ en posant

$$J' = \int f' \cos ml\, dl_0\, d\omega, \qquad f' = f(-l_0, \omega).$$

Il est clair d'après ce qui précède que

$$J'(t) = J(-t),$$

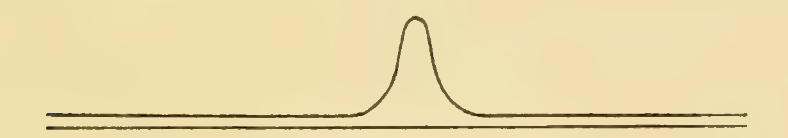
de sorte que la fonction J′ repassera dans l'ordre inverse par les mêmes phases que la fonction J. C'est en cela que consiste la réversibilité dans le problème qui nous occupe.

Cette réversibilité est-elle en contradiction avec les résultats que nous venons d'obtenir ?

Il suffit de revenir à l'expression de J donnée plus haut et qui contient t au dénominateur. Nous voyons que J tend vers zéro aussi bien quand t tend vers $+\infty$ que quand t tend vers $-\infty$.

La courbe de J en fonction de t serait de la forme suivante avec un pointement au milieu et la courbe s'écartant très peu de $J = 0$, sauf pour t très voisin de zéro. La symétrie de cette courbe nous montre la réversibilité, ce qui est en concordance avec ce qui précède. Si les molécules, au lieu d'être infiniment nombreuses, sont seulement très nombreuses, il y aura plusieurs pointements, séparés par des intervalles où la courbe s'écarte très peu de $J = 0$; mais ces

intervalles sont tellement longs que cela revient pratiquement au même que s'il n'y avait qu'un seul pointement. Ces longs intervalles seront ce que j'appellerai le *temps de retour*.



Au lieu de former la fonction J à l'aide de l'expression $\cos(ml + h)$, nous pouvons la former à l'aide d'une fonction quelconque de l et de ω que nous appellerons $F(l, \omega)$ et qui sera assujettie seulement aux conditions

$$F(l + 2\pi, \omega) = F(l, \omega), \qquad \int_0^{2\pi} F(l, \omega)\, dl = 0;$$

on a alors :

$$J = \int F(l, \omega) f(l_0, \omega)\, dl_0\, d\omega;$$

supposons, par exemple :

$$F(l, \omega) = (\cos ml + h)\varphi(\omega);$$

l'intégration par parties nous donnera encore :

$$J = -\frac{1}{mt}\int \sin(ml + h)\left[f\frac{d\varphi}{d\omega} + \varphi\frac{df}{d\omega}\right] dl_0\, d\omega,$$

de sorte que J tendra encore vers zéro pour $t = \pm\infty$ et que la forme générale de la courbe restera la même. Il en sera de même si nous prenons :

$$F(l, \omega) = \cos ml\,\varphi(\omega) + \sin ml\,\psi(\omega).$$

Mais il peut se faire que le pointement se trouve déplacé. Supposons, par exemple, que les planètes se trouvent à peu près en conjonction à l'époque zéro, de telle façon que $f(l_0, \omega)$ soit beaucoup plus grand pour l_0 voisin de zéro que pour les autres valeurs de l_0 ; alors, si nous prenons $F(l, \omega) = \cos ml$, le pointement aura lieu pour $t = 0$; mais si nous prenons

$$F(l, \omega) = \cos ml \cos m\omega\tau + \sin ml \sin m\omega\tau,$$

le pointement aura lieu pour $t = \tau$. Si donc t est très grand, la répartition des planètes *paraît* uniforme, ce qui veut dire que J est sensiblement nul, quelle que soit la fonction $F(l, \omega)$ *pourvu toutefois que cette fonction satisfasse à la condition suivante :*

Il faut que la dérivée dF soit finie et, par conséquent, petite par rapport à t.

L'uniformité n'est cependant qu'apparente, puisque J ne serait plus nulle si la fonction F ne satisfaisait pas à cette condition.

Ainsi la distribution paraîtra uniforme et sans tendance systématique pour un œil grossier; il n'y aura pas d'*organisation apparente*. Et cependant il y aura une *organisation latente*, car si nous prenons $\tau = -t$, et

$$F(t, \omega) = mt \cos m\omega\tau + \sin mt \sin m\omega\tau,$$

nous voyons que J n'est pas nulle. Les planètes qui, à l'époque zéro, se trouvaient sensiblement en ligne droite, se trouvent maintenant réparties sur une spirale, mais les spires de cette spirale sont trop serrées pour pouvoir être discernées.

Nous pouvons encore présenter la chose sous un autre biais. Soit N le nombre des planètes, telles que t et ω satisfassent à un certain nombre d'inégalités :

$$\Phi_i(t, \omega) > 0.$$

Considérons maintenant les inégalités *inverses*, c'est-à-dire les inégalités

$$\Phi_i(-t, \omega) > 0,$$

et soit N' le nombre des planètes qui y satisfont.

Nous savons qu'à l'instant zéro les planètes étaient sensiblement en conjonction. Il résulte de ce qui précède qu'à l'instant t, si t est positif et assez grand, la valeur probable de N sera égale à celle de N', pourvu que les dérivées de Φ_i soient finies et petites par rapport à t.

Mais il ne faudrait pas en conclure qu'un état (t, ω) est précisément aussi probable que l'état *inverse* $(-t, \omega)$; car l'égalité des valeurs probables de N et de N' ne subsiste pas si les fonctions Φ_i sont choisies de façon que leurs dérivées soient du même ordre que t. Nous reviendrons sur ce point.

3. — Le gaz à une dimension.

On peut passer immédiatement du problème précédent à un cas se rapprochant déjà un peu plus de la théorie cinétique des gaz. Imaginons un gaz formé de molécules enfermées dans un vase en forme de parallélépipède rectangle. Toutes les trajectoires de ses molécules sont initialement parallèles entre elles

et à l'une des arêtes de ce parallélépipède que nous prendrons pour axe des x. Dans ces conditions, les molécules ne se choqueront jamais, elles ne rencontreront jamais les parois du vase, sauf celles qui sont perpendiculaires à l'axe des x, et, quand elles rencontreront ces dernières, elles les frapperont normalement, de sorte que leurs trajectoires, après réflexion, seront les mêmes qu'avant la réflexion, mais parcourues en sens contraire.

Nous pouvons supposer aussi que les centres de toutes les molécules parcourent une même droite qui sera l'axe des x; dans ce cas, elles se choqueront, mais leurs chocs mutuels ne changeront rien à l'état du gaz, parce qu'après s'être choquées elles échangeront leurs vitesses, chacune d'elles prenant la vitesse qu'avait l'autre avant le choc, de sorte que finalement tout se passera comme si, au lieu de s'être choquées, elles s'étaient traversées. Les deux images sont équivalentes; la seconde nous donne ce qu'on pourrait appeler *un gaz à une dimension*.

Soit alors

$$x = 0, \qquad x = \pi,$$

les deux parois sur lesquelles s'effectue la réflexion; soit x l'abscisse d'une molécule quelconque; nous allons définir sa *longitude*, et pour cela nous ferons la convention suivante : à un même point situé à l'intérieur du vase, nous pourrons attribuer indifféremment la longitude x égale à son abscisse ou la longitude $-x$, ou encore $2\pi \pm x$, ou enfin $2K\pi \pm x$. Un point sera entièrement déterminé par sa longitude et par la condition que son abscisse soit comprise entre zéro et π.

Cela posé, la longitude l d'une molécule sera égale à son abscisse x, si cette molécule n'a encore subi aucune réflexion depuis l'instant zéro; on aura $l = -x$ si elle a subi une réflexion sur la paroi $x = 0$; on aura $l = 2\pi - x$ si elle a subi une réflexion sur la paroi $x = \pi$. Plus généralement, on aura après un nombre quelconque de réflexions :

$$l = 2K\pi + \varepsilon x,$$

ε étant égal à ± 1, et K à un entier, et de telle façon que ε change de signe à chaque réflexion, et que K ne change pas après une réflexion sur $x = 0$ et se change en $K - \varepsilon$ après une réflexion sur $x = \pi$; ε étant la valeur de cette quantité *avant* la réflexion.

Dans ces conditions, comme la vitesse d'une molécule quelconque reste

constante en grandeur et change de signe à chaque réflexion, la dérivée

$$\frac{dl}{dt} = \omega$$

reste constante pour chaque molécule.

(Il va sans dire que, si j'adopte la seconde image, celle du gaz à une dimension où les molécules échangent leurs vitesses quand elles se choquent, la proposition précédente ne sera vraie que si l'on convient d'attribuer à chaque molécule une individualité, qu'elle échangera avec celle de sa voisine au moment du choc, de la même façon qu'elles échangent leurs vitesses.)

L'extension en phase est encore représentée par $\int dl\,d\omega$.

Les lois du mouvement de nos molécules sont donc les mêmes que celles des planètes dans le paragraphe précédent; il est inutile d'y revenir; nous voyons entre autres choses que, quelle que soit la distribution initiale, au bout d'un temps suffisamment long le gaz paraîtra homogène.

Mais jusqu'ici nous avons supposé que les molécules gazeuses n'étaient soumises à aucune force extérieure. Il convient maintenant d'étudier l'influence d'une pareille force. Supposons que chaque molécule soit soumise à une force extérieure de telle façon que l'on ait :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dx},$$

$\varphi(x)$ étant la fonction des forces; nous pourrons appeler cette fonction des forces $\eta'(l)$, en convenant que $\varphi(l) = \eta'(l)$, si l est compris entre zéro et π, et que $\eta'(l) = \varphi(2K\pi \pm l)$, si $2K\pi \pm l$ est compris entre zéro et π, et alors l'équation du mouvement devient :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2l}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dl^2},$$

et l'équation des forces vives s'écrira, en posant $\theta = -2\eta'$,

$$\omega^2 + \theta(l) = \omega_0^2,$$

ω_0 étant une constante pour chacune des molécules.

Si nous intégrons les équations du mouvement, nous trouverons :

$$l = \psi(\xi, \omega_0),$$

en posant

$$\xi = \omega_0 t + \xi_0,$$

ξ_0 étant une nouvelle constante d'intégration. Soit alors $f(\xi_0, \omega_0)\, d\xi_0\, d\omega_0$ le nombre des molécules pour lesquelles les deux constantes d'intégration sont respectivement comprises entre ξ_0 et $\xi_0 + d\xi_0$ et entre ω_0 et $\omega_0 + d\omega_0$.

Formons alors l'intégrale :

$$J = \int \cos(m\xi + h) f(\xi_0, \omega_0)\, d\xi_0\, d\omega_0;$$

l'intégration par parties nous donnera encore :

$$J = -\frac{1}{mt} \int \sin(m\xi + h) \frac{df}{d\omega_0}\, d\xi_0\, d\omega_0.$$

ce qui montre que J tend vers zéro pour $t = +\infty$. Cela signifie que, au bout d'un temps t suffisamment long, le nombre ou le nombre probable des molécules contenues à l'intérieur d'un certain domaine est représenté par l'intégrale :

$$N = \int \Omega^{(0)}\, d\xi_0\, d\omega_0$$

étendue à ce domaine, $\Omega^{(0)}$ étant seulement fonction de ω_0. Dans le cas particulier où il n'y a pas de corps troublant, et où $\theta = 0$, $\omega_0 = \omega$, $\xi = l$, nous écririons $N = \int \Omega\, dl\, d\omega$, où Ω dépend seulement de ω. Il faut transformer cette intégrale en revenant aux variables l et ω_0. On trouve :

$$N = \int \frac{\Omega^{(0)}}{\frac{dl}{d\xi}}\, dl\, d\omega_0 = \int \frac{\Omega^{(0)} \omega_0}{\omega}\, dl\, d\omega_0 = \int \frac{\Omega^{(0)} \omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \theta(l)}}\, dl\, d\omega_0.$$

On en déduit également $N = \int \Omega^{(0)}\, dl\, d\omega$, ce qui montre que $\Omega^{(0)}$ n'est autre chose, à un facteur constant près, que la fonction P du paragraphe 1.

Pour une même valeur de ω_0, la densité du gaz est donc inversement proportionnelle à $\sqrt{\omega_0^2 - \theta(l)}$, c'est-à-dire qu'elle est d'autant plus grande que $\theta(l)$ est plus grand. Donc le gaz se condense dans la partie où la fonction des forces est maximum; si par exemple la force agissante est la pesanteur, le gaz se condense *vers le haut*. C'est là une propriété paradoxale des gaz à une dimension.

Mais nous devons observer qu'elle n'est vraie que si toutes les molécules, ou du moins la plupart d'entre elles, vont d'une paroi à l'autre. Il n'en serait pas ainsi si ω_0^2 était plus petit que le maximum de $\theta(l)$: dans ce cas, on ne pourrait donner à l que des valeurs telles que $\theta(l)$ soit plus petit que ω_0^2; il y aurait une région du vase où il n'y aurait aucune molécule admettant cette valeur de ω_0.

et (ce serait la région inférieure dans le cas de la pesanteur) une autre région où il y en aurait, mais avec une densité variable, la densité croissant à mesure qu'on se rapproche de la limite des deux régions.

Tout dépend donc du nombre des molécules pour lesquelles la constante d'intégration est comprise entre ω_0 et $\omega_0 + d\omega_0$. Ce nombre est donné par la formule précédente, qui devient :

$$d\omega_0 \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{\Omega'' \omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \theta(l)}}\, dl.$$

Donc tout dépend de la fonction Ω'', et on conçoit qu'on puisse choisir cette fonction de telle façon que le gaz, sous l'influence de la pesanteur, par exemple, se condense vers le bas, et non pas vers le haut du vase.

4. — Variations d'un gaz à une dimension.

La force qui engendre la fonction des forces $\theta(l)$ est due à l'action des corps extérieurs; si la position de ces corps extérieurs varie, la fonction $\theta(l)$ variera également et il en sera de même, par conséquent, de l'état du gaz. Nous supposerons, pour simplifier, un seul corps extérieur C attirant les molécules gazeuses d'après la loi de Newton ou une loi analogue.

Supposons que le corps C soit d'abord trop éloigné pour exercer aucune action; alors $\theta(l)$ est nul, et au bout d'un temps suffisamment long la distribution des molécules deviendra homogène, et sa densité dans le vase sera constante.

A l'époque t_0, j'approche brusquement le corps C; la fonction $\theta(l)$ cesse d'être nulle; au bout d'un temps suffisant, les molécules vont prendre une nouvelle distribution définie par les équations du paragraphe précédent. Si nous supposons que toutes les molécules soient animées de vitesses assez grandes, les constantes ω_0^2 seront toutes plus grandes que le maximum de $\theta(l)$, et alors, en vertu du résultat paradoxal démontré au paragraphe précédent, la densité du gaz, dans sa distribution finale, sera d'autant plus grande qu'on sera dans une région du vase plus éloignée du corps C.

A l'époque t_1, j'éloigne brusquement le corps C; la fonction $\theta(l)$ redevient nulle, et au bout d'un temps suffisant, la distribution des molécules redevient homogène. Quand nous avons approché le corps C, ce corps, attiré par les molécules gazeuses, a subi un travail positif tendant à accroître sa force vive;

au contraire, quand, à l'époque t_1, nous avons écarté ce corps, il a subi un travail négatif. Mais, en valeur absolue, le travail positif est plus grand que l'autre. En effet, à l'époque t_0, la densité du gaz était homogène ; au contraire, à l'époque t_1, elle était plus grande dans les parties du vase les plus éloignées de C ; le gaz en moyenne s'était écarté de C et exerçait sur ce corps une attraction moindre.

Le travail total des forces appliquées à C est donc positif, et, en vertu du principe de la conservation de l'énergie, il faut que la température du gaz ait diminué. Il y a donc eu transformation de chaleur en travail. Ce résultat semble en contradiction avec le principe de Carnot. Mais, bien entendu, cette contradiction n'est qu'apparente. Dans un gaz à une dimension, soustrait à toute action extérieure, les molécules conservent leur vitesse initiale ω ; il n'y a donc pas de tendance à la réalisation de la loi de Maxwell. La fonction que nous avons appelée Ω au paragraphe précédent peut être choisie d'une façon quelconque, et, une fois choisie, elle reste indéfiniment la même. Si nous approchions, puis que nous éloignions le corps C, la fonction Ω n'est plus la même après l'opération. Les vitesses ω ont diminué en moyenne, puisque la température a baissé, mais de plus elles ont eu une tendance à s'égaliser, et cela fait compensation, l'entropie du gaz dépendant non seulement de la température, mais encore de la fonction Ω, c'est-à-dire de la façon dont les vitesses sont distribuées.

Cela nous montre en même temps que les propriétés paradoxales du gaz à une dimension sont intimement liées à la constance des vitesses, c'est-à-dire à cette indépendance des molécules qui fait que chacune d'elles conserve sa vitesse, sans chercher à la mettre d'accord avec celles de ses voisines.

Bien que le phénomène se présente sous une forme, pour ainsi dire, inverse de la forme habituelle, il n'en est pas moins irréversible, et il va par conséquent nous permettre de mieux analyser les causes de l'irréversibilité universelle. On serait tenté de raisonner comme il suit : quel est, à l'époque $\frac{t_0+t_1}{2}$, le nombre probable N des molécules dont la longitude l et la constante ω_0 satisfont à un certain nombre d'inégalités :

$$\Phi_i\left(l, \frac{\omega_0}{dl}\right) > 0 ?$$

Il sera représenté par l'intégrale :

$$N = \int \frac{\Omega(\omega_0)\,\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \theta(l)}}\,dl\,d\omega_0,$$

étendue au domaine défini par ces inégalités. Comme $\theta(l) = \theta(-l)$, cette intégrale ne changera pas quand on remplacera nos inégalités par les inégalités inverses :

$$\Phi_i(-l, \omega_0) > 0.$$

On serait tenté de conclure que l'état (l, ω_0) est précisément aussi probable que l'état inverse $(-l, \omega_0)$ où les molécules occupent les mêmes positions, mais avec des vitesses de sens contraire. Or si, à l'instant $\frac{t_0+t_1}{2}$, nous renversons ainsi toutes les vitesses, le gaz passera par les mêmes états que dans l'hypothèse primitive, mais dans l'ordre inverse, c'est-à-dire que l'état qu'il avait dans la première hypothèse à l'instant $\frac{t_0+t_1}{2}+h$, il l'aura dans la deuxième hypothèse à l'instant $\frac{t_0+t_1}{2}-h$. En particulier, au lieu d'être plus chaud à l'époque t_0 qu'à l'époque t_1, il sera plus froid.

Il y aurait donc réversibilité, et le phénomène inverse serait précisément aussi probable que le phénomène direct. Mais il n'en est rien. Nous *savons* que, à l'époque t_0, le gaz avait une densité homogène ; pour que les états (l, ω_0) et $(-l, \omega_0)$ soient précisément aussi probables, il faudrait que le nombre probable N défini plus haut ne changeât pas quand on change l en $-l$. Or cela n'est vrai que si les dérivées des fonctions Φ_i (premiers membres des inégalités) sont finies ; cela ne serait plus vrai si elles sont très grandes, de l'ordre de l'intervalle $\frac{t_1-t_0}{2}$. C'est ce que nous avons déjà expliqué à la fin du paragraphe 2, et c'est ce qui explique le paradoxe. Si, à l'instant $\frac{t_0+t_1}{2}$, le système n'avait ni organisation apparente, ni organisation latente, les deux états inverses seraient également probables. Mais, s'il perd promptement toute organisation apparente, il conserve longtemps une organisation latente, et il ne la perdrait que si le temps $\frac{t_1-t_0}{2}$ était comparable à ce que j'ai appelé au paragraphe 2 le *temps de retour*.

5. — Calcul complet dans un cas particulier.

Mais, avant d'aller plus loin, je vais chercher avec plus de détails ce que devient la distribution des vitesses après le processus que nous venons de décrire. A l'instant t_0, le nombre des molécules satisfaisant à certaines inégalités

est représenté par l'intégrale :

$$\int \Omega \, dl \, d\omega,$$

étendue au domaine défini par ces inégalités, et Ω ne dépend que de ω.

A l'instant t_1, la longitude et la vitesse de la molécule (qui étaient l et ω à l'époque t_0) sont devenues l' et ω', et l'on a

$$\omega^2 - \theta(l) = \omega'^2 + \theta(l').$$

La distribution se fait maintenant en raison inverse de la vitesse ω'; ainsi les $\Omega \, dl \, d\omega$ molécules, dont la longitude et la vitesse étaient à l'instant t_0 comprises entre l et $l + dl$ et entre ω et $\omega + d\omega$, sont maintenant réparties de façon qu'il y en ait

$$\frac{K}{\omega'} dl' \, dl \, d\omega$$

dont la longitude soit comprise entre l' et $l' + dl'$; K est une constante ne dépendant que de l et de ω, et l'on a par conséquent :

$$\text{(1)} \qquad K \int_0^{2\pi} \frac{dl'}{\omega'} = \Omega,$$

ce qui détermine K. Le nombre des molécules dont la longitude et la vitesse sont à l'instant t_1 comprises entre l' et $l' + dl'$ et entre ω' et $\omega' + d\omega'$ est alors :

$$\int \frac{K \, dl' \, dl \, d\omega}{\omega'} = \int \frac{K \, dl' \, dl \, d\omega'}{\omega}.$$

On doit intégrer par rapport à l seulement de zéro à 2π; si l'on veut le nombre des molécules dont la vitesse est comprise entre ω' et $\omega' + d\omega'$, on intégrera de zéro à 2π par rapport à l et à l'; le résultat de cette intégration devra s'appeler : $2\pi\Omega' \, d\omega'$, d'où :

$$\text{(2)} \qquad 2\pi\Omega' = \iint \frac{dl \, dl'}{\omega},$$

et nous fera connaître la nouvelle répartition des vitesses.

Pour pouvoir pousser le calcul jusqu'au bout, nous allons supposer θ très petit; nous écrirons θ et θ' au lieu de $\theta(l)$, $\theta(l')$, et nous supposerons :

$$\int_0^{2\pi} \theta \, dl = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \theta^2 \, dl = 2\pi A^2,$$

c'est-à-dire que A^2 sera la valeur moyenne de θ^2. Dans ces conditions, il vient :

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega'} - \frac{1}{2}\,\frac{\theta - \theta'}{\omega'^3} + \frac{3}{8}\,\frac{(\theta - \theta')^2}{\omega'^5},$$

et l'équation (1) donne par conséquent :

$$K\left[\frac{2\pi}{\omega} - \frac{\pi\theta}{\omega^3} + \frac{3\pi}{4}\,\frac{\theta^2 + A^2}{\omega^5}\right] = \Omega,$$

d'où :

$$K = \frac{\Omega\omega}{2\pi}\left[1 + \frac{\theta}{2\omega^2} + \frac{\theta^2}{4\omega^4} - \frac{3}{8}\,\frac{\theta^2 + A^2}{\omega^4}\right].$$

Mais il faut maintenant s'efforcer d'obtenir $\frac{K}{\omega}$ en fonction de ω', t et t'. Nous savons que Ω est fonction de ω seulement ; nous pouvons l'écrire $\Omega(\omega)$, et nous poserons alors :

$$\Omega(\omega') = \Omega_0, \qquad \frac{d\Omega(\omega')}{d\omega'} = \Omega_1, \qquad \frac{d^2\Omega(\omega')}{d\omega'^2} = \Omega_2.$$

Nous aurons alors avec le même degré d'approximation :

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1\,\frac{\theta' - \theta}{2\omega'} - \frac{\Omega_1}{8}\,\frac{(\theta' - \theta)^2}{\omega'^3} + \frac{\Omega_2}{2}\,\frac{(\theta' - \theta)^2}{4\omega'^2},$$

et d'ailleurs avec un degré de moins :

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega'^2} - \frac{\theta' - \theta}{\omega'^4};$$

d'où finalement :

$$\frac{K}{\omega} = \frac{\Omega_0}{2\pi}\left[1 + \frac{\theta}{2\omega'^2} - \frac{\theta(\theta' - \theta)}{2\omega'^4} + \frac{\theta^2}{4\omega'^4} - \frac{3}{8}\,\frac{\theta^2 + A^2}{\omega'^4}\right]$$
$$+ \frac{\Omega_1}{2\pi}\left[\frac{\theta' - \theta}{2\omega'} - \frac{(\theta' - \theta)^2}{8\omega'^3} + \frac{(\theta' - \theta)\theta}{4\omega'^3}\right] + \frac{\Omega_2}{2\pi}\,\frac{(\theta' - \theta)^2}{8\omega'^2},$$

d'où, par l'équation (2) :

$$\Omega' = \Omega_0 - \frac{\Omega_1 A^2}{2\omega'^3} + \frac{\Omega_2 A^2}{4\omega'^2},$$

ou, ce qui revient au même :

$$\Omega' = \Omega_0 + A^2\,\frac{d}{d\omega'}\,\frac{\Omega_1}{4\omega'^2}.$$

Je mets cette expression sous cette dernière forme afin de vérifier que, comme il convient, le nombre total des molécules n'a pas changé.

Soient X et X' la force vive aux instants t_0 et t_1, de sorte que $X = 2\pi\int \Omega\omega^2\,d\omega$

ou, en changeant ω en ω' et Ω en Ω_0, ce qui est un simple changement de notation :

$$V = 2\pi \int \Omega_0 \omega'^2 \, d\omega', \qquad V' = 2\pi \int \Omega' \omega'^2 \, d\omega' ;$$

il vient par intégrations par parties successives :

$$\frac{V' - V}{2\pi A^2} = \int \omega'^2 d \frac{\Omega_1}{4\omega'^2} = -\int \Omega_1 \frac{d\omega'}{2\omega'} = -\int \frac{\Omega_0 \, d\omega'}{2\omega'^2} < 0,$$

ce qui confirme le paradoxe signalé plus haut. *Observons toutefois que ce résultat* n'est vrai que si Ω est divisible par ω^2 ; sans cela l'intégrale précédente n'est plus finie à cause de la présence de ω'^2 au dénominateur. Plus généralement, envisageons d'autres fonctions analogues à la force vive, et soit, en désignant par φ une fonction quelconque de ω' :

$$V = \int \Omega_0 \varphi(\omega') \, d\omega', \qquad V' = \int \Omega' \varphi(\omega') \, d\omega' ;$$

on aura :

$$\frac{V' - V}{A^2} = \int \varphi \, d \frac{\Omega_1}{4\omega'^2} = -\int \Omega_1 \frac{\varphi' \, d\omega'}{4\omega'^2} = \int \Omega_0 \, d\omega' \frac{d}{d\omega'} \frac{\varphi'}{4\omega'^2} ;$$

de sorte que $V' - V < 0$ si $\frac{d}{d\omega'} \frac{\varphi'}{4\omega'^2}$ est constamment négatif. Si, par exemple :

$$\varphi = \omega'^k, \qquad \varphi' = K\omega'^{k-1}, \qquad \frac{\varphi'}{4\omega'^2} = \frac{k}{4} \omega'^{k-3}, \qquad \frac{d}{d\omega'} \frac{\varphi'}{4\omega'^2} = \frac{k(k-3)}{4} \omega'^{k-4}.$$

Si k est pair et > 3, cette expression est constamment positive. Plus généralement, construisons une courbe en prenant pour abscisses ω'^3 et pour ordonnées φ, tout dépendra si la convexité de la courbe est ou non tournée vers l'origine. Toutes ces fonctions, sans être l'entropie, jouissent donc dans ce cas particulier de propriétés analogues.

Faisons maintenant le calcul avec l'entropie :

$$\int P \log P \, d\tau = \int P \log P \, dl \, d\omega ;$$

comme Ω est proportionnel à P et ne dépend pas de l, elle est liée par une relation linéaire à l'intégrale $\int \Omega \log \Omega \, d\omega$; mais celle-ci peut s'écrire

$$\int \Omega_0 \log \Omega_0 \, d\omega',$$

car on passe de l'une à l'autre en changeant ω en ω', c'est-à-dire par un simple changement de notation.

Son accroissement, en posant $\Omega = \Omega_0 + \delta\Omega$, sera :

$$\int (1 + \log \Omega_0)\delta\Omega \, d\omega' = A^2 \int (1 + \log \Omega_0)\, d\frac{\Omega_1}{4\omega'^2},$$

ou, en intégrant par parties :

$$-A^2 \int \frac{\Omega_1}{4\omega'^2} \frac{d\Omega_0}{\Omega_0} = -A^2 \int \left(\frac{\Omega_1}{2\omega'\Omega_0}\right)^2 \Omega_0 \, d\omega' < 0.$$

C. Q. F. D.

6. — Étude de l'entropie.

Ainsi l'entropie va sans cesse en diminuant, de même que la force vive. Mais il importe de remarquer que le résultat relatif à l'entropie est beaucoup plus général que celui qui se rapporte à la force vive. Ce dernier n'est vrai, nous l'avons vu, que si l'on suppose les vitesses initiales assez grandes pour que l'on soit assuré que toutes les molécules iront d'une paroi à l'autre. Revenons au contraire à l'entropie, que nous définirons par l'intégrale :

$$\iint P \log P \, dl \, d\omega,$$

étendue au vase entier, P étant choisi de telle façon que la probabilité pour qu'une molécule soit dans un domaine quelconque représentée par l'intégrale :

$$\iint P \, dl \, d\omega = \int P \, d\tau,$$

étendue à ce domaine.

Je suppose que la fonction P soit une fonction quelconque assujettie à être positive et à la condition unique :

$$\iint P \, dl \, d\omega = \text{const.},$$

et je cherche quel est le minimum de l'intégrale

$$\iint P \log P \, dl \, d\omega.$$

Les deux intégrales sont supposées étendues à un même domaine D. Il est aisé de voir que ce minimum sera atteint quand la fonction P sera constante ; et cela resterait vrai si, au lieu de P log P, nous avions une fonction quelconque de P dont la dérivée seconde soit positive.

Cela posé, supposons d'abord notre gaz soustrait à l'action du corps troublant ; s'il est ainsi abandonné à lui-même depuis assez longtemps, la fonction P, comme nous l'avons vu, ne dépend plus que de ω. Approchons maintenant le corps troublant ; on aura, comme nous l'avons dit plus haut, $\omega^2 + \theta(l) = \omega_0^2$ (ω_0 étant une constante pour chaque molécule), et pour le nombre probable N de molécules contenues dans un domaine quelconque, après que le régime s'est établi, c'est-à-dire à l'instant appelé plus haut t_1 :

$$N = \int \frac{\Omega^0 \omega_0}{\omega} \, dl \, d\omega_0 = \int \Omega^0 \, dl \, d\omega,$$

Ω^0 dépendant seulement de ω_0. On a donc, à l'instant t_1, $P = \frac{\Omega^0}{\nu}$, si ν est le nombre total des molécules, et P ne dépend plus que de ω_0.

Si donc nous appelons P la valeur de la fonction P avant qu'on approche le corps troublant, et P_0 ce que devient cette même fonction quand on a approché ce corps et qu'on a attendu l'établissement d'un régime stable, P dépendra seulement de ω et P_0 de :

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \theta(l)}.$$

Soit D le domaine tel que ω_0 soit compris entre deux valeurs infiniment voisines ω_0 et $\omega_0 + d\omega_0$, l'intégrale :

$$\iint P \, dl \, d\omega,$$

qui représente la probabilité pour qu'une molécule soit contenue dans ce domaine, ne changera pas, puisque ω_0 est une constante pour chaque molécule. On a donc :

$$\iint P \, dl \, d\omega = \iint P_0 \, dl \, d\omega.$$

Mais P_0 ne dépendant que de ω_0 sera constant dans ce domaine ; on aura donc :

$$\iint P \log P \, dl \, d\omega > \iint P_0 \log P_0 \, dl \, d\omega,$$

les intégrales étant étendues au domaine D. Et, comme le vase tout entier peut être décomposé en domaines tels que D, la même inégalité subsistera quand les intégrales seront étendues au vase entier, ce qui veut dire que l'entropie a diminué.

Éloignons maintenant le corps troublant, et soit P_1 ce que devient la

fonction P quand le gaz a de nouveau atteint un état de régime stable ; alors P_1, de même que la fonction primitive P, sera fonction de ω seulement (et non pas de ω_0 seulement, comme l'était P_0). Si D_1 est le domaine tel que ω soit compris entre deux valeurs infiniment voisines ω et $\omega + d\omega$, le nombre des molécules contenues dans ce domaine ne changera pas, de sorte qu'en raisonnant tout à fait comme nous venons de le faire, on verrait que

$$\iint P_0 \log P_0 \, dl \, d\omega \quad \iint P_1 \log P_1 \, dl \, d\omega,$$

les intégrales étant étendues soit au domaine D_1, soit au vase tout entier, ce qui veut dire que l'entropie a encore diminué. Ainsi le raisonnement général de Gibbs s'applique au cas particulier qui nous occupe ; il n'y a pas d'exception, et l'entropie va toujours en diminuant.

7. — Gaz à trois dimensions.

Il résulte de ce qui précède que l'entropie diminue dans tous les cas, tandis que la force vive diminue seulement si les fonctions Ω et θ satisfont à certaines conditions.

Avant d'aller plus loin, observons que l'on obtiendrait un gaz jouissant de toutes les propriétés du gaz à une dimension, si l'on enfermait des molécules dans un vase ayant exactement la forme d'un parallélépipède rectangle, et si ces molécules, ayant un rayon d'action infiniment petit, ne se choquaient jamais. Les projections de ces molécules sur un axe parallèle à l'une des arêtes du parallélépipède se comporteraient alors exactement comme les molécules d'un gaz à une dimension.

Revenons maintenant au gaz à trois dimensions ; supposons, par conséquent, que le vase ait une forme quelconque et que les molécules puissent se choquer. Dans le cas précédent, chaque molécule (au moins tant qu'on n'approchait pas un corps troublant) conservait sa force vive (et même le carré de l'une quelconque des trois composantes de sa vitesse demeurait constant). Ici il n'en est plus de même ; les chocs des molécules font varier leurs vitesses ; la force vive de chacune d'elles est variable ; c'est seulement la *somme* de toutes ces forces vives qui est constante. De là la différence essentielle qu'il y a entre les deux cas.

Supposons qu'on approche le corps troublant et que θ représente comme tout à l'heure le double de l'énergie potentielle due à l'attraction du corps troublant sur l'une des molécules.

L'équation des forces vives s'écrit alors :

$$\Sigma(\omega^2 + \theta) = \text{const.},$$

la sommation étant étendue à toutes les molécules. Nous pouvons alors appeler $P\delta$ la probabilité pour qu'une molécule soit contenue dans un petit domaine δ, et nous avons les deux équations :

$$\Sigma P\delta = \text{const.},$$

$$\Sigma P(\omega^2 + \theta)\delta = \text{const.},$$

dont la seconde est l'équation des forces vives, tandis que la première exprime que le nombre des molécules est constant. Alors le régime sera atteint quand l'entropie

$$\Sigma(P \log P)\delta$$

sera minimum, ce qui arrivera évidemment quand on fera :

$$P = a\, e^{-b(\omega^2+\theta)},$$

a et b étant deux constantes positives faciles à calculer quand on connaît la masse totale et l'énergie totale. C'est là l'équation de l'équilibre *isothermique* de notre gaz.

Supposons alors, comme plus haut, qu'on approche le corps troublant au temps t_0, puis qu'on l'éloigne au temps t_1 ; au temps t_0, la densité du gaz sera uniforme dans tout le vase ; au temps t_1, on aura :

$$P = a\, e^{-b(\omega^2+\theta)},$$

et la densité du gaz sera proportionnelle à $e^{-b\theta}$; elle sera donc d'autant plus petite que θ sera plus grande ; c'est-à-dire que, dans le cas de la pesanteur, elle sera plus petite en haut qu'en bas. C'est le contraire de la conclusion paradoxale où nous avait conduit l'étude des gaz à une dimension. Et il en résulte encore que le travail dépensé pour éloigner notre corps troublant au temps t_1 est plus grand que le travail gagné quand on l'avait approché au temps t_0. Le gaz s'est échauffé et nous avons perdu du travail, ce qui est conforme au principe de Carnot.

8. — Cas des variations rapides.

Mais, dans tout ce qui précède, nous avons toujours supposé que, quand on avait approché le corps troublant, on laissait au régime le temps de s'établir avant de l'éloigner de nouveau. Les résultats subsisteraient-ils si on n'attendait pas pour l'écarter l'établissement d'un nouveau régime stable ? Le raisonnement de Gibbs, c'est-à-dire celui du paragraphe 6, ne permet pas de l'affirmer.

Revenons au gaz à une dimension ; nous avons vu que, quand le régime stable s'établit de nouveau, après l'approche du corps troublant, la force vive avait diminué ; l'effet final du corps troublant est donc de diminuer la force vive si l'on attend suffisamment longtemps ; il est aisé de voir au contraire que, dans les premiers moments, l'effet est opposé et tend à augmenter la force vive. Reprenons en effet l'équation différentielle du paragraphe 3 que je puis écrire :

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{d^2 \eta}{dl^2},$$

en rappelant que nous avons posé plus haut :

$$0 = -2\,\frac{d\eta}{dl};$$

à l'instant initial t_0 (je puis supposer qu'il ait été pris pour origine de façon que $t_0 = 0$), la valeur de l sera l_0 et la valeur de $\frac{dl}{dt}$ est ω ; à l'instant t, si t est petit, on aura :

$$l = l_0 + \omega t + \frac{1}{2}\,\frac{d^2 l}{dt^2}\,t^2 + \frac{1}{6}\,\frac{d^3 l}{dt^3}\,t^3;$$

$$\frac{dl}{dt} = \omega + \delta\omega = \omega + \frac{d^2 l}{dt^2}\,t + \frac{1}{2}\,\frac{d^3 l}{dt^3}\,t^2.$$

En différentiant l'équation différentielle, je trouve :

$$\frac{d^3 l}{dt^3} = \frac{d^3 \eta}{dl^3}\,\frac{dl}{dt},$$

ou, en faisant $t = 0$:

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \eta''_0, \qquad \frac{d^3 l}{dt^3} = \eta'''_0\,\omega.$$

Nous désignons par η''_0, η'''_0 les valeurs de $\frac{d^2\eta}{dl^2}$, $\frac{d^3\eta}{dl^3}$ pour $l = l_0$. On trouve

donc :

$$\omega + \delta\omega = \omega + \eta_0'' t + \frac{1}{2} \eta_0''' \omega t^2,$$

et avec la même approximation :

$$(\omega + \delta\omega)^2 = \omega^2 + 2\omega\eta_0'' t + \eta_0''^2 t^2 + \eta_0''' \omega^2 t^2.$$

Le nombre des molécules satisfaisant à des conditions quelconques à l'instant t_0 est représenté par l'intégrale :

$$\iint \Omega \, d\omega \, dl_0,$$

où Ω dépend seulement de ω ; la force vive totale au temps t_0 est alors :

$$\iint \Omega\omega^2 \, d\omega \, dl_0,$$

et la force vive au temps t est :

$$\iint \Omega(\omega + \delta\omega)^2 \, d\omega \, dl_0,$$

c'est-à-dire :

$$\int \Omega\omega^2 \, d\omega \, dl_0 + \int 2\Omega\omega\eta_0'' t \, d\omega \, dl_0 + \int \Omega\eta_0''^2 t^2 \, d\omega \, dl_0 + \int \Omega\omega^2\eta_0''' t^2 \, d\omega \, dl_0.$$

La deuxième et la quatrième intégrale sont nulles parce que η_0'' et η_0''' sont les dérivées des fonctions η_0' et η_0'' qui sont périodiques par rapport à l_0 ; et alors l'intégrale étendue à une période entière est nulle. L'accroissement total de la force vive est donc :

$$\int \Omega\eta_0''^2 t^2 \, d\omega \, dl_0 = t^2 \int \Omega \, d\omega \int \eta_0''^2 \, dl_0,$$

et il est essentiellement positif.

C. Q. F. D.

Pour voir comment on passe d'un cas à l'autre, nous supposerons la fonction perturbatrice η' très petite. Nous désignerons par l_0 et ω les valeurs de l et $\frac{dl}{dt}$ à l'instant initial t_0, et par $l_0 + \omega t + \delta l$, $\omega + \delta\omega$ les valeurs de ces mêmes quantités à l'instant t. Nous aurons donc l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\delta l}{dt^2} = \frac{d\delta\omega}{dt} = \eta''(l_0 + \omega t + \delta l).$$

La fonction η est une fonction périodique de l, et, comme elle n'est définie

que par ses dérivées, nous pourrons supposer que sa valeur moyenne est nulle ; il en sera de même, bien entendu, pour ses dérivées successives η', η'', ... Pour simplifier l'écriture, nous représenterons par η, η', η'', ..., les valeurs de $\eta(l)$, $\frac{d\eta}{dl}$, $\frac{d^2\eta}{dl^2}$ pour $l = l_0 + \omega t$, et par η_0, η'_0, η''_0, ..., les valeurs de ces mêmes fonctions pour $l = l_0$.

Comme η'' est très petit, nous pouvons, en négligeant les termes d'ordre supérieur, écrire notre équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d^2\delta l}{dt^2} = \eta'' + \eta''' \delta l.$$

En première approximation, nous négligerons δl dans le second membre, et alors deux intégrations successives nous donneront :

$$\omega\, \delta\omega = \eta' - \eta'_0,$$

$$\omega^2\, \delta l = \eta - \eta_0 - \omega t \eta'_0,$$

si nous observons que $\delta\omega$ et δl doivent s'annuler pour $t = t_0$, c'est-à-dire pour $t = 0$ si nous prenons l'instant t_0 pour origine.

En seconde approximation, nous aurons donc :

$$\frac{d\delta\omega}{dt} = \eta'' + \frac{\eta''}{\omega^2}(\eta - \eta_0 - \omega t \eta'_0),$$

ou en intégrant :

$$\delta\omega = \frac{\eta' - \eta'_0}{\omega} + \frac{1}{\omega^3}\left[\eta\eta'' - \frac{\eta'^2}{2} - \eta_0\eta'' - \omega t \eta''\eta'_0 + \eta'\eta'_0 - \frac{\eta_0'^2}{2}\right].$$

Et, en effet, on vérifie aisément que la dérivée de $\delta\omega$ a bien la valeur voulue, et que $\delta\omega$ s'annule pour $t = 0$.

On en déduit avec la même approximation :

$$(\omega + \delta\omega)^2 = \omega^2 + 2(\eta' - \eta'_0) + \frac{2\eta''}{\omega^2}[\eta - \eta_0 - \omega t \eta'_0].$$

L'accroissement total de force vive est donc :

$$2\int \Omega(\eta' - \eta'_0)\, d\omega\, dl_0 + 2\int \frac{\Omega}{\omega^2}\eta''[\eta - \eta_0 - \omega t \eta'_0]\, d\omega\, dl_0.$$

La première intégrale est nulle, puisque la valeur moyenne de η' est nulle. Nous n'avons donc à nous occuper que de la seconde. Si t est très petit, on aura sensiblement :

$$\eta'' = \eta''_0, \qquad \eta - \eta_0 - \omega t \eta'_0 = \frac{\omega^2 t^2 \eta''_0}{2}.$$

L'accroissement de force vive sera donc :

$$\int \Omega \eta_0''^2 t^2 \, d\omega \, dl_0,$$

ce qui confirme le résultat trouvé plus haut.

Supposons, au contraire, t très grand ; je dis alors que des intégrales telles que :

$$\int \frac{\Omega}{\omega^2} \eta'' \eta_0 \, d\omega \, dl_0$$

tendront vers zéro. Ce qui les caractérise, c'est la présence sous le signe $\int$ de deux facteurs.

Le premier, tel que η'', est une fonction périodique de $l_0 + \omega t$, dont la valeur moyenne est nulle.

Le second, tel que η_0, est une fonction périodique de l_0 dont la valeur moyenne est nulle.

Alors le terme général de η'' sera par exemple proportionnel à :

$$\cos m(l_0 + \omega t + h),$$

et celui de η_0 à :

$$\cos m'(l^0 + h').$$

Le produit de ces deux termes donnera une somme de deux cosinus de la forme :

$$\cos(p l_0 + n \omega t + h''),$$

où p et n seront entiers et où n ne sera pas nul. Le terme correspondant de l'intégrale sera :

$$\int \frac{\Omega}{\omega^2} \cos(p l_0 + n \omega t + h'') \, d\omega \, dl_0,$$

et, en lui appliquant les principes du paragraphe 2, on voit qu'il tend vers zéro quand t croît. Il restera donc pour l'accroissement de force vive :

$$2 \int \frac{\Omega}{\omega^2} \eta'' \eta \, d\omega \, dl_0 ;$$

ou, comme la valeur moyenne de

$$\eta'' \eta + \eta'^2 = \frac{d}{dl_0} \eta \eta'$$

est nulle, il viendra :

$$-2 \int \frac{\Omega}{\omega^2} \eta'^2 \, d\omega \, dl_0.$$

Mais η' n'est autre chose que ce que nous avons appelé plus haut $-\frac{\theta'}{2}$, de sorte que la valeur moyenne de η'^2 est ce que nous avons désigné par $\frac{A^2}{4}$ au paragraphe 5 ; l'accroissement de la force vive se réduit donc à :

$$-2\pi\int\frac{\Omega\,A^2\,d\omega}{2\,\omega^2}.$$

ce qui confirme le résultat du paragraphe 5.

Seulement ce résultat n'a de sens que si Ω est divisible par ω^2, et, pour mieux le faire comprendre, nous achèverons le calcul dans un cas particulier, en supposant

$$\Omega = e^{-b\omega^2}, \qquad \eta = \cos K\,l.$$

Calculons l'accroissement de force vive :

$$U = 2\int\frac{\Omega}{\omega^2}\,\eta''\,(\eta - \eta_0 - \omega\eta'_0\,t)\,d\omega\,dl_0,$$

en fonction de t ; les intégrales sont prises depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ par rapport à ω et depuis zéro jusqu'à 2π par rapport à l_0.

On a alors :

$$\eta\eta'' = -K^2\cos K\,(l_0+\omega t), \qquad \eta''\eta_0 = -K^2\cos K\,l_0\cos K(l_0+\omega t),$$
$$\eta''\eta'_0 = +K^3\sin K\,l_0\cos K\,(l_0+\omega t),$$

et les valeurs moyennes de ces trois fonctions périodiques de l_0 seront respectivement :

$$-\frac{K^2}{2}, \qquad -\frac{K^2}{2}\cos K\omega t, \qquad -\frac{K^3}{2}\sin K\omega t,$$

ce qui donne :

$$U = -2\pi K^2\int\frac{e^{-b\omega^2}}{\omega^2}\,(1-\cos K\omega t - K\omega t\sin K\omega t)\,d\omega.$$

Différentions par rapport à t, il vient :

$$\frac{dU}{dt} = 2\pi K^4 t\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-b\omega^2}\cos K\omega t\,d\omega.$$

Cette intégrale est bien connue, elle est égale à une constante indépendante de t multipliée par l'exponentielle $e^{-\frac{K^2t^2}{4b}}$, de sorte que $\frac{dU}{dt}$ est proportionnel à :

$$t\,e^{-\frac{K^2t^2}{4b}};$$

comme, d'autre part, U doit s'annuler pour $t = 0$, il vient :

$$U = -C\left(1 - e^{-\frac{K^2t^2}{4b}}\right)$$

C étant une constante positive.

Cela montre que, dans ce cas, la force vive va constamment en croissant.

On arriverait encore au même résultat si, supposant toujours $\Omega = e^{-b\omega^2}$, on prenait pour η une fonction périodique quelconque de l (que l'on continuerait, bien entendu, à supposer très petite). Soit en effet :

$$\eta_1 = \Sigma A \cos(K l + h).$$

On a alors :

$$\eta_1 \eta_1'' = -\Sigma A A' K^2 \cos(K l_0 + K\omega t + h)\cos(K' l_0 + K'\omega t + h'),$$

$$\eta_1'' \eta_{10} = -\Sigma A A' K^2 \cos(K l_0 + K\omega t + h)\cos(K' l_0 + h'),$$

$$\eta_1'' \eta_{10}' = \Sigma A A' K^2 K' \cos(K l_0 + K\omega t + h)\sin(K' l_0 + h'),$$

dont les valeurs moyennes sont respectivement :

$$-\sum \frac{A^2 K^2}{2}, \qquad -\sum \frac{A^2 K^2}{2} \cos K\omega t, \qquad \sum \frac{A^2 K^3}{2} \sin K\omega t,$$

ce qui donne :

$$U = -2\pi \Sigma A^2 K^2 \int_0^\infty \frac{e^{-b\omega^2}}{2\omega^2}(1 - \cos K\omega t - K\omega t \sin K\omega t)\,d\omega,$$

d'où, par le calcul précédent :

$$U = -2\pi \Sigma C A^2 \left(1 - e^{-\frac{K^2t^2}{4b}}\right),$$

C étant essentiellement positif, ce qui prouve encore que la force vive va constamment en augmentant.

9. — Conclusion.

Nous avons vu que, si les molécules d'un gaz ne se choquaient pas et si le vase avait la forme d'un parallélépipède rectangle, ce gaz se comporterait comme un gaz à une dimension. Si nous supposions maintenant un gaz très raréfié, de façon que les chocs des molécules y soient assez rares, et un vase ayant d'une façon très approchée la forme d'un parallélépipède rectangle sans

l'avoir exactement, nous aurions une sorte de *gaz mixte* qui tiendrait pour ainsi dire le milieu entre les gaz à une et à trois dimensions. Au bout d'un temps assez long pour que chaque molécule ait parcouru plusieurs fois la longueur du vase, mais assez court pour que les chocs n'aient pas été nombreux, ce gaz atteindra un état de régime qui satisfera aux conditions d'équilibre du gaz à une dimension. Mais cet équilibre ne sera pas définitif; les chocs tendront à le détruire, et, au bout d'un temps plus long encore, le gaz atteindra seulement son équilibre définitif, qui sera celui des gaz à trois dimensions. Un pareil gaz mixte n'est évidemment pas irréalisable.

J'appellerai alors *temps très grand du premier ordre* un temps suffisant pour que notre gaz mixte atteigne son équilibre provisoire, celui qui conviendrait aux gaz à une dimension, et *temps très grand du second ordre* le temps nécessaire pour qu'il atteigne son équilibre définitif, celui qui conviendrait aux gaz à trois dimensions.

Supposons alors qu'à l'époque t_0 on approche le corps troublant, puis qu'on l'éloigne à l'époque t_1. Au temps t_0, le gaz a atteint son équilibre définitif, et, comme il n'a été soumis jusqu'ici à aucune force extérieure, la fonction P ne dépend que de η et est proportionnelle à $e^{-b\omega^2}$, conformément à la loi de Maxwell. Si le temps $t_1 - t_0$ est très grand du second ordre, le gaz, à l'époque t_1, a atteint son nouvel équilibre définitif; il se comportera donc comme un gaz à trois dimensions. D'après ce que nous avons vu au paragraphe 7, sa force vive a augmenté et son entropie a diminué.

Mais, si le temps $t_1 - t_0$ est fini ou bien très grand du premier ordre, le gaz se sera comporté pendant ce temps comme un gaz à une dimension. Si, à l'époque t_1, la force vive se trouvait être plus petite qu'à l'époque t_0, on aurait un moyen de contrevenir au principe de Carnot. Il suffirait d'éloigner brusquement le corps troublant à l'époque t_1; et en effet, comme le gaz serait désormais soustrait à toute action extérieure, sa force vive totale ne pourrait plus varier, elle resterait donc moindre qu'à l'époque t_0, de sorte que, quand l'équilibre définitif serait de nouveau atteint, l'énergie interne serait plus petite, et l'entropie plus grande qu'à l'époque t_0.

Si la distribution des vitesses était quelconque à l'époque t_0, il pourrait très bien se faire qu'après un temps $t_1 - t_0$ très grand du premier ordre, la force vive ait diminué; il suffirait pour cela, d'après les paragraphes 5 et 8, que Ω fût divisible par ω^2. Mais il n'en est pas ainsi, le gaz a atteint à l'époque t_0 son équilibre définitif, de sorte que Ω est proportionnel à $e^{-b\omega^2}$. Si alors la fonc-

tion P a pour valeur P_0 à l'instant t_0 et P_1 à l'instant t_1, on a :

$$P_0 = K e^{-h\omega^2}, \qquad \int P_0\, d\tau = \int P_1\, d\tau;$$

d'autre part :

$$\int P_0 \log P_0\, d\tau > \int P_1 \log P_1\, d\tau.$$

puisque l'on a laissé au régime, du moins au régime provisoire, le temps de s'établir et que par conséquent l'entropie a dû diminuer; on en conclut aisément :

$$\int P_0 \omega^2\, d\tau < \int P_1 \omega^2\, d\tau.$$

En est-il encore de même si le temps $t_1 - t_0$ est fini ? Cette fois, comme on ne laisse pas au régime le temps de s'établir, le raisonnement de Gibbs, c'est-à-dire celui du paragraphe 6, n'est plus applicable, et on ne saurait affirmer que l'entropie a diminué. Il résulte néanmoins de l'analyse de la fin du paragraphe 8 que la force vive va encore en augmentant, pourvu que la force perturbatrice η'' soit très petite.

Mais on pourrait se demander s'il en est encore de même quand cette force perturbatrice n'est pas très petite; ce n'est pas tout : au paragraphe 8 nous avons regardé cette force comme constante, c'est-à-dire que le corps troublant ne bougeait pas entre l'instant t_0 où on l'approche brusquement et l'instant t_1 où on l'éloigne brusquement. Qu'arrive-t-il si cette force perturbatrice est variable, c'est-à-dire si, entre les instants t_0 et t_1, les longitudes l satisfont à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = f(l, t),$$

f étant une fonction non seulement de l, mais encore de t ? Cela est évidemment réalisable; il suffit de supposer que le ou les corps troublants se déplacent dans cet intervalle de temps. Le résultat du paragraphe 8 subsiste-t-il encore dans ce cas ? On pourrait en douter, puisque le raisonnement de Gibbs est inapplicable, et alors on pourrait craindre d'être conduit à des résultats contraires au principe de Carnot.

Voici comment on pourra raisonner dans ce cas. Nous savons que l'entropie grossière, celle des physiciens, va toujours en diminuant, mais cela n'est démontré que si les variations des conditions extérieures sont toujours assez lentes pour que le régime ait le temps de s'établir. Considérons au contraire

l'*entropie fine*, telle qu'elle a été définie au paragraphe I. Nous savons qu'elle est toujours constante, et *ce résultat n'est soumis à aucune restriction.*

Cela posé, soient P_0 et P_1 les valeurs des fonctions P aux instants t_0 et t_1, on aura :

$$P_0 = Ke^{-b\omega^2}, \qquad \int P_0\,d\tau = \int P_1\,d\tau = 1.$$

Les entropies seront :

$$S_0 = \int P_0 \log P_0\,d\tau, \qquad S_1 = \int P_1 \log P_1\,d\tau,$$

et les forces vives :

$$V_0 = \int \omega^2 P_0\,d\tau, \qquad V_1 = \int \omega^2 P_1\,d\tau.$$

Le théorème de Taylor, en arrêtant la série au second terme, nous donne :

$$P_1 \log P_1 - P_0 \log P_0 = (P_1 - P_0)(\log P_0 + 1) + \frac{(P_1 - P_0)^2}{2P_2},$$

P_2 étant compris entre P_0 et P_1; mais nous avons :

$$\log P_0 + 1 = \log K + 1 - b\omega^2,$$

ce qui me permet d'écrire :

$$S_1 - S_0 = (\log K + 1)\int (P_1 - P_0)\,d\tau - b\int \omega^2(P_1 - P_0)\,d\tau + \int \frac{(P_1 - P_0)^2\,d\tau}{2P_2}.$$

La première intégrale du second membre est nulle; la seconde est égale à $V_1 - V_0$, la troisième est positive, puisque P_2 est essentiellement positif; il vient donc :

$$(S_1 - S_0) + b(V_1 - V_0) > 0.$$

Ici il s'agit de l'entropie fine, donc $S_1 = S_0$, d'où :

$$V_1 - V_0 > 0.$$

Ce qui montre que la force vive a augmenté.

C. Q. F. D.

La même conclusion subsisterait *a fortiori* si l'entropie avait diminué, c'est-à-dire si

$$S_1 < S_0.$$

La même analyse s'appliquerait donc à l'entropie grossière, mais à la condition que les variations du corps troublant soient assez lentes pour que l'équi-

libre statique ait le temps de s'établir, parce que c'est seulement dans ce cas que nous pouvons affirmer que cette entropie grossière diminue. Elle s'applique au contraire *sans restriction* à l'entropie fine, qui reste constante dans tous les cas.

Le même raisonnement peut être appliqué aux gaz ordinaires, et on fait ainsi disparaître une des difficultés qui subsistaient encore dans la théorie cinétique des gaz.

SUR

LA THÉORIE DES QUANTA

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 153, p. 1103-1108 (4 décembre 1911).

On sait que M. Planck a été conduit par l'étude de la loi du rayonnement des corps noirs à énoncer une hypothèse connue sous le nom de *théorie des quanta*. D'après cette théorie, les éléments auxquels serait dû le rayonnement des solides incandescents et qui seraient assimilables à des résonateurs hertziens, ne pourraient acquérir ou perdre de l'énergie que par sauts brusques, de telle façon que l'énergie d'un pareil résonateur serait toujours multiple d'une quantité fixe caractérisant la longueur d'onde de ce résonateur et appelée *quantum;* cette énergie serait donc toujours égale à un nombre entier de quanta.

Il est inutile de faire remarquer combien cette conception s'éloigne des idées habituellement reçues puisque les lois physiques ne seraient plus susceptibles d'être exprimées par des équations différentielles. Il est naturel qu'on cherche à échapper à cette conséquence, sans parler d'une foule de difficultés de détail, et qu'on se demande s'il n'y aurait pas moyen d'expliquer autrement les faits. J'ai donc cherché, si l'on ne pouvait pas rendre compte de la loi de Planck par d'autres hypothèses et je suis arrivé à un résultat négatif.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les paramètres qui définissent l'état d'un système et

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i$$

les équations différentielles qui régissent ce système; les X sont des fonctions des x; d'après la seconde loi de la Thermodynamique, ce système doit tendre

vers un état final de telle façon qu'il existe une fonction W telle que W $d\tau$ représente la probabilité pour que le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soit dans l'élément de volume $d\tau$ de l'espace à n dimensions. Cette fonction doit satisfaire à l'équation

$$\sum \frac{\partial(\mathrm{W}\mathrm{X}_i)}{\partial x_i} = 0, \tag{2}$$

ce qui veut dire que W est un dernier multiplicateur des équations (1).

Toutes les équations différentielles qui ne possèdent pas de dernier multiplicateur uniforme se trouvent par là exclues. Dans le cas des équations de Hamilton et si les paramètres x sont les variables hamiltoniennes, W est égal à 1. On sait que cette hypothèse est incompatible avec la loi de Planck.

Imaginons un système de résonateurs à courte longueur d'onde; il pourra y avoir échange d'énergie entre ces résonateurs par l'intermédiaire d'atomes, qui, décrivant des trajectoires très étendues, pourront aller de l'un à l'autre et leur transmettre de l'énergie par choc. Ces atomes eux-mêmes, pour plus de simplicité dans l'exposition, pourront être regardés comme des résonateurs à longue période. Soit un résonateur à longue période, x_1 son élongation, y_1 sa quantité de mouvement, ξ son énergie, φ la phase de son mouvement; soit en outre un résonateur à courte période, x_2 son élongation, y_2 sa quantité de mouvement, η son énergie, ψ sa phase; les équations du mouvement pourront s'écrire

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -h_1 x_1 + \mathrm{Z}_1, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -h_2 x_2 + \mathrm{Z}_2;$$

les Z étant les termes dus à l'action du choc et qui sont nuls sauf au moment du choc.

La probabilité pourra être représentée par W $dx_1\, dx_2\, dy_1\, dy_2$, ou ce qui revient au même W $d\xi\, d\eta\, d\varphi\, d\psi$, si l'on prend comme variables nouvelles les énergies et les phases. Comme W doit rester un dernier multiplicateur même en dehors des chocs (et par conséquent pour les équations dépourvues des termes Z), W ne dépendra que de ξ et de η, et comme les dérogations aux lois de la Mécanique doivent être cherchées dans le résonateur à courte période seul, nous supposerons que W est fonction de η seulement.

Cela posé, imaginons un système formé de n résonateurs à courte période tous pareils, d'énergie $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ et de p résonateurs à longue période (atomes) tous pareils et d'énergie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$; on aura, en vertu de la

conservation de l'énergie,

$$\sum \xi + \sum \eta = h,$$

h étant une constante donnée. Je désigne par Y la valeur moyenne des η et par X celle des ξ; nous aurons

$$\mathrm{M}\, dh = \int \Pi\, d\sigma\, d\tau, \qquad \mathrm{MX}\, dh = \int \Pi \xi_1\, d\sigma\, d\tau, \qquad \mathrm{MY}\, dh = \int \Pi \eta_1\, d\sigma\, d\tau,$$

$$\Pi = \mathrm{W}(\eta_1)\mathrm{W}(\eta_2)\ldots\mathrm{W}(\eta_n), \qquad d\sigma = d\eta_1\, d\eta_2 \ldots d\eta_n, \qquad d\tau = d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_p,$$

où les intégrations sont étendues au domaine défini par les inégalités

$$\xi_i > 0, \qquad \eta_i > 0, \qquad h < \sum \xi + \sum \eta < h + dh.$$

Sauf dans des cas très exceptionnels, le rapport de Y à X dépendra des entiers n et p; mais nous devons considérer le cas où ces entiers sont très grands; même alors, il n'est nullement évident *a priori* que ce rapport est indépendant du quotient $\frac{n}{p}$; tant que cette indépendance n'est pas démontrée, il pourrait rester des doutes sur le raisonnement de M. Planck, car si elle n'existait pas, il n'y aurait pas d'état final possible et l'on pourrait se demander si les équations de Boltzmann et les principes de la Thermodynamique sont encore applicables.

Nous pouvons écrire

$$(p-1)!\,\mathrm{M} = \int_0^h \varphi(x)(h-x)^{p-1}\, dx,$$

$\varphi(x)\, dx$ étant défini par

$$\varphi(x)\, dx = \int \Pi\, d\sigma \qquad (\eta_i > 0,\ x < \Sigma\eta < x + dx).$$

Supposons que $\varphi(x)$ soit sensiblement égal pour n très grand à

$$\mathrm{N}\,\theta\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{F}^n\left(\frac{x}{n}\right),$$

N étant un coefficient constant ne dépendant que de n; les seuls éléments de nos intégrales qui soient sensibles sont ceux qui sont voisins de la valeur de x qui rend maximum le produit

$$\mathrm{F}^n\left(\frac{x}{n}\right)\left(\frac{h}{n} - \frac{x}{n}\right)^p.$$

On en déduit sans peine

$$X = \frac{F(Y)}{F'(Y)},$$

ce qui montre que la relation entre X et Y est indépendante du quotient $\frac{n}{p}$.

Si $W = \eta^m$, on a

$$F(Y) = Y^{m+1}, \qquad X = \frac{Y}{m+1}.$$

Si $W = e^{\alpha\eta}$, on a

$$F(Y) = Y e^{\alpha Y}, \qquad X = \frac{Y}{\alpha Y + 1}.$$

Enfin, dans l'hypothèse de Planck, on a $W = 0$, sauf si η est multiple de ε, valeurs pour lesquelles W devient infini et de telle façon que l'intégrale $\int W\,d\eta$ (étendue à un petit intervalle comprenant une des valeurs exceptionnelles) soit égale à 1. On trouve alors

$$\int \varphi(x)\,dx = \frac{(\beta + n - 1)!}{\beta!(n-1)!},$$

si l'intégrale du premier membre est étendue à un très petit intervalle contenant une valeur de x qui soit multiple de ε et égale à $\beta\varepsilon$, tandis que cette même intégrale est nulle dans le cas contraire. On en déduit

$$F(Y) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{Y}\right)^{\frac{Y}{\varepsilon}} \left(1 + \frac{Y}{\varepsilon}\right);$$

d'où

$$\frac{\varepsilon}{X} = L\left(1 + \frac{\varepsilon}{Y}\right), \qquad Y = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1}.$$

C'est bien la formule de Planck.

Pour une théorie plus générale, il faut employer un détour. Posons

(3) $$\Phi(\alpha) = \int_0^\infty W e^{-\alpha\eta}\,d\eta,$$

il viendra

$$\Phi^n(\alpha) = \int_0^\infty \varphi(x) e^{-\alpha x}\,dx,$$

ou, en vertu de la formule de Fourier,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Phi^n(\alpha) e^{\alpha x}\,d\alpha,$$

l'intégrale étant prise soit le long d'une ligne droite, soit le long d'une courbe telle que la partie réelle de α reste positive.

D'où

$$M = \frac{1}{2\pi}\iint \Phi^n(\alpha)e^{\alpha x}(h-x)^p\,dx\,d\alpha;$$

ou, en posant $x = n\lambda$, $p = \mathrm{K}n$, $h = n\beta$:

$$M = \mathrm{K}\iint \Phi^n(\alpha)e^{n\alpha\lambda}(\beta-\lambda)^{\mathrm{K}n}\,d\lambda\,d\alpha,$$

K étant un facteur constant. Les seuls éléments de l'intégrale que nous devions conserver sont ceux qui correspondent au maximum du produit

$$\Phi(\alpha)e^{\alpha\lambda}(\beta-\lambda)^{\mathrm{K}}.$$

Il en résulte que les valeurs de X et de Y seront précisément les valeurs de $\frac{\beta-\lambda}{\mathrm{K}}$ et de λ qui correspondent à ce maximum. Cela donne

$$\mathrm{Y} = -\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)}, \qquad \mathrm{X} = \frac{1}{\alpha}.$$

Dans l'hypothèse de M. Planck, on a

$$\Phi = \frac{1}{1-e^{-\alpha\varepsilon}}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{\mathrm{X}}}-1}.$$

Pour $\mathrm{W} = \eta^m$, on a

$$\Phi = \frac{k}{\alpha^{m+1}}, \qquad \mathrm{Y} = (m+1)\mathrm{X}.$$

Pour $\mathrm{W} = e^{\gamma\eta}$, on a

$$\Phi = \frac{1}{\alpha-\gamma}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{\mathrm{X}}{1-\gamma\mathrm{X}}.$$

Nous pouvons maintenant répondre à la question que nous nous étions posée au début. Lorsque la loi qui lie Y à X est déterminée, il en est de même de la fonction Φ (à un facteur constant près) et par conséquent de W. L'hypothèse des quanta est donc *la seule* qui conduise à la loi de Planck. Il serait aisé de se rendre compte que les hypothèses particulières que nous avons dû faire pour fixer les idées et simplifier l'exposé ne sont pour rien dans ce résultat.

Mais une loi expérimentale n'est jamais qu'approximative, et il est clair qu'on pourrait imaginer des lois dont les différences avec celle de Planck seraient plus petites que les erreurs d'observation et qui conduiraient à une fonction W continue. Observons toutefois que si $\Phi(\alpha)$ reste fini pour α infini,

et c'est ce qui arrivera toutes les fois que la loi du rayonnement sera telle que le rayonnement total soit fini, l'intégrale $\int_0^{\eta_0} W\,d\eta$ restera finie quand η_0 tendra vers zéro, c'est-à-dire que la fonction W présentera pour $\eta = 0$ le même genre de discontinuité que dans la formule de Planck, ce qui exclut la possibilité de représenter les phénomènes par des équations différentielles.

Notre dernière remarque se rapportera à la seconde théorie de M. Planck; cette seconde théorie conduit à la loi

$$Y = \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{e^{\frac{\varepsilon}{X}}+1}{e^{\frac{\varepsilon}{X}}-1}.$$

Les règles précédentes, appliquées à cette loi, montrent que W est nul, sauf quand η est un multiple impair de $\frac{\varepsilon}{2}$, auquel cas W est infinie. Ce n'est pas là l'hypothèse d'où était parti M. Planck. Cette seconde théorie est donc moins bien confirmée que la première par l'analyse qui précède.

SUR

LA THÉORIE DES QUANTA

Journal de Physique théorique et appliquée, 5e série, t. 2, p. 5-34 (1912).

1. — Introduction.

On sait à quelle hypothèse M. Planck a été conduit par ses recherches sur les lois du rayonnement. D'après lui, l'énergie des radiateurs lumineux varierait d'une manière discontinue, et c'est ce qu'on appelle la théorie des Quanta. Il est à peine nécessaire de faire remarquer combien cette conception s'écarte de tout ce qu'on avait imaginé jusqu'ici; les phénomènes physiques cesseraient d'obéir à des lois exprimables par des équations différentielles, et ce serait là, sans aucun doute, la plus grande révolution et la plus profonde que la philosophie naturelle ait subie depuis Newton. Je ne parlerai pas des difficultés de détail, elles sautent à tous les yeux et M. Planck est le premier à s'en préoccuper.

Peut-on néanmoins échapper à cette conséquence? Bien des personnes l'ont pensé; lors du récent Congrès de Bruxelles, M. Nernst m'avait communiqué certaines suggestions; il pensait qu'on pourrait rendre compte des faits, en supposant que les masses, au lieu d'être constantes comme dans la Mécanique classique, au lieu de dépendre seulement de la vitesse, comme dans la Mécanique nouvelle fondée sur le principe de relativité, soient dépendantes à la fois des composantes de la vitesse et de celles de l'accélération. Ce sont ces suggestions de M. Nernst qui m'ont déterminé à entreprendre ce travail, et je dois dire tout de suite que j'ai été conduit à répondre négativement à la question posée par l'éminent physicien.

M. Planck se représente le rayonnement des solides comme dû à un très grand nombre de résonateurs hertziens. Chacun de ces résonateurs a une période propre unique et émet une lumière rigoureusement monochromatique. Par suite des échanges d'énergie entre ces résonateurs, il s'établit entre eux un partage de l'énergie suivant une certaine loi, et il en résulte une certaine distribution de l'énergie rayonnée dans le spectre. Ceci suppose que ces échanges d'énergie sont possibles, bien que chaque résonateur ne puisse ni absorber, ni émettre que de la lumière d'une couleur donnée; car, si l'échange ne pouvait avoir lieu, on ne tendrait pas vers une distribution finale et la distribution initiale persisterait indéfiniment. Mais ces échanges peuvent se faire par deux mécanismes entièrement différents :

1° Par le jeu du principe de Döppler-Fizeau; soit que les résonateurs soient supposés en mouvement, soit que la lumière rayonnée puisse être réfléchie, réfractée, diffractée ou diffusée par des corps en mouvement. Dans ce cas, les résonateurs de longueurs d'ondes différentes pourraient échanger leurs énergies par l'intermédiaire de l'éther;

2° Par des phénomènes mécaniques et en particulier par des chocs. On ne peut supposer qu'il y ait une influence *directe* d'un résonateur sur l'autre. La théorie des quanta ne s'y prêterait pas, puisque l'un des résonateurs ne pourrait gagner d'énergie que par multiples d'un certain quantum, tandis que l'autre ne pourrait en perdre que par multiples d'un autre quantum, incommensurable avec le premier. D'ailleurs, abstraction faite de la théorie des quanta, il ne manquerait pas de bonnes raisons pour lesquelles un échange immédiat serait invraisemblable et ne pourrait en tout cas qu'être exceptionnel. Mais il doit circuler entre les résonateurs des atomes matériels qui, en choquant les résonateurs, peuvent leur communiquer ou leur emprunter de l'énergie; les échanges se feraient alors par l'intermédiaire de la matière.

Bien que cette conception des résonateurs de M. Planck soit assez particulière et n'ait d'autre but que de fixer les idées, nous n'avons aucune raison de ne pas l'adopter, puisqu'elle semble ne devoir en aucun cas modifier les résultats essentiels. D'un autre côté, nous admettrons la possibilité des deux modes d'échange, mais nous étudierons plus particulièrement dans cet article le second mode, c'est-à-dire l'échange mécanique par l'intermédiaire de la matière.

Imaginons d'abord un système dont l'état est défini à chaque instant par n paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Supposons que les lois qui nous font connaître les variations de ces paramètres s'expriment par les équations différentielles :

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i,$$

où les X sont des fonctions des x. Nous pouvons représenter l'état du système par le point de l'espace à n dimensions dont les coordonnées sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La probabilité pour que ce point soit intérieur à un élément de volume $d\tau$ de cet espace à n dimensions sera $W\,d\tau$, W étant une certaine fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La probabilité pour que ce point soit intérieur à un volume de l'espace à n dimensions sera $\int W\,d\tau$, l'intégration étant étendue à ce volume. Par une pareille probabilité, j'entends le rapport $\frac{t}{T}$, T désignant une très longue durée s'étendant depuis l'époque θ jusqu'à l'époque $\theta + T$, et t le temps pendant lequel, entre ces deux mêmes époques, le point représentatif s'est trouvé à l'intérieur du volume considéré. Cette probabilité n'aura donc aucun sens, si ce rapport $\frac{t}{T}$ ne peut pas être considéré comme indépendant de θ et de T, pourvu que t soit très grand. Si cette condition est remplie et si la fonction W peut être définie, elle devra satisfaire à l'équation aux dérivées partielles :

$$(2) \qquad \sum \frac{\partial (W X_i)}{\partial x_i} = 0,$$

c'est-à-dire que W doit être un « dernier multiplicateur » des équations (1). Si donc ces équations n'admettent pas de dernier multiplicateur uniforme, la fonction W n'existera pas, on ne pourra parler de l'*état moyen du système pendant un intervalle très long*; et même si l'on considère un ensemble formé d'un très grand nombre de pareils systèmes, cet ensemble de systèmes ne tendra pas vers un état final; cela est contraire au second principe de la thermodynamique qui exige que le monde tende vers un état final d'où il ne peut plus sortir une fois qu'il l'a atteint. *Les équations qui représentent les phénomènes naturels doivent donc posséder au moins un dernier multiplicateur uniforme.*

Dans le cas de la mécanique classique, les équations différentielles sont

celles de Hamilton :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = Y_i = -\frac{dF}{dx_i},$$

et l'on a :

$$\sum \frac{dX_i}{dx_i} + \sum \frac{dY_i}{dy_i} = 0,$$

c'est-à-dire que le dernier multiplicateur W est égal à 1. On sait que cette hypothèse conduit au théorème de l'équipartition de l'énergie.

2. — Cas de deux résonateurs.

Envisageons un système formé de deux résonateurs, l'un à longue, l'autre à courte période. Chacun de ces résonateurs pourra être considéré comme une masse mobile oscillant autour de sa position d'équilibre d'après la loi pendulaire. Pour le premier, celui dont la période est longue, nous désignerons par m_1 sa masse, par $2\pi\sqrt{\frac{h_1}{m_1}}$ sa période, par x_1 son élongation, par y_1 sa quantité de mouvement, par ξ son énergie, et par φ la phase de son mouvement; de telle façon que l'on ait :

$$\frac{1}{\sqrt{m_1}} y_1 = \sqrt{2\xi}\cos\varphi, \qquad \sqrt{h_1}\, x_1 = \sqrt{2\xi}\sin\varphi, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{h_1}{m_1}},$$

et que les équations du mouvement, quand ce mouvement n'est pas troublé par des chocs, s'écrivent :

$$y_1 = m_1 \frac{dx_1}{dt}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -h_1 x_1.$$

Nous désignerons pour le second résonateur par m_2, h_2, x_2, y_2, η, ψ, les quantités correspondantes à m_1, h_1, x_1, y_1, ξ, φ, de sorte qu'on aura :

$$\frac{1}{\sqrt{m_2}} y_2 = \sqrt{2\eta}\cos\psi, \qquad \sqrt{h_2}\, x_2 = \sqrt{2\eta}\sin\psi, \qquad \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\frac{h_2}{m_2}};$$

$$y_2 = m_2 \frac{dx_2}{dt}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -h_2 x_2.$$

Nous supposerons que les deux résonateurs oscillent sur la même droite (mais autour de positions d'équilibre différentes), de façon à pouvoir se choquer. Les équations du mouvement troublé par les chocs s'écriront :

$$(3) \qquad y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -h_i x_i + Z_i \qquad (i = 1, 2).$$

Les fonctions Z sont négligeables, sauf au moment des chocs ; ce sont donc des fonctions des x et des y qui seront sensiblement nulles quand la différence $x_1 - x_2$ n'aura pas une valeur voisine de celle qui correspond au choc, et extrêmement grandes dans le cas contraire.

Je ne cherche pas une expression plus précise des fonctions Z en m'appuyant sur les lois connues du choc. Nous sommes obligés, en effet, de supposer, et c'est précisément là l'objet de ce travail, que les lois du choc sont modifiées d'une façon qui déroute toutes les prévisions. En revanche, nous ne toucherons pas aux termes de nos équations, autres que les termes Z ; ces termes expriment seulement, en effet, que le mouvement de chaque résonateur reste sinusoïdal en l'absence de toute perturbation, et c'est là une hypothèse qui s'impose, si nous voulons que chaque résonateur donne une radiation monochromatique.

En ce qui concerne le résonateur à longue période, nous pouvons supposer à la fois que h_1 est très petit et que l'amplitude des oscillations est très grande ; nous arrivons à la limite au cas d'un atome se mouvant librement, et dont le mouvement est rectiligne et uniforme dans l'intervalle des chocs.

Cela posé, nous devrons avoir un dernier multiplicateur kW, k étant un facteur constant dont je me réserve de disposer ; la probabilité est exprimée par l'intégrale :

$$\int kW\,d\tau = k\int W\,dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2,$$

ce qui peut s'écrire en passant aux variables ξ, η, φ, ψ :

$$(4)\qquad k\frac{m_1 m_2}{h_1 h_2}\int W\,d\xi\,d\eta\,d\varphi\,d\psi.$$

La fonction W doit rester un dernier multiplicateur en dehors des chocs, c'est-à-dire quand on annule les termes Z, cela exige :

$$\frac{y_1}{m_1}\frac{\partial W}{\partial x_1} - h_1 x_1\frac{\partial W}{\partial y_1} + \frac{y_2}{m_2}\frac{\partial W}{\partial x_2} - h_2 x_2\frac{\partial W}{\partial y_2} = 0,$$

ou avec les nouvelles variables :

$$\sqrt{\frac{m_1}{h_1}}\frac{\partial W}{\partial \varphi} + \sqrt{\frac{m_2}{h_2}}\frac{\partial W}{\partial \psi} = 0,$$

d'où

$$W = \text{fonc.}\left(\xi,\ \eta,\ \varphi\sqrt{\frac{h_1}{m_1}} - \psi\sqrt{\frac{h_2}{m_2}}\right).$$

Les coefficients $\sqrt{\frac{h_1}{m_1}}$ et $\sqrt{\frac{h_2}{m_2}}$ étant généralement incommensurables, la seule solution qui soit uniforme en x_1, y_1, x_2, y_2, et par conséquent périodique en φ et ψ, c'est une fonction arbitraire de ξ et η.

Pour avoir la probabilité pour que les énergies soient comprises respectivement entre ξ et $\xi + d\xi$, et entre η et $\eta + d\eta$, il faut intégrer l'expression (4) par rapport à φ et à ψ depuis o jusqu'à 2π; on trouve ainsi :

$$4\pi^2 k \frac{m_1 m_2}{h_1 h_2} \mathrm{W}\, d\xi\, d\eta,$$

ce qui, en prenant l'arbitraire :

$$k = \frac{h_1 h_2}{4\pi^2 m_1 m_2},$$

se réduit à $\mathrm{W}\, d\xi\, d\eta$.

Si donc on représente l'état du système par le point du plan dont les coordonnées sont ξ et η, la probabilité pour que le point représentatif soit intérieur à une certaine aire sera :

$$\int \mathrm{W}\, d\xi\, d\eta.$$

La fonction W peut dépendre de ξ et de η, mais le résonateur à très longue période étant assimilable à un atome, nous devons admettre qu'il suit les lois de la Mécanique ordinaire et que les dérogations à ces lois ne pourront provenir que de la présence de l'autre résonateur, ce qui signifie que W ne dépend que de η; cette hypothèse sera mieux justifiée dans la suite.

Je dois rechercher quelle est la partition de l'énergie, c'est-à-dire quelles vont être les valeurs probables de ξ et de η, valeurs que j'appelle X et Y. J'observe que ξ et η sont liés par l'équation des forces vives :

$$\xi + \eta = h,$$

où h est une constante donnée. Je poserai alors :

$$\mathrm{M}\, dh = \int \mathrm{W}\, d\xi\, d\eta,$$

où l'intégration est étendue au domaine défini par les inégalités :

$$\xi > 0, \qquad \eta > 0, \qquad h < \xi + \eta < h + dh.$$

J'aurai alors par définition :

$$\mathrm{MX}\, dh = \int \xi \mathrm{W}\, d\xi\, d\eta; \qquad \mathrm{MY}\, dh = \int \eta \mathrm{W}\, d\xi\, d\eta.$$

Il est clair que je pourrais écrire également :

$$(5)\quad M = \int_0^h W(\eta)\,d\eta, \qquad MX = \int_0^h (h-\eta)\,W(\eta)\,d\eta, \qquad MY = \int_0^h \eta\,W(\eta)\,d\eta.$$

On a dans tous les cas :

$$X + Y = h.$$

Si $W = 1$, il vient comme on sait $X = Y$. Dans tous les cas, nous devons admettre que le résonateur à longue période suit les lois actuelles, et par conséquent que X représente la température absolue (à un facteur constant près que nous pouvons supposer égal à 1 par un choix convenable des unités). Si la loi de Planck est vraie, on devra donc avoir :

$$Y = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1},$$

ε étant une constante. Il serait aisé, à l'aide des formules (5), de déterminer W de façon à retrouver cette loi, mais cela n'aurait aucun intérêt, le cas de la nature étant entièrement différent.

3. — Cas de plusieurs résonateurs.

Nous devons imaginer, en effet, non pas deux résonateurs, mais des résonateurs en très grand nombre ; nous supposerons qu'il y en ait p à longue période, tous semblables entre eux et ayant respectivement pour énergie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$; et en outre n résonateurs à courte période, tous semblables entre eux et ayant respectivement pour énergie, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. Nous pourrons d'ailleurs désigner ces résonateurs par $R_1, R_2, \ldots, R_p$, d'une part, par $R'_1, R'_2, \ldots, R'_n$, d'autre part ; nous représenterons leurs phases par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ et par $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$. Les équations différentielles devront alors admettre un dernier multiplicateur kU (où k est un facteur constant dont nous nous réservons de disposer) ; de telle façon qu'en représentant l'état du système par un point de l'espace à $2n + 2p$ dimensions des ξ, des η, des φ et des ψ, la probabilité pour que le point représentatif soit intérieur à un certain volume de cet espace sera :

$$\int kU\,d\varpi,$$

où $d\varpi$ est le produit des $d\xi$, des $d\eta$, des $d\varphi$ et des $d\psi$.

Considérons maintenant l'effet des chocs entre les résonateurs R_i et R'_k, et soit W, ce que serait le dernier multiplicateur si ces deux résonateurs existaient seuls; nous avons vu au paragraphe précédent que W est une fonction de ξ_i et de η_k; nous avions même été conduits à supposer que W dépendait de η_k seulement, mais j'abandonne pour un instant cette hypothèse. Un choc entre R_i et R'_k fera varier brusquement (ou très rapidement) les variables ξ_i, η_k, φ_i, ψ_k, relatives à ces deux résonateurs et ne changera pas les variables relatives aux autres résonateurs. Pour que la distribution des probabilités n'en soit pas altérée, il faut que kU soit de la forme :

$$kU = F\,W(\xi_i, \eta_k),$$

$W(\xi_i, \eta_k)$ étant le dernier multiplicateur, tel qu'il serait si les deux résonateurs existaient seuls et F étant une fonction des variables relatives aux autres résonateurs. Si donc nous envisageons en particulier les résonateurs R_1, R_2 et R'_1 par exemple, nous pourrons écrire :

$$kU = F_1(\xi_2, \ldots)\,W(\xi_1, \eta_1),$$

et, d'autre part :

$$kU = F_2(\xi_1, \ldots)\,W(\xi_2, \eta_1),$$

F_1 dépendant seulement des résonateurs autres que R_1 et R'_1 et F_2 seulement des résonateurs autres que R_2 et R'_1. Cela n'est possible que si l'on a :

$$kU = \Phi\,w'(\xi_1)\,w'(\xi_2)\,w(\eta_1),$$

$w'(\xi_1)$, $w'(\xi_2)$, $w(\eta_1)$ étant des fonctions d'une seule variable ne dépendant respectivement que de ξ_1, de ξ_2 et de η, tandis que Φ ne dépend que des variables relatives aux résonateurs autres que R_1, R_2 et R'_1. On trouvera ainsi finalement :

$$kU = k\,w'(\xi_1)\,w'(\xi_2)\ldots w'(\xi_p)\,w(\eta_1)\,w(\eta_2)\ldots w(\eta_n).$$

C'est le moment de revenir à l'hypothèse faite plus haut et que nous discuterons plus complètement plus loin et de supposer $w'(\xi_i) = 1$, de telle façon que notre probabilité ne dépende que des η et pas des ξ.

Dans tous les cas, cette probabilité ne dépend pas des phases. Si donc nous représentons la distribution des énergies dans le système par un point de l'espace à $n+p$ dimensions des ξ et des η, la loi des probabilités s'obtiendra en intégrant l'expression :

$$\int kU\,d\varpi.$$

par rapport aux φ et aux ψ depuis o jusqu'à 2π ; on trouve ainsi :

$$k(2\pi)^{n+p}\int \mathrm{U}\, d\sigma\, d\tau,$$

où $d\sigma$ désigne le produit des $d\eta$ et $d\tau$ celui des $d\xi$. Nous disposerons de k de telle façon que :

$$k(2\pi)^{n+p}=1,$$

et, en nous rappelant que les w' sont supposés égaux à 1 et que U se réduit au produit des w, nous aurons pour l'expression de la probabilité :

$$(6)\qquad \int \mathrm{U}\, d\sigma\, d\tau = \int w(\eta_1)\, w(\eta_2)\ldots w(\eta_p)\, d\sigma\, d\tau.$$

L'équation des forces vives s'écrira :

$$\Sigma\xi + \Sigma\eta = h.$$

Les valeurs moyennes des ξ_i seront toutes les mêmes par raison de symétrie et il en est de même de celles des η_k ; j'appelle X la valeur moyenne des ξ_i et Y celle des η_k, et j'ai pour définir ces quantités les équations :

$$(7)\qquad \mathrm{M}\, dh = \int \mathrm{U}\, d\sigma\, d\tau; \qquad \mathrm{MX}\, dh = \int \xi_1 \mathrm{U}\, d\sigma\, d\tau; \qquad \mathrm{MY}\, dh = \int \eta_1 \mathrm{U}\, d\sigma\, d\tau,$$

les intégrations étant étendues au domaine défini par les inégalités :

$$(8)\qquad \xi_i > 0, \qquad \eta_k > 0, \qquad h < \Sigma\xi + \Sigma\eta < h + dh.$$

4. — Discussion des formules.

Il y a lieu de se demander d'abord si la relation entre X et Y est indépendante des nombres entiers n et p. Il y a un cas où il en est effectivement ainsi, c'est celui où $w(\eta)$ est une puissance de η, soit η^m. Pour nous en rendre compte, nous allons nous appuyer sur la formule suivante.

Répartissons arbitrairement en deux classes les résonateurs, soit à longue, soit à courte période et désignons par ξ'_i et η'_k les énergies des résonateurs de la première classe, par ξ''_i et η''_k celles des résonateurs de la deuxième classe. Soit U' ce que serait le produit U si les résonateurs de la première classe existaient seuls et U'' ce qu'il serait si ceux de la deuxième classe existaient

seuls, on aura donc :

$$U = U'U'';$$

nous désignerons par $d\sigma'$, $d\tau'$, $d\sigma''$, $d\tau''$ les produits des $d\eta'$, des $d\xi'$, des $d\eta''$, des $d\xi''$ et nous aurons :

$$M\,dh = \int U'U''\,d\sigma'\,d\tau'\,d\sigma''\,d\tau''.$$

Commençons par calculer l'intégrale du second membre en l'étendant au domaine défini par les inégalités :

$$(8\ bis)\qquad \left\{\begin{array}{l} \xi' > 0, \quad \eta' > 0, \quad \xi'' > 0, \quad \eta'' > 0; \\ h' < \Sigma\xi' + \Sigma\eta' < h' + dh'; \quad h'' < \Sigma\xi'' + \Sigma\eta'' < h'' + dh'', \end{array}\right.$$

les variables se trouvent séparées et l'intégrale se décomposera en deux facteurs :

$$\int U'\,d\sigma'\,d\tau' \int U''\,d\sigma''\,d\tau''.$$

Ces deux facteurs ne sont autre chose que $M'\,dh'$ et $M''\,dh''$, en désignant par M' (ou par M'') ce que deviendrait M si les résonateurs de la première classe (ou de la seconde) existaient seuls. Pour retrouver l'intégrale étendue au domaine (8), il suffit d'intégrer de nouveau par rapport à h' et h'' dans le domaine défini par :

$$h' > 0, \qquad h'' > 0, \qquad h < h' + h'' < h + dh,$$

on trouve ainsi :

$$M\,dh = \int M'M''\,dh'\,dh'' \qquad [h' > 0,\ h'' > 0,\ h < h' + h'' < h + dh]$$

ou ce qui revient au même :

$$(9)\qquad M(h) = \int_0^h M'(x)\,M''(h - x)\,dx.$$

Comme M est une fonction qui dépend de n et de p et que je puis écrire $\varphi_{n,p}(h)$, je puis écrire la formule (9) sous la forme :

$$(9\ bis)\qquad \varphi_{m+n,p+q}(h) = \int_0^h \varphi_{m,p}(x)\,\varphi_{n,q}(h - x)\,dx.$$

Si nous désignons par $X'Y'$ (ou par $X''Y''$) ce que seraient les valeurs moyennes des ξ et des η si les résonateurs de la première classe (ou de la

deuxième) existaient seuls, on trouvera de même :

(10) $$YM = \int_0^h Y'M'M''\,dx,$$

où Y' et M' sont des fonctions de x, et M'' de $h - x$.

Si nous supposons $w(\eta) = \eta^m$, je trouve :

$$\varphi_{1,1} = \frac{h^{m+1}}{m+1}, \qquad \varphi_{2,0} = h, \qquad \varphi_{0,2} = h^{2m+1}\int_0^h x^m(1-x)^m\,dx.$$

Je dis que nous aurons en général :

$$\varphi_{n,p} = K h^{mn+n+p-1},$$

K étant un facteur numérique. Il suffit de remarquer que l'intégrale définie :

$$\int_0^h x^\alpha (h-x)^\beta\,dx$$

est proportionnelle à $h^{\alpha+\beta+1}$ et d'appliquer la formule (9 *bis*) pour reconnaitre que la proposition vraie pour les petites valeurs de n et de p doit être également vraie par récurrence pour toutes les valeurs de ces entiers.

Si nous plaçons dans la première classe tous les résonateurs à courte période et dans la seconde tous ceux de période longue, nous aurons donc :

$$M' = K'h'^{mn+n-1}, \qquad M'' = K''h''^{p-1}.$$

On devra avoir d'ailleurs

$$Y' = \frac{h'}{n}, \qquad X'' = \frac{h''}{p},$$

puisque dans le cas, par exemple, où les n résonateurs à courte période existent seuls, comme ils sont tous identiques, l'énergie moyenne Y' de chacun d'eux, devra être la $n^{\text{ième}}$ partie de l'énergie totale h'; on aura donc, pour les formules (9) et (10) :

$$M = K'K''\int_0^h x^{mn+n-1}(h-x)^{p-1}\,dx,$$

$$MY = K'K''\int_0^h \frac{x^{mn+n}}{n}(h-x)^{p-1}\,dx, \qquad MX = K'K''\int_0^h x^{mn+n-1}\frac{(h-x)^p}{p}\,dx.$$

Mais l'intégration par parties nous donne :

$$\int_0^h x^{\alpha+1}(h-x)^\beta\,dx = \frac{\alpha+1}{\beta+1}\int_0^h x^\alpha (h-x)^{\beta+1}\,dx.$$

On en déduit :

$$\frac{nY}{pX} = \frac{mn+n}{p},$$

d'où :

$$\frac{X}{1} = \frac{Y}{m+1}.$$

On voit que la répartition de l'énergie ne dépend pas des nombres n et p, mais c'est là le seul cas où cette indépendance ait lieu.

Considérons le cas de $n = 1$, $p = 2$; de sorte que nous aurons trois résonateurs dont les énergies seront respectivement η, ξ_1 et ξ_2; et on aura :

$$M = \int w \, d\eta \, d\xi_1, \qquad XM = \int \xi_1 w \, d\eta \, d\xi_1, \qquad YM = \int \eta w \, d\eta \, d\xi_1,$$

où w dépend seulement de η, où l'état du système est représenté par le point du plan dont les coordonnées sont η et ξ_1 et où les intégrations sont étendues au triangle :

$$\eta > 0, \qquad \xi_1 > 0, \qquad \eta + \xi_1 < h.$$

Si alors w est considéré comme représentant la densité de la matière, M représentera la masse du triangle, X et Y son centre de gravité. Ce centre de gravité sera sur la médiane correspondant au côté qui est sur l'axe des ξ_1, puisque la densité est constante le long des droites parallèles à cet axe; on a donc :

$$2X + Y = h.$$

Quand on fera varier h, ce centre de gravité XY décrira une certaine courbe C, et l'équation de cette courbe nous donnera la relation cherchée entre X et Y.

Pour passer au cas de $n = 1$, $p = 1$, nous n'avons qu'à faire :

$$M = \int w \, d\eta, \qquad XM = \int \xi_1 w \, d\eta = \int (h - \eta) w \, d\eta, \qquad YM = \int \eta w \, d\eta,$$

en étendant les intégrations à la droite :

$$\xi_1 + \eta = h,$$

qui sert de base à notre triangle; le point XY représente alors le centre de gravité de cette base. Si nous voulons que la loi de partition de l'énergie soit la même pour $n = 1$, $p = 1$, que pour $n = 1$, $p = 2$, il faut que le lieu de ce nouveau centre de gravité, quand on fait varier h, soit encore la courbe C.

Je dis que cela n'est possible que si la courbe C est une droite passant par l'origine ; si, en effet, ce n'était pas une droite, c'est-à-dire si le rapport $\frac{Y}{X}$ n'était pas une constante, nous pourrions prendre h assez petit pour que, de O jusqu'à h, cette courbe ne présente pas de point d'inflexion et soit par conséquent convexe. Décomposons le triangle en trapèzes infiniment étroits en menant des parallèles à la base $\xi_1 + \eta = h$; chacun de ces trapèzes aura son centre de gravité sur C; le centre de gravité total du triangle ne changera pas si l'on concentre la masse de chacun de ces trapèzes en son centre de gravité : c'est donc le centre de gravité de la courbe C en attribuant à cette courbe une densité partout positive. Or, le centre de gravité d'une courbe convexe ne peut se trouver sur cette courbe; donc le centre de gravité du triangle ne pourrait se trouver sur C, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La courbe C est donc une droite :

$$\frac{Y}{X} = m + 1,$$

d'où :

$$\frac{\int_0^h \eta_1 w \, d\eta_1}{\int_0^h (h - \eta_1) w \, d\eta_1} = m + 1.$$

Le rapport des deux intégrales étant indépendant de h, nous obtiendrons encore le même rapport en différentiant le numérateur et le dénominateur par rapport à h; mais

$$\frac{d}{dh}\int_0^h \eta_1 w \, d\eta_1 = h w(h), \qquad \frac{d}{dh}\int_0^h (h - \eta_1) w \, d\eta_1 = \int_0^h w \, d\eta_1,$$

d'où successivement :

$$\frac{h w(h)}{\int_0^h w \, d\eta_1} = m + 1, \qquad \int_0^h w \, d\eta_1 = h^{m+1}, \qquad w = \eta_1^{m}.$$

C. Q. F. D.

Ce n'est donc que dans des cas très exceptionnels que la loi de partition de l'énergie est indépendante des entiers n et p; il semble d'abord qu'il en résulte qu'aucun équilibre thermique ne soit possible et que cela soit en contradiction avec le second principe de la thermodynamique, mais il faut se rappeler que

les nombres n et p sont toujours très grands. Il convient donc de se poser la question autrement : *la loi de partition de l'énergie est-elle indépendante du rapport $\frac{n}{p}$ quand les entiers n et p sont très grands ?*

Si cette indépendance n'avait pas lieu, l'équilibre thermodynamique serait impossible; tous les théorèmes de Boltzmann, qui *postulent* la possibilité de cet équilibre seraient en défaut; la notion même d'entropie n'aurait plus aucun sens. Tant donc que cet indépendance n'est pas établie, il peut rester des doutes sur les raisonnements de M. Planck, qui reposent sur l'existence de l'entropie et les théorèmes de Boltzmann. Cela suffirait pour justifier le travail que j'ai entrepris ici.

5. — Cas des grands nombres.

Reprenons, dans le cas général (c'est-à-dire pour w quelconque), les équations (9) à (10) en classant dans une même classe, comme plus haut, les résonateurs de même période; nous pourrons écrire :

$$M' = \varphi_n(h'), \qquad M'' = K'' h''^{p-1}, \qquad Y' = \frac{h'}{n}, \qquad X'' = \frac{h''}{p};$$

et il viendra :

$$M = K'' \int_0^h \varphi_n(x)(h-x)^{p-1}\,dx; \tag{11}$$

$$MY = \frac{K''}{n} \int_0^h x\,\varphi_n(x)(h-x)^{p-1}\,dx; \qquad MX = \frac{K''}{p} \int_0^h \varphi_n(x)(h-x)^{p}\,dx. \tag{12}$$

Supposons que pour n très grand, $\varphi_n(x)$ puisse se mettre sous la forme suivante :

$$\varphi_n(x) = \mathrm{HNF}^n\left(\frac{x}{n}\right)\theta\left(\frac{x}{n}\right), \tag{13}$$

F et θ sont deux fonctions de $\frac{x}{n}$, la première élevée à la puissance n; N est un coefficient numérique ne dépendant que de n, H est une expression qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini; nous poserons $p = kn$, et nous supposerons que n et p sont très grands, mais que leur rapport k est fini.

Posons encore :

$$\frac{x}{n} = \omega, \qquad \frac{h}{n} = \beta, \qquad \Phi = F(\omega)(\beta - \omega)^k,$$

il viendra :

$$M = n^p K''N \int_0^\beta H\theta(\omega)\Phi^n(\omega)\frac{d\omega}{\beta-\omega},$$

$$MY = n^p K''N \int_0^\beta \omega H\theta(\omega)\Phi^n(\omega)\frac{d\omega}{\beta-\omega}, \qquad MX = \frac{n^p K''N}{k}\int_0^\beta H\theta(\omega)\Phi^n(\omega)\,d\omega.$$

Sous le signe $\int$ figure une fonction Φ élevée à une puissance très grande; l'élément de cette intégrale, qui correspond au maximum de Φ, aura donc une influence très prépondérante. Le rapport des intégrales $\frac{MY}{M}$, $\frac{MX}{M}$, pourra donc se calculer en tenant compte seulement de cet élément; on aura donc :

$$Y = \omega, \qquad X = \frac{\beta-\omega}{k},$$

ω *étant la valeur qui rend maximum* Φ; or cette valeur sera donnée par l'équation :

$$\frac{F'(\omega)}{F(\omega)} - \frac{k}{\beta-\omega} = 0,$$

ou bien :

(14) $$X = \frac{F(Y)}{F'(Y)}.$$

C'est là la loi de partition de l'énergie, c'est-à-dire la relation cherchée entre X et Y. *On voit qu'elle est indépendante du rapport* $\frac{n}{p}$.

Soit d'abord $w = \eta^m$, d'où :

$$\varphi_n = K x^{mn+n-1},$$

$$F = \left(\frac{x}{n}\right)^{m+1}, \qquad \theta = \left(\frac{x}{n}\right)^{-1}, \qquad H = 1, \qquad N = K n^{mn+n-1}, \qquad \frac{F'(Y)}{F(Y)} = \frac{m+1}{Y},$$

et enfin :

$$X = \frac{Y}{m+1}.$$

Soit maintenant $w = e^{\alpha\eta}$; il viendra :

$$\varphi_n(x)\,dx = \int e^{\alpha\Sigma\eta_i}\,d\tau,$$

l'intégrale étant étendue au domaine :

$$\eta_i > 0, \qquad x < \Sigma\eta_i < x + dx;$$

on en déduit :

$$\varphi_n(x)\,dx = e^{\gamma x}\int d\sigma = \frac{e^{\gamma x}x^{n-1}\,dx}{(n-1)!};$$

d'où, en faisant $h = x = n\omega$:

$$F(\omega) = e^{\gamma\omega}\omega, \qquad \theta = \frac{1}{\omega}, \qquad H = 1, \qquad \lambda = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad \frac{F'(Y)}{F(Y)} = \gamma + \frac{1}{\omega},$$

d'où enfin :

$$X = \frac{Y}{\gamma Y + 1}.$$

6. — La loi de Planck.

Dans l'hypothèse de M. Planck, l'énergie d'un résonateur ne peut être égale qu'à un multiple de ε, ε étant un quantum ; la probabilité est donc discontinue ; la fonction $w(\eta)$ est nulle toutes les fois que η n'est pas multiple de ε ; si η devient multiple de ε, la fonction w devient au contraire infinie et cela de telle façon que l'intégrale $\int_{\eta_0}^{\eta_1} w\,d\eta$ soit égale au nombre des multiples de ε compris entre η_0 et η_1 ; voyons quelles sont les conséquences de cette hypothèse et voyons en particulier ce que devient la fonction $\varphi_n(x)$; on a par définition :

$$\varphi_n(x)\,dx = \int w(\eta_1)\,w(\eta_2)\ldots w(\eta_n)\,d\sigma,$$

l'intégration devant être étendue au domaine :

$$\eta_i > 0, \qquad x \leqq \Sigma\eta \leqq x + dx.$$

Dans le cas qui nous occupe, notre intégrale doit être remplacée par une somme finie, puisque la fonction sous le signe $\int$ est discontinue, elle sera égale au nombre des points situés à l'intérieur du domaine et dont les n coordonnées η_i sont des multiples de ε (les limites du domaine sont supposées contenues dans le domaine).

Considérons l'intégrale $\int \varphi_n(x)\,dx$ étendue à un petit intervalle : de deux choses l'une, ou bien cet intervalle contiendra un multiple $\gamma\varepsilon$ de ε, ou il n'en contiendra aucun ; dans le second cas, l'intégrale sera nulle ; dans le premier, elle sera égale au nombre de partitions de l'entier γ en une somme de n entiers,

positifs ou nuls. Ce nombre de partitions est donné par la formule :

$$\frac{(\gamma+n-1)!}{\gamma!(n-1)!}.$$

Dans les formules (11) et (12); les intégrales doivent être remplacées par des sommes, et l'on aura par exemple :

$$M = K''\sum \frac{(\gamma+n-1)!}{\gamma!(n-1)!}(h-\gamma\varepsilon)^{p-1},$$

la sommation étant étendue à tous les entiers γ tels que $\gamma\varepsilon$ soit plus petit que h. Les formules qui donnent MY et MX se déduiraient de la précédente en multipliant sous le signe $\int$ par :

$$\frac{\gamma\varepsilon}{n}, \quad \frac{h-\gamma\varepsilon}{p}.$$

Nous allons maintenant remplacer les factorielles par leurs valeurs approchées :

$$(\gamma+n)! = (\gamma+n)^{\gamma+n} e^{-\gamma-n}\sqrt{2\pi(\gamma+n)};$$

$$\gamma! = \gamma^\gamma e^{-\gamma}\sqrt{2\pi\gamma}; \qquad n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n},$$

d'où :

$$\frac{(\gamma+n-1)!}{\gamma!(n-1)!} = \frac{(\gamma+n)!}{\gamma!\,n!}\,\frac{n}{\gamma+n} = \left(1+\frac{n}{\gamma}\right)^\gamma\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)^n\sqrt{\frac{\gamma+n}{2\pi\gamma n}}\,\frac{n}{\gamma+n}.$$

Nous avons d'ailleurs :

$$x = n\omega = \gamma\varepsilon,$$

d'où :

$$\frac{(\gamma+n-1)!}{\gamma!(n-1)!} = \left(1+\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^\gamma\left(1+\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^n\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\sqrt{\frac{\omega+\varepsilon}{\omega}\,\frac{\varepsilon}{\omega+\varepsilon}}.$$

Cela nous montre que l'on peut prendre :

$$F(\omega) = \left(1+\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^{\frac{\omega}{\varepsilon}}\left(1+\frac{\omega}{\varepsilon}\right), \qquad N = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, \qquad \theta(\omega) = \sqrt{\frac{\omega+\varepsilon}{\omega}\,\frac{\varepsilon}{\omega+\varepsilon}},$$

et le second membre se réduira comme il convient à $F^n\theta N$. Nos raisonnements s'appliqueront à nos sommes comme ils s'appliquaient à nos intégrales, les seuls éléments de la somme qui donneront un effet sensible sont ceux qui correspondent au maximum de F, et nous retomberons sur la formule (14).

Or on trouve aisément :

$$\frac{F'(Y)}{F(Y)} = \frac{1}{\varepsilon} \log\left(1 + \frac{\varepsilon}{Y}\right),$$

d'où :

$$\frac{\varepsilon}{X} = \log\left(1 + \frac{\varepsilon}{Y}\right), \qquad Y = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1},$$

ce qui est bien la loi de Planck.

7. — Deuxième méthode.

Cela ne nous donne toutefois pas entière satisfaction; nous ne savons pas encore, en effet : 1° si la loi de partition sera indépendante du rapport $\frac{n}{p}$, quelle que soit la fonction w; 2° si l'hypothèse du paragraphe précédent est la seule qui conduise à la loi de Planck. Pour répondre à ces deux questions, je vais employer un autre mode de calcul, fondé sur l'emploi de l'intégrale de Fourier. Posons :

(15) $$\Phi(\alpha) = \int_0^\infty w(\eta)\, e^{-\alpha\eta}\, d\eta.$$

Si la fonction $w(\eta)$ reste finie pour $\eta = \infty$, ou devient infinie à la façon d'un polynome entier en η, et si α a sa partie réelle positive, l'intégrale du second membre est finie. Si la formule restait vraie quand la partie réelle de α est nulle, nous pourrions écrire :

$$\Phi(i\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\eta)\, e^{-i\beta\eta}\, d\eta,$$

$\psi(\eta)$ étant une fonction qui est égale à w pour $\eta > 0$ et à 0 pour $\eta < 0$, et nous aurions ainsi l'intégrale de Fourier sous sa forme ordinaire et nous en déduirions :

$$w(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(i\beta)\, e^{i\beta\eta}\, d\beta.$$

Mais cela n'est possible que si la fonction $w(\eta)$ tend vers zéro pour $\eta = \infty$, dans le cas contraire, la formule de Fourier n'est pas établie. Elle reste vraie néanmoins, *mutatis mutandis*; donnons, en effet, à α une valeur complexe

$\gamma + i\beta$ où la partie réelle γ soit positive, nous aurons alors :

$$\Phi(\gamma + i\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\eta)\, e^{-\gamma\eta}\, e^{-i\beta\eta}\, d\eta.$$

Cette fois la quantité $\psi(\eta)\, e^{-\gamma\eta}$ tend vers zéro pour $\eta = \infty$, la formule de Fourier peut donc s'appliquer sans difficulté, ce qui donne :

$$w(\eta)\, e^{-\gamma\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\gamma + i\beta)\, e^{i\beta\eta}\, d\beta.$$

La partie réelle γ est regardée comme une constante, et β prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, donc le point α décrit une droite perpendiculaire à l'axe des quantités réelles ; on a d'ailleurs :

$$d\alpha = i\, d\beta,$$

d'où enfin :

(16) $$w(\eta) = \frac{1}{2i\pi} \int \Phi(\alpha)\, e^{\alpha\eta}\, d\alpha.$$

La formule (15) nous donne en l'élevant à la puissance n :

$$\Phi^n(\alpha) = \int w(\eta_1)\, w(\eta_2) \ldots w(\eta_n)\, e^{-\alpha\Sigma\eta}\, d\sigma,$$

en intégrant par rapport aux n variables depuis zéro jusqu'à l'infini ; étendons d'abord l'intégration au domaine :

$$\eta_i > 0, \qquad x < \Sigma\eta < x + dx,$$

nous trouverons :

$$\varphi_n(x)\, e^{-\alpha x}\, dx ;$$

il reste à intégrer pour toutes les valeurs de x depuis zéro jusqu'à l'infini, ce qui donne :

(15 *bis*) $$\Phi^n(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi_n(x)\, e^{-\alpha x}\, dx,$$

et en la traitant comme la formule (15), nous en déduirons :

(16 *bis*) $$\varphi_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int \Phi^n(\alpha)\, e^{\alpha x}\, d\alpha.$$

L'intégrale (16 *bis*), comme l'intégrale (16), doit être prise le long d'une droite perpendiculaire à l'axe des quantités réelles ; mais ce chemin d'intégration peut être déformé, pourvu que la partie réelle de α reste toujours posi-

tive et que sa partie imaginaire varie de $-\infty$ à $+\infty$, et, en effet, la fonction $\Phi(\alpha)$ est holomorphe dans tout le demi-plan où la partie réelle de α est positive.

Si nous substituons à $\varphi_n(x)$ sa valeur (16 *bis*) dans les équations (11) et (12), il viendra :

(11 *bis*) $$M = \frac{K''}{2i\pi} \iint \Phi^n(\alpha)\, e^{\alpha x}(h-x)^{p-1}\, dx\, d\alpha,$$

(12 *bis*) $$\begin{cases} MY = \dfrac{K''}{2ni\pi} \displaystyle\iint x\Phi^n(\alpha)\, e^{\alpha x}(h-x)^{p-1}\, dx\, d\alpha; \\ MX = \dfrac{K''}{2pi\pi} \displaystyle\iint \Phi^n(\alpha)\, e^{\alpha x}(h-x)^{p}\, dx\, d\alpha, \end{cases}$$

et en posant encore :

$$x = n\omega, \qquad h = n\beta, \qquad p = kn,$$

nous obtiendrons :

$$M = \frac{n^p K''}{2i\pi} \iint \Theta^n \frac{d\alpha\, d\omega}{\beta-\omega},$$

$$MY = \frac{n^p K''}{2i\pi} \iint \Theta^n \frac{\omega\, d\alpha\, d\omega}{\beta-\omega}, \qquad MX = \frac{n^p K''}{2i\pi} \iint \Theta^n \frac{\beta-\omega}{k} \frac{d\alpha\, d\omega}{\beta-\omega},$$

en posant :

$$\Theta = \Phi(\alpha)\, e^{\alpha\omega}(\beta-\omega)^k.$$

L'intégration est prise depuis zéro jusqu'à β par rapport à ω et par rapport à α tout le long d'une droite perpendiculaire à l'axe des quantités réelles.

Les seuls éléments des intégrales qu'il y ait à prendre en considération sont ceux qui rendent maximum la fonction Θ, qui est élevée à une très grande puissance, pourvu toutefois que le chemin d'intégration passe par cet élément; mais, comme nous l'avons remarqué plus haut, nous pouvons déformer ce chemin, et nous le ferons de façon que cette condition soit remplie. On aura donc :

$$Y = \omega, \qquad X = \frac{\beta-\omega}{k},$$

ω étant la valeur qui correspond à ce maximum. Pour exprimer que la fonction Θ passe par un maximum, nous exprimerons que ses dérivées logarithmiques partielles par rapport à α et à ω sont nulles, ce qui donne :

$$\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} + \omega = \alpha - \frac{k}{\beta-\omega} = 0.$$

On a donc :

(17) $$\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} = -Y, \qquad X = \frac{1}{\alpha}.$$

En éliminant α entre ces deux équations, on aura la relation cherchée entre X et Y. On voit que, quel que soit w, la loi de partition ne dépend pas du rapport des deux entiers n et p, pourvu que ces deux entiers soient très grands.

Pour $w = \eta^m$, on a :

$$\Phi = \frac{k}{\alpha^{m+1}}, \qquad Y = (m+1)X.$$

Pour $w = e^{\gamma\eta}$, on a :

$$\Phi = \frac{1}{\alpha - \gamma}, \qquad Y = \frac{X}{1 - \gamma X}.$$

On remarquera que dans ce dernier cas l'intégrale (15) n'est finie et, par conséquent, la fonction Φ définie que quand la partie réelle de α est plus grande que γ.

Passons à l'hypothèse de Planck; dans ce cas, l'intégrale (15) doit être remplacée par une somme; on ne doit conserver que les valeurs de η qui sont multiples de ε, soit $\eta = m\varepsilon$; l'intégrale $\int w\,d\eta$, généralement nulle, est égale à 1 si on l'étend à un petit intervalle comprenant une de ces valeurs exceptionnelles; la formule (15) devient donc :

$$\Phi = \Sigma\, e^{-m\alpha\varepsilon} = 1 + e^{-\alpha\varepsilon} + e^{-2\alpha\varepsilon} + \ldots,$$

c'est-à-dire :

$$\Phi = \frac{1}{1 - e^{-\alpha\varepsilon}};$$

on en déduit par la formule (17) :

$$Y = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1}.$$

C'est la formule de Planck.

8. — Nécessité de l'hypothèse de Planck.

Nous pouvons maintenant répondre à la question que nous nous étions posée au début.

Lorsque la loi qui lie Y à X est déterminée, la dérivée logarithmique $\frac{\Phi'}{\Phi}$ l'est également; il en est donc de même de la fonction Φ à un facteur

constant près et, par conséquent, [par la formule (16)] de w. *L'hypothèse des quanta est donc la seule qui conduise à la loi de Planck.*

Mais une loi expérimentale n'est jamais qu'approximative; ne pourrait-on imaginer des lois dont les différences avec celle de Planck seraient inférieures aux erreurs d'observation et qui conduiraient à une fonction w continue ? Si la fonction w est continue, je dis que Φ est nul pour $\alpha = \infty$, c'est-à-dire à basse température. En effet, w qui représente une probabilité est essentiellement positive, il en résulte que l'intégrale (15) décroît quand α croît, puisque tous ses éléments décroissent. Soit $\alpha = \alpha_0 + \alpha'$ et η_0 une valeur quelconque, il viendra :

$$\Phi = \int_0^{\eta_0} w\, e^{-\alpha\eta}\, d\eta + \int_{\eta_0}^{\infty} w\, e^{-\alpha\eta}\, d\eta.$$

La première intégrale est plus petite que $\int_0^{\eta_0} w\, d\eta$, la seconde est plus petite que :

$$e^{-\alpha'\eta_0} \int_{\eta_0}^{\infty} w\, e^{-\alpha_0\eta}\, d\eta < e^{-\alpha'\eta_0}\Phi(\alpha_0),$$

d'où :

$$\Phi(\alpha) < \int_0^{\eta_0} w\, d\eta + e^{-\alpha'\eta_0}\Phi(\alpha_0),$$

et comme α' tend vers l'infini en même temps que α, on aura :

$$\Phi(\infty) \leq \int_0^{\eta_0} w\, d\eta.$$

$\Phi(\infty)$ est la limite vers laquelle tend la fonction décroissante $\Phi(\alpha)$ quand α tend vers l'infini; si donc Φ n'est pas nul, c'est que l'intégrale du second membre de notre égalité ne tend pas vers zéro avec η_0. Cela n'est pas possible si la fonction w est continue ou même finie; il faudrait au contraire que cette fonction présentât, pour $\eta = 0$, précisément le même genre de discontinuité que dans l'hypothèse de Planck.

Si $\Phi(\infty) = 0$, cela veut dire que l'intégrale :

$$\int_\alpha^{\infty} \frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)}\, d\alpha$$

est infinie; la fonction sous le signe $\int$ peut devenir nulle pour $\alpha = \infty$, mais au plus comme $\frac{1}{\alpha}$; si elle devenait nulle comme $\frac{1}{\alpha^k}$, où $k > 1$, l'intégrale serait

finie. Pour aller plus loin, rappelons quelques-uns des principes de la théorie du rayonnement. D'après la loi de Wien, l'énergie du rayonnement noir, entre les longueurs d'onde λ et $\lambda + d\lambda$, est représentée par la formule :

$$u_\lambda\, d\lambda = \frac{d\lambda}{\lambda^5}\, F(\lambda T),$$

où T est la température absolue. D'autre part, si nous désignons par ν la fréquence et par $u_\nu\, d\nu$ l'énergie de rayonnement comprise entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$, M. Planck a démontré (Acad. de Berlin. *Sitzungsber.*, 1899, p. 461; *Physik. Zeitschrift*, 1900-1901) que l'on a :

(18) $$u_\nu\, d\nu = u_\lambda\, d\lambda = K\nu^2 Y\, d\nu,$$

où K est un coefficient numérique et où Y représente comme plus haut l'énergie moyenne des résonateurs de longueur d'onde λ. On en déduit :

$$Y = \frac{u_\nu}{K\nu^2} = \frac{u_\lambda}{K\nu^2}\frac{d\lambda}{d\nu} = K' u_\lambda \lambda^4 = \frac{K' F(\lambda T)}{\lambda}.$$

Or T n'est autre chose que X, en supposant les unités convenablement choisies et $X = \frac{1}{\alpha}$. On a donc, d'après (17) :

$$Y\, d\alpha = -d\log\Phi(\alpha), \qquad Y\, dX = X^2\, d\log\Phi,$$

ou

$$K' \frac{F(\lambda X)\, dX}{\lambda X^2} = d\log\Phi.$$

Dans cette relation, on suppose que λ est une constante; elle nous montre que le premier membre ne change pas quand on change X en μX et λ en $\frac{\lambda}{\mu}$, μ étant une constante quelconque : donc Φ est fonction de λX et l'on a en regardant maintenant λ et X comme variables :

$$K' \frac{F(\lambda X)(\lambda\, dX + X\, d\lambda)}{\lambda^2 X^2} = d\log\Phi,$$

ou si X est regardé comme constant :

$$K' \frac{F(\lambda X)\, d\lambda}{\lambda^2 X} = d\log\Phi,$$

ou enfin :

$$u_\lambda\, d\lambda = \frac{K'}{X}\,\frac{d\log\Phi}{\lambda^3}.$$

Le rayonnement total est alors :

$$\int_0^\infty w_\lambda \, d\lambda = \frac{X}{K'} \int \frac{d \log \Phi}{\lambda^5}.$$

Si la fonction w était continue, Φ s'annulerait et $\log \Phi$ deviendrait infini pour $\alpha = \infty$, c'est-à-dire pour $\lambda X = 0$; la fonction sous le signe $\int$ devient donc infinie pour $\lambda = 0$, et cela de telle façon que $\int d \log \Phi$ ou *a fortiori* que $\int \frac{d \log \Phi}{\lambda^3}$ devienne infinie.

Donc, quelle que soit la loi du rayonnement, si l'on suppose que le rayonnement total est fini, on sera conduit à une fonction w présentant des discontinuités analogues à celles que donne l'hypothèse des quanta.

Cela suppose toutefois l'exactitude de la formule (18), et sur ce point des doutes restent permis, puisque M. Planck n'a pu l'établir qu'en s'appuyant sur les principes de l'Électrodynamique classique, que sa théorie a précisément pour objet de remplacer.

9. — La deuxième théorie de M. Planck.

On sait que M. Planck a proposé une seconde théorie un peu différente de la première. Dans sa première théorie, les résonateurs ne peuvent émettre ni absorber d'énergie que par bonds ; dans la seconde, ils ne peuvent en émettre que par bonds, mais ils peuvent en absorber d'une manière continue. Dans cette théorie nouvelle, M. Planck pose :

$$Y = \frac{\varepsilon}{2} \frac{e^{\frac{\varepsilon}{X}} + 1}{e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1},$$

d'où :

$$\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{e^{\alpha\varepsilon} + 1}{e^{\alpha\varepsilon} - 1} = -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{e^{\alpha\varepsilon} - 1},$$

et :

$$\Phi(\alpha) = \frac{e^{-\alpha\frac{\varepsilon}{2}}}{1 - e^{-\alpha\varepsilon}} = e^{-\frac{\alpha\varepsilon}{2}} + e^{-\frac{3\alpha\varepsilon}{2}} + e^{-\frac{5\alpha\varepsilon}{2}} + \ldots.$$

En se reportant à la formule (15), on voit que cela veut dire que w est nul,

sauf pour des valeurs exceptionnelles pour lesquelles il est infini et que ces valeurs exceptionnelles sont les multiples impairs de $\frac{\varepsilon}{2}$. Ce n'est pas là l'hypothèse d'où M. Planck était parti; si, en effet, l'énergie d'un résonateur devait toujours être un multiple impair de $\frac{\varepsilon}{2}$, il serait impossible que ce résonateur absorbât de l'énergie d'une manière continue.

Il serait curieux de rechercher comment deux raisonnements en apparence identiques ont pu conduire dans un cas à un résultat exact, dans un autre à un résultat inexact. J'observerai seulement que dans son raisonnement M. Planck ne fait pas intervenir les échanges d'énergie par choc, mais seulement par émission et absorption.

10. — Justification des hypothèses restrictives.

Nous avons, pour simplifier et surtout pour fixer les idées, fait un certain nombre d'hypothèses assez particulières et un peu restrictives; on peut se demander si elles jouent un rôle essentiel, auquel cas leur caractère artificiel pourrait éveiller de la méfiance. Nous avons d'abord supposé que, dans le cas simple de deux résonateurs, le dernier multiplicateur $W(\xi, \eta)$ ne dépendait pas de ξ; nous avons vu ensuite que, sans faire aucune hypothèse restrictive, on devrait avoir dans tous les cas :

$$W(\xi, \eta) = w(\eta)w_1(\xi);$$

posons alors par une formule analogue à (15) :

$$\Phi_1(\alpha_1) = \int_0^\infty w_1(\xi)\, e^{-\alpha_1\xi}\, d\xi. \tag{15 ter}$$

Nous aurons alors (en posant $\Sigma\xi = y$, $\Sigma\eta = x$, $x + y = \Sigma\xi + \Sigma\eta = h$) :

$$M = \int \Phi^n(\alpha)\, \Phi_1^p(\alpha_1)\, e^{\alpha x}\, e^{\alpha_1(h-x)}\, dx\, d\alpha\, d\alpha_1.$$

Nous poserons alors :

$$x = n\omega, \qquad h - x = p\omega_1, \qquad \omega = \frac{h}{n} - k\omega_1,$$

et nous aurons à un *même* facteur constant près :

$$M = \int \Phi^n(\alpha)\, \Phi_1^p(\alpha_1)\, e^{n\alpha\omega}\, e^{p\alpha_1\omega_1}\, d\omega\, d\alpha\, d\alpha_1;$$

$$MY = \int \omega\Phi^n\Phi_1^p\, e^{n\alpha\omega}\, e^{p\alpha_1\omega_1}\, d\omega\, d\alpha\, d\alpha_1, \qquad MX = \int \omega_1\Phi^n\Phi_1^p\, e^{n\alpha\omega}\, e^{p\alpha_1\omega_1}\, d\omega\, d\alpha\, d\alpha_1.$$

Nous verrions alors que l'on a :

$$Y = \omega, \qquad X = \omega_1 = \frac{h}{p} - \frac{\omega}{k},$$

en donnant à ω, α et α_1 les valeurs qui rendent maximum l'expression :

$$\Phi(\alpha)\,\Phi_1^k(\alpha_1)\,e^{\alpha\omega}\,e^{k\alpha_1\omega_1}.$$

En égalant à zéro les dérivées logarithmiques de cette expression par rapport à α, α_1 et à ω (ω_1 étant supposée remplacée par sa valeur en fonction de ω), il vient :

$$\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} + \omega = \frac{\Phi'_1(\alpha_1)}{\Phi_1(\alpha_1)} + \omega_1 = \alpha - \alpha_1 = 0,$$

d'où enfin les formules :

(17 *bis*) $$\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)} = -Y, \qquad \frac{\Phi'_1(\alpha)}{\Phi_1(\alpha)} = -X,$$

qui peuvent remplacer les formules (17). D'où la loi suivante pour la partition de l'énergie.

A chacun des résonateurs est attachée une certaine fonction $\Phi(\alpha)$, et son énergie moyenne à une température donnée est représentée par $-\frac{\Phi'(\alpha)}{\Phi(\alpha)}$, α étant une fonction de la température, qui est la même pour tous les résonateurs; or l'expérience nous apprend qu'il y a des corps dont l'énergie est proportionnelle (nous dirons égale en choisissant convenablement les unités) à la température absolue; et que cela arrive en particulier pour les résonateurs à très longue période.

Dans les formules (17 *bis*), X et Y sont exprimées en fonction d'une variable auxiliaire α.

Supposons que nous connaissions par l'expérience la relation entre X et Y; nous pourrions choisir arbitrairement l'une des fonctions Φ ou Φ_1, c'est-à-dire l'une des relations (17 *bis*); l'autre s'en déduirait. Il est clair que ce choix pourrait toujours être fait de telle sorte que les intégrales :

$$\int^{\infty} X\,d\alpha, \qquad \int^{\infty} Y\,d\alpha,$$

soient infinies, c'est-à-dire de telle façon que w et w_1 soient des fonctions continues; mais ce serait renoncer à l'hypothèse $w_1 = 1$. Qu'en résulterait-il?

Les chocs entre les atomes (résonateurs à longue période) seraient alors

régis, au point de vue de la Mécanique statistique, par l'intégrale :

$$\int w_1(\xi_1)\, w_1(\xi_2) \ldots w_1(\xi_p)\, d\tau,$$

qui jouerait le rôle de l'intégrale M dans l'analyse précédente. On retrouverait pour ces atomes la loi d'équipartition; mais on devrait renoncer à la loi de Maxwell pour la distribution des vitesses; les chocs entre atomes ne pourraient plus se faire d'après les lois ordinaires de la Mécanique, et en particulier *d'après la loi de la conservation des quantités de mouvement*. Ces conséquences ne semblent guère admissibles et il paraît préférable de supposer $w_1 = 1$.

Les formules (17), appliquées à deux résonateurs à courte période montrent que la loi de partition ne sera pas altérée, si des chocs se produisent non pas entre un résonateur à longue et un autre à courte période, mais entre deux résonateurs de périodes différentes, mais courtes.

Au lieu des résonateurs simples de M. Planck, nous pourrons aussi avoir des systèmes plus compliqués; alors W, en supposant deux systèmes, pourra dépendre non seulement des énergies ξ et η, mais d'autres variables ξ', ξ'', ..., relatives au premier système, et d'autres encore η', η'', ..., relatives au second système. On devra avoir d'ailleurs pour les raisons exposées plus haut :

$$W = w(\eta, \eta', \eta'', \ldots)\, w_1(\xi, \xi', \xi'', \ldots).$$

L'ensemble des systèmes satisfait à l'intégrale des forces vives :

$$\Sigma\xi + \Sigma\eta = h.$$

Je n'en suppose pas d'autre; j'envisage alors l'intégrale :

$$u(\eta) = \int w(\eta, \eta', \eta'', \ldots)\, d\eta'\, d\eta'' \ldots$$

étendue à toutes les valeurs que peuvent prendre les variables η', η'', ...; alors $u(\eta)$ et la fonction analogue $u_1(\xi)$ formée avec w_1 joueront le même rôle que nous avions donné à $w(\eta)$ et $w_1(\xi)$, nous pourrons poser (s'il y a $n + p$ systèmes) :

$$U = u(\eta_1)\, u(\eta_2) \ldots u(\eta_n)\, u_1(\xi_1)\, u_1(\xi_2) \ldots u_1(\xi_p), \qquad M = \int U\, d\sigma\, d\tau;$$

$$MY = \int \eta_1 U\, d\sigma\, d\tau, \qquad MX = \int \xi_1 U\, d\sigma\, d\tau,$$

et notre analyse pourra se poursuivre jusqu'au bout sans changement.

Après avoir formé le dernier multiplicateur, il conviendrait de chercher des équations différentielles qui admettent ce dernier multiplicateur, ou de voir quelles sont les équations à sauts brusques qui pourraient jouer le rôle de ces équations différentielles quand le dernier multiplicateur w n'est pas continu. C'est là un problème qui ne serait sans doute pas sans difficulté. Je ne m'en occuperai pas pour le moment.

Rappelons en terminant que les échanges d'énergie peuvent se faire de deux manières : par le jeu du principe de Döppler-Fizeau et par les chocs. Dans cet article, nous n'avons étudié que la seconde manière. Je reviendrai sur la première dans un autre article; mais je dois faire observer que, *si l'on admet la possibilité des chocs*, les deux manières doivent conduire à la même loi de partition, sans quoi le second principe de la Thermodynamique serait en défaut. C'est ce qui m'a permis de me borner à l'étude d'un seul mode d'échange.

L'HYPOTHÈSE DES QUANTA

Revue scientifique, 4e série, t. 17, p. 225-232 (1912).

Introduction.

On peut se demander si la Mécanique n'est pas à la veille d'un nouveau bouleversement; récemment s'est réuni à Bruxelles un Congrès où étaient assemblés une vingtaine de physiciens de diverses nationalités, et, à chaque instant, on aurait pu les entendre parler de la Mécanique nouvelle qu'ils opposaient à la Mécanique ancienne; or qu'était-ce que cette Mécanique ancienne? Était-ce celle de Newton, celle qui régnait encore sans conteste à la fin du XIXe siècle? Non, c'était la Mécanique de Lorentz, celle du principe de relativité, celle qui il y a cinq ans à peine, paraissait le comble de la hardiesse.

Cela veut-il dire que cette Mécanique de Lorentz n'a eu qu'une fortune éphémère, qu'elle n'a été qu'un caprice de la mode et qu'on est sur le point de revenir aux anciens dieux qu'on avait imprudemment délaissés? Pas le moins du monde, les conquêtes d'hier ne sont pas compromises; en tous les points où elle s'écarte de celle de Newton, la Mécanique de Lorentz subsiste. On continue à croire qu'aucun corps mobile ne pourra jamais dépasser la vitesse de la lumière, que la masse d'un corps n'est pas une constante, mais qu'elle dépend de sa vitesse et de l'angle que fait cette vitesse avec la force qui agit sur lui, qu'aucune expérience ne pourra jamais décider si un corps est en repos ou en mouvement absolu, soit par rapport à l'espace absolu, soit même par rapport à l'éther.

Seulement à ces hardiesses, on veut en ajouter d'autres, et beaucoup plus déconcertantes. On ne se demande plus seulement si les équations différentielles de la Dynamique doivent être modifiées, mais si les lois du mouve-

ment pourront encore être exprimées par des équations différentielles. Et ce serait là la révolution la plus profonde que la Philosophie Naturelle ait subi depuis Newton. Le clair génie de Newton avait bien vu (ou cru voir, nous commençons à nous le demander) que l'état d'un système mobile, ou plus généralement celui de l'univers, ne pouvait dépendre que de son état immédiatement antérieur, que toutes les variations dans la nature doivent se faire d'une manière continue. Certes, ce n'était pas lui qui avait inventé cette idée; elle se trouvait dans la pensée des anciens et des scolastiques, qui proclamaient l'adage : *Natura non facit saltus;* mais elle y était étouffée par une foule de mauvaises herbes qui l'empêchaient de se développer et que les grands philosophes du XVII[e] siècle ont fini par élaguer.

Eh bien, c'est cette idée fondamentale qui est aujourd'hui en question; on se demande s'il ne faut pas introduire dans les lois naturelles des discontinuités, non pas apparentes, mais essentielles, et nous devons expliquer d'abord comment on a pu être conduit à une façon de voir aussi extraordinaire.

Thermodynamique et probabilité.

Reportons-nous à la théorie cinétique des gaz; les gaz sont formés de molécules qui circulent dans tous les sens avec de grandes vitesses; leurs trajectoires seraient rectilignes si de temps en temps elles ne se choquaient entre elles, ou si elles ne heurtaient les parois du vase. Les hasards de ces chocs finissent par établir une certaine distribution moyenne des vitesses, soit que l'on considère leur direction, soit que l'on envisage leur grandeur; cette distribution moyenne tend à se rétablir d'elle-même dès qu'elle est troublée; de sorte que, malgré la complication inextricable des mouvements, l'observateur qui ne peut voir que des moyennes n'aperçoit que des lois très simples qui sont l'effet du jeu des probabilités et des grands nombres. Il observe *l'équilibre statistique*. C'est ainsi, par exemple, que les vitesses seront également réparties dans toutes les directions, car si elles cessaient un instant de l'être, si elles tendaient à prendre une direction commune, les chocs au bout de très peu de temps la leur auraient fait perdre.

Le calcul conduit à une autre conséquence; la force vive que va prendre *en moyenne* chaque molécule est proportionnelle au nombre de ses degrés de liberté; je m'explique; un corps peut prendre un certain nombre de mouve-

ments très petits, différents; par exemple, un point matériel peut se mouvoir suivant les trois axes, il a trois degrés de liberté; une sphère peut subir une translation parallèle à chacun des trois axes, ou encore une rotation autour de ces trois axes, elle a six degrés de liberté. Or une molécule n'est pas un simple point matériel, elle est susceptible de déformation, elle aura donc plusieurs degrés de liberté; par exemple une molécule d'argon en aura 3, une molécule d'oxygène en aura 5. Alors, d'après la loi que nous énonçons et que l'on appelle la *loi d'équipartition*, si dans l'équilibre statistique une molécule d'argon possède à une certaine température la force vive 3, une molécule d'oxygène devra posséder la force vive 5; en d'autres termes, les chaleurs spécifiques moléculaires à volume constant de l'argon et de l'oxygène devront être entre elles comme 3 est à 5.

Et cette loi, convenablement interprétée, n'est pas seulement vraie des gaz; elle résulte en effet de la forme même que l'on a toujours attribuée aux équations de la Dynamique et qui est la forme de Hamilton. Si les lois générales de la Dynamique sont applicables aux liquides et aux solides, ces corps doivent obéir à la loi d'équipartition, *mutatis mutandis*.

Le principe de Carnot, ou second principe de la Thermodynamique, nous apprend que le monde tend vers un état final dont il ne pourra plus s'écarter; il nous apprend donc que l'équilibre statistique est possible; s'il ne l'était pas, on pourrait toujours trouver quelque artifice permettant de réaliser ce qu'on a appelé le mouvement perpétuel de seconde espèce, permettant par exemple de chauffer une machine à vapeur avec de la glace, en profitant de ce que cette glace, quelque froide qu'elle soit, n'est pourtant pas au zéro absolu et contient, par conséquent, une certaine quantité de chaleur. Si les lois de l'équilibre statistique n'étaient pas les mêmes quand on met en présence les corps A et B, ou bien les corps B et C, ou bien enfin les corps C et A, il serait aisé, en rapprochant tantôt deux de ces corps, tantôt deux autres, de changer sans cesse les conditions de cet équilibre; ces corps ne connaîtraient ainsi jamais le repos définitif, et il n'y aurait pas d'équilibre statistique véritable; le principe de Carnot serait faux.

Par quelle singulière coïncidence les conditions de cet équilibre sont-elles donc toujours les mêmes, quels que soient les corps mis en présence; les considérations qui précèdent nous le font comprendre, c'est parce que les lois générales de la Dynamique, exprimées par les équations différentielles de Hamilton, s'appliquent à tous les corps.

Ces conceptions avaient jusqu'ici toujours été confirmées par l'expérience, et les vérifications sont aujourd'hui assez nombreuses pour qu'on ne puisse les attribuer au hasard. Il faudra donc, si de nouvelles expériences mettent des exceptions en évidence, non pas abandonner la théorie, mais la modifier, l'élargir de façon à lui permettre d'embrasser les faits nouveaux.

Ce n'est pas que certaines objections ne se soient, dès le premier jour, présentées à tous les esprits. Les molécules, les atomes eux-mêmes, ne sont pas des points matériels; s'ils ont des dimensions, est-il permis de les assimiler à des corps *absolument* rigides; ou bien quelque simple que soit la molécule d'argon, ce ne pourra être un point mathématique, ce sera une sphère; pourquoi cette sphère ne pourra-t-elle pas tourner, et si elle tourne, cela fera 6 degrés de liberté au lieu de 3 [1]. A moins que l'on ne suppose que les chocs, capables de modifier la translation de la molécule, sont absolument sans influence sur sa rotation; qu'ils ne peuvent faire subir à cette molécule la moindre déformation, etc. D'ailleurs, chaque raie du spectre correspond à 1 degré de liberté. Inutile de dire que le spectre de l'oxygène comprend plus de cinq raies. Pourquoi certains degrés de liberté ne semblent-ils jouer aucun rôle; pourquoi sont-ils pour ainsi dire ankylosés tant que n'interviennent pas de mystérieuses circonstances?

La loi du rayonnement.

Les physiciens ne se préoccupèrent pas d'abord de ces difficultés, mais deux faits nouveaux vinrent changer la face des choses; le premier, c'est ce qu'on appelle la loi du *rayonnement noir*. Un corps complètement noir est celui dont le coefficient d'absorption est égal à 1; un pareil corps porté à l'incandescence émet de la lumière de toutes les longueurs d'onde, et l'intensité de cette lumière varie suivant une certaine loi en fonction de la température et de la longueur d'onde. L'observation directe n'est pas possible, parce qu'il n'y a pas de corps parfaitement noir, mais il y a un moyen de tourner la difficulté : on peut enfermer le corps incandescent dans une enceinte entièrement fermée; la lumière qu'il émet ne peut s'échapper et subit une série de réflexions

(1) Il ne servirait à rien de dire que le rapport des chaleurs spécifiques ne serait pas changé si l'on attribuait 6 degrés de liberté à l'argon et 10 à l'oxygène. C'est bien 3 degrés de liberté et non pas 6 qu'exige la théorie cinétique des gaz fondée sur le théorème du viriel.

jusqu'à ce qu'elle soit entièrement absorbée; quand l'état d'équilibre est atteint, la température de l'enceinte est devenue uniforme et l'enceinte est remplie d'un rayonnement qui suit la loi du rayonnement noir.

Il est clair que c'est un cas d'équilibre statistique, les échanges d'énergie s'étant poursuivis jusqu'à ce que chaque partie du système gagne en moyenne, dans un court espace de temps, exactement ce qu'elle perd. Mais c'est ici que la difficulté commence. Les molécules matérielles contenues dans l'enceinte sont en nombre fini, quoique très grand, et elles n'ont qu'un nombre fini de degrés de liberté; au contraire, l'éther en a une infinité, car il peut vibrer d'une infinité de manières correspondant aux diverses longueurs d'onde avec lesquelles l'enceinte est en résonance. Si la loi d'équipartition s'appliquait, l'éther devrait donc prendre toute l'énergie et ne rien laisser à la matière.

On pourrait restreindre la liberté de l'éther en lui imposant des liaisons, qui le rendraient par exemple incapable de transmettre les ondes trop courtes; on échapperait ainsi à la contradiction signalée, mais on arriverait encore à une loi, qui pour n'être plus absurde, serait encore contredite par l'expérience; c'est la loi de Rayleigh, d'après laquelle l'énergie rayonnée, pour une longueur donnée, serait proportionnelle à la température absolue et pour une température donnée, en raison inverse de la quatrième puissance de la longueur d'onde.

La loi véritable démontrée par l'expérience, est la loi de Planck; le rayonnement est beaucoup moindre pour les petites longueurs d'onde, ou pour les basses températures, que ne l'exige la loi de Rayleigh, conforme à la loi d'équipartition.

Le second fait résulte de la mesure des chaleurs spécifiques des corps solides aux très basses températures, dans l'air ou dans l'hydrogène liquides. Ces chaleurs spécifiques, loin d'être sensiblement constantes, diminuent rapidement comme pour s'annuler au zéro absolu. Tout se passe comme si ces molécules perdaient des degrés de liberté en se refroidissant, comme si quelques-unes de leurs articulations finissaient par geler.

Les quanta d'énergie.

L'explication de ces phénomènes doit être cherchée sans faire table rase des principes de la Thermodynamique; il faut avant tout admettre la possibilité de

l'équilibre statistique sans quoi il ne resterait rien du principe de Carnot; on ne peut admettre, dans la Thermodynamique, aucune brèche sans que tout s'écroule. M. Jeans a cherché à tout concilier en supposant que ce que nous observons n'est pas l'équilibre statistique définitif, mais une sorte d'équilibre provisoire. Il est difficile d'adopter cette manière de voir; sa théorie, ne prévoyant rien, n'est pas contredite par l'expérience, mais elle laisse sans explication toutes les lois connues qu'elle se borne à ne pas contredire et qui n'apparaissent plus que comme l'effet de je ne sais quel heureux hasard.

M. Planck a cherché une autre explication de la loi qu'il avait découverte; d'après lui, il s'agit d'un véritable équilibre, et, s'il n'est pas conforme à la loi d'équipartition, c'est que les équations de Hamilton ne sont pas exactes. Pour arriver à la loi expérimentale, il faut introduire dans ces équations une modification bien surprenante.

Comment devons-nous nous représenter un corps rayonnant? Nous savons qu'un résonateur de Hertz envoie dans l'éther des ondes hertziennes qui ne sont autre chose que des ondes lumineuses; un corps incandescent sera donc regardé comme contenant un très grand nombre de petits résonateurs. Quand le corps s'échauffe, ces résonateurs acquièrent de l'énergie, se mettent à vibrer et, par conséquent, à rayonner.

L'hypothèse de M. Planck consiste à supposer que chacun de ces résonateurs ne peut acquérir ou perdre de l'énergie que par *sauts brusques*, de telle façon que la provision d'énergie qu'il possède doit toujours être un multiple d'une même quantité constante appelée quantum, qu'elle doit se composer d'un nombre entier de *quanta*. Cette unité indivisible, ce quantum n'est pas le même pour tous les résonateurs, il est en raison inverse de la longueur d'onde, de sorte que les résonateurs à courte période ne peuvent avaler de l'énergie que par gros morceaux tandis que les résonateurs à longue période peuvent l'absorber ou la dégager par petites bouchées. Qu'en résulte-t-il? Il faut de grands efforts pour ébranler un résonateur à courte période, puisqu'il faut au moins une quantité d'énergie égale à son quantum qui est grand; il y a donc de grandes chances pour que ces résonateurs restent en repos, surtout si la température est basse, et c'est pour cette raison qu'il y aura relativement peu de lumière à courte longueur d'onde dans le rayonnement noir.

Cette hypothèse rend bien compte des faits pourvu que l'on admette que la relation entre l'énergie du résonateur et son rayonnement soit la même que dans les théories anciennes. Et c'est là une première difficulté; pourquoi

conserver cela après avoir tout détruit? Mais il faut bien conserver quelque chose, sans quoi on ne saurait sur quoi bâtir.

La diminution des chaleurs spécifiques s'explique de même; quand la température s'abaisse, un très grand nombre de vibrateurs tombent au-dessous de leur quantum, et, au lieu de vibrer peu, ne vibrent plus du tout, de sorte que l'energie totale diminue plus vite que dans les anciennes théories. Cela n'est qu'un aperçu qualitatif mais il ne faut pas donner un nombre exagéré de coups de pouce pour obtenir une concordance quantitative suffisante.

Discussion de l'hypothèse précédente.

L'équilibre statistique ne peut s'établir que s'il y a échange d'énergie entre les résonateurs, sans quoi chaque résonateur conserverait indéfiniment son énergie initiale qui est arbitraire, et la distribution finale n'obéirait à aucune loi. Cet échange ne pourrait se faire par rayonnement si les résonateurs étaient fixes et enfermés dans une enceinte fixe. En effet, chaque résonateur ne pourrait émettre ou absorber que de la lumière d'une longueur d'onde déterminée, il ne pourrait donc envoyer d'énergie qu'aux résonateurs de même période.

Il n'en est plus de même si l'on suppose que l'enceinte est déformable ou contient des corps mobiles. Et en effet la lumière en se réfléchissant sur un miroir mobile change de longueur d'onde en vertu du célèbre principe de Döppler-Fizeau. Et c'est là un premier mode d'échange par rayonnement.

Il y en a un second; les résonateurs peuvent réagir mécaniquement l'un sur l'autre, soit directement, soit plutôt par l'intermédiaire d'atomes mobiles et d'électrons qui circulent de l'un à l'autre et viennent les choquer. C'est l'échange par chocs. C'est celui que j'ai étudié récemment, retrouvant et confirmant les résultats de M. Planck.

Ainsi que je l'ai expliqué plus haut, il est nécessaire que tous les modes d'échange de l'énergie conduisent aux mêmes conditions d'équilibre statistique, sans quoi le principe de Carnot serait en défaut. Cela est nécessaire pour rendre compte de l'expérience, mais encore faut-il qu'on puisse donner de cette surprenante concordance une explication satisfaisante, qu'on ne soit pas forcé de l'attribuer à une sorte de hasard providentiel. Dans l'ancienne Mécanique, cette explication était toute trouvée, c'était l'universalité des équations de Hamilton; allons-nous retrouver ici quelque chose d'analogue?

Je n'ai pas encore terminé l'étude de l'échange par rayonnement, et je ne sais pas encore si l'on connaît toutes les conditions d'équilibre auxquelles conduit ce mode d'échange; je ne serais pas étonné qu'on en découvrît de nouvelles qui pourraient nous causer quelques embarras.

Pour le moment, il y en a une que nous ont révélée les travaux de M. Wien, c'est ce qu'on appelle la loi de Wien d'après laquelle le produit de l'énergie du rayonnement par la cinquième puissance de la longueur d'onde ne dépend plus que de la température multipliée par la longueur d'onde.

On voit tout de suite que, pour que cette loi de Wien soit compatible avec l'équilibre statistique dû à l'échange par chocs, il faut que, dans cet échange par chocs, l'énergie ne puisse varier que par quanta *inversement proportionnels à la longueur d'onde*. C'est là une propriété *mécanique* des résonateurs, qui est évidemment tout à fait indépendante du principe de Döppler-Fizeau et l'on ne comprend pas bien par suite de quelle mystérieuse harmonie préétablie, ces résonateurs ont été doués de la seule propriété mécanique qui pouvait convenir. Si l'équilibre statistique est invariable, ce n'est plus pour une raison unique et universelle, c'est par le concours de circonstances multiples et indépendantes.

Dans le mode d'exposition de M. Planck, cette dualité des modes d'échange n'apparaît pas, mais elle n'est que dissimulée et je croyais nécessaire d'attirer l'attention sur ce point.

Cette difficulté n'est pas la seule; un résonateur ne peut en céder à un autre que par multiples entiers de son quantum; celui-ci ne peut en recevoir que par multiples entiers de son quantum à lui; comme ces deux quanta seront généralement incommensurables, cela suffit pour exclure la possibilité d'un échange direct, mais l'échange peut se faire par l'intermédiaire des atomes, à supposer que l'énergie de ces atomes puisse varier d'une manière continue.

Ce n'est pas là le plus grave; les résonateurs doivent perdre ou gagner chaque quantum *brusquement* ou plutôt il faut qu'ils gagnent leur quantum tout entier ou qu'ils ne gagnent rien. Mais il leur faut cependant un certain temps pour le gagner ou pour le perdre; c'est ce qu'exige le phénomène des interférences. Deux quanta émis par un même résonateur à des instants différents ne sauraient interférer entre eux. Les deux émissions devraient, en effet, être regardées comme deux phénomènes indépendants et il n'y aurait aucune raison pour que l'intervalle de temps qui les sépare fût constant. Cela est même impossible; cet intervalle doit être plus grand si la lumière est faible

que si elle est intense; à moins que l'on ne suppose que l'intervalle est constant, que chaque émission peut consister en plusieurs quanta et que l'intensité dépend du nombre des quanta émis à la fois. Mais cela non plus ne peut aller; l'intervalle doit être petit par rapport à une période pour cadrer avec les observations d'interférence; la valeur du quantum résulte de la formule même de Planck; nous aurions donc un minimum de l'intensité possible de la lumière, et on a observé des émissions de lumière inférieures à ce minimum.

C'est donc bien chaque quantum qui interfère avec lui-même; il est donc nécessaire que, mis une fois sous la forme de vibrations lumineuses de l'éther, il se divise en plusieurs parties, que certaines parties soient en retard sur les autres de plusieurs longueurs d'onde et, par conséquent, qu'elles n'aient pas été émises en même temps.

Il semble qu'il y ait là une contradiction; peut-être n'est-elle pas insoluble. Imaginons un système formé d'un certain nombre d'excitateurs de Hertz, tous identiques; chacun d'eux est chargé par une source d'électricité et dès que sa charge a atteint une certaine valeur, l'étincelle éclate, l'émission commence et rien désormais ne peut plus l'arrêter, jusqu'à ce que l'excitateur soit entièrement déchargé; il faut donc qu'il perde son quantum tout entier, ou qu'il ne perde rien (le quantum, c'est ici la quantité d'énergie qui correspond au potentiel explosif). Mais ce quantum n'est pas perdu brusquement, chaque émission dure un certain temps et les ondes émises sont susceptibles d'interférences régulières.

M. Planck a supposé que la relation entre l'énergie d'un résonateur et son rayonnement était la même que dans l'Électrodynamique de Maxwell; on pourrait renoncer à cette hypothèse, et supposer que les chocs mécaniques se font d'après les lois anciennes. La répartition de l'énergie entre les résonateurs se ferait alors d'après la loi de l'équipartition, mais les résonateurs à courte période rayonneraient moins à énergie égale. On pourrait alors rendre compte de la loi du rayonnement, mais on n'expliquerait pas les anomalies des chaleurs spécifiques aux basses températures, à moins que l'on n'admette que l'échange par chocs n'est plus possible pour les solides très froids, et que leurs molécules n'échangent plus de chaleur que par rayonnement à petite distance.

On pourrait aller plus loin, supposer qu'il n'y a jamais de choc, que toutes les forces dites mécaniques sont d'origine électromagnétique; qu'elles sont dues à des actions à distance, explicables elles-mêmes par le rayonnement. Il faudrait alors ne laisser subsister que le mode d'échange par rayonnement et

par le jeu du principe de Döppler-Fizeau; peut-être alors serait-on conduit ainsi à des hypothèses très différentes de celle des quanta.

Les quanta d'action.

La nouvelle conception est séduisante par un certain côté; depuis quelque temps la tendance est à l'atomisme, la matière nous apparaît comme formée d'atomes indivisibles, l'électricité n'est plus continue, elle n'est plus divisible à l'infini, elle se résout en électrons tous de même charge, tous pareils entre eux; nous avons aussi depuis quelque temps le magnéton, ou atome de magnétisme. A ce compte, les quanta nous apparaissent comme des *atomes d'énergie*. Malheureusement la comparaison ne se poursuit pas jusqu'au bout. Un atome d'hydrogène, par exemple, est véritablement invariable, il conserve toujours la même masse, quel que soit le composé dans lequel il entre comme élément; les électrons conservent de même leur individualité à travers les vicissitudes les plus diverses; en est-il de même des soi-disant atomes d'energie? Nous avons par exemple trois quanta d'énergie sur un résonateur dont la longueur d'onde est 3; cette énergie passe sur un second résonateur dont la longueur d'onde est 5; elle représente alors non plus 3, mais 5 quanta, puisque le quantum du nouveau résonateur est plus petit et que, dans la transformation, le nombre des atomes et la grandeur de chacun d'eux a changé.

Voilà pourquoi la théorie n'est pas encore satisfaisante pour l'esprit; il faut d'ailleurs expliquer *pourquoi* le quantum d'un résonateur est en raison inverse de la longueur d'onde, et c'est ce qui a décidé M. Planck à modifier le mode d'exposition de ses idées; mais ici, je suis un peu embarrassé, je ne voudrais ni trahir M. Planck en dépassant sa pensée, en allant plus loin qu'il n'a voulu aller, ni ne pas montrer où il me semble qu'il nous conduit. Je vais donc d'abord traduire son texte aussi exactement que possible, tout en le résumant un peu. Je rappelle d'abord que l'étude de l'équilibre thermodynamique a été ramenée à une question de statistique et de probabilité. « La probabilité d'une variable continue s'obtient en envisageant des domaines élémentaires indépendants, d'égale probabilité.... Dans la Dynamique classique, on se sert, pour trouver ces domaines élémentaires, de ce théorème que deux états physiques dont l'un est l'effet nécessaire de l'autre sont également probables. Dans un système physique, si l'on représente par q une des coör-

données généralisées, par p le moment correspondant, d'après le théorème de Liouville, le domaine $\iint dp\,dq$ considéré à un instant quelconque est un invariant par rapport au temps, si q et p varient conformément aux équations de Hamilton. D'autre part, p et q peuvent, à un instant donné, prendre toutes les valeurs possibles, indépendamment l'un de l'autre. D'où il suit que le domaine élémentaire de probabilité est infiniment petit de la grandeur $dp\,dq$.... La nouvelle hypothèse doit avoir pour but de restreindre la variabilité de p et de q, de telle façon que ces variables ne varient plus que par sauts, ou qu'elles soient regardées comme liées en partie l'une à l'autre. On arrive ainsi à réduire le nombre des domaines élémentaires de probabilité de sorte que l'étendue de chacun d'eux se trouve augmentée. L'hypothèse des quanta d'action consiste à supposer que ces domaines, tous égaux entre eux, ne sont plus infiniment petits, mais finis et que l'on a pour chacun d'eux

$$\iint dp\,dq = h,$$

h étant une constante. »

Je crois nécessaire de compléter cette citation par quelques explications; je ne puis expliquer ici ce que c'est que l'action, les coordonnées généralisées et les moments, ni les diverses intégrales que M. Planck fait entrer en ligne; je me bornerai à dire que l'élément d'énergie est égal au produit de la fréquence par l'élément d'action; et, si le quantum d'énergie est proportionnel à la fréquence, comme nous l'avons dit, c'est parce que le quantum d'action est une constante uuiverselle, un véritable atome.

Mais il faut que je cherche à éclaircir ce que c'est que les domaines élémentaires de probabilité. Ces domaines sont indivisibles, c'est-à-dire que dès que nous savons que nous sommes dans un de ces domaines, tout est par là déterminé; sans quoi, si les événements qui doivent suivre n'étaient pas par ce fait entièrement connus, s'ils devaient différer selon que nous nous trouverions dans telle ou telle partie de ce domaine, c'est que ce domaine ne serait pas indivisible au point de vue de la probabilité puisque la probabilité de certains événements futurs ne serait pas la même dans ses diverses parties.

Cela revient à dire que tous les états du système qui correspondent à un même domaine ne peuvent être discernés entre eux, qu'ils constituent un seul et même état, et nous sommes ainsi conduit à l'énoncé suivant, plus précis que celui de M. Planck et qui n'est pas, je crois, contraire à sa pensée :

Un système physique n'est susceptible que d'un nombre fini d'états distincts; il saute d'un de ces états à l'autre sans passer par une série continue d'états intermédiaires.

Supposons pour simplifier que l'état du système dépende de trois paramètres seulement, de sorte que nous puissions le représenter géométriquement par un point de l'espace. L'ensemble des points représentatifs des divers états possibles ne sera pas alors l'espace tout entier, ou une région de cet espace ainsi qu'on le suppose d'ordinaire; ce seront un grand nombre de points isolés parsemant l'espace. Ces points il est vrai sont très serrés, ce qui nous donne l'illusion de la continuité.

Tous ces états doivent être regardés comme également probables. En effet, si nous admettons le déterminisme, à chacun de ces états doit nécessairement succéder un autre état, exactement aussi probable, puisqu'il est certain que le premier entraîne le second. On verrait ainsi de proche en proche que si nous partons d'un état initial, tous les états auxquels nous parviendrons un jour ou l'autre sont tous également probables; les autres ne doivent pas être regardés comme des états possibles.

Mais nos points représentatifs isolés ne doivent pas être distribués dans l'espace d'une façon quelconque; ils doivent l'être de telle sorte qu'en les observant avec nos sens grossiers, nous ayons pu croire aux lois communes de la Dynamique et, par exemple, à celles de Hamilton. Une comparaison, qui serre la réalité de beaucoup plus près qu'il ne paraît, m'aidera peut-être à me faire comprendre. Nous observons un liquide, et nos sens nous invitent d'abord à croire que c'est de la matière continue; une expérience plus précise nous montre que ce liquide est incompressible, de telle sorte que le volume d'une portion quelconque de matière demeure constant. Des raisons quelconques nous portent ensuite à penser que ce liquide est formé de molécules très petites et très nombreuses, mais discrètes; nous ne pourrons plus cependant imaginer une distribution de ces molécules en n'imposant aucune entrave à notre fantaisie; il faudra, à cause de l'incompressibilité, supposer que deux petits volumes égaux contiennent le même nombre de molécules. Pour la distribution des états possibles, M. Planck se trouve soumis à une restriction analogue, et c'est ce qu'il exprime par les équations que j'ai citées plus haut, et que je ne puis expliquer ici davantage.

On pourrait, il est vrai, imaginer des hypothèses mixtes; supposons encore

que le système physique ne dépende que de trois paramètres et que son état puisse être représenté par un point de l'espace. L'ensemble des points représentatifs des états possibles pourra n'être ni une région de l'espace, ni un essaim de points isolés; il pourra se composer d'un grand nombre de petites surfaces ou de petites courbes séparées les unes des autres; soit par exemple que l'un des points matériels du système puisse décrire seulement certaines trajectoires, mais les décrire d'une manière continue sauf quand il saute d'une trajectoire à l'autre sous l'influence des points voisins : cela pourra être le cas des résonateurs dont nous avons parlé plus haut; ou bien encore, l'état de la matière pondérable pourrait varier d'une manière discontinue, avec un nombre fini d'états possibles seulement, tandis que l'état de l'éther varierait d'une manière continue. Rien de tout cela ne serait incompatible avec la pensée de M. Planck.

Mais on préférera sans doute la première solution, la solution franche à toutes ces hypothèses bâtardes; seulement il faut se rendre compte des conséquences que cela entraîne; ce que nous avons dit devrait s'appliquer à un système isolé quelconque et même à l'univers. L'univers sauterait donc brusquement d'un état à l'autre; mais dans l'intervalle il demeurerait immobile, les divers instants pendant lesquels il resterait dans le même état ne pourraient plus être discernés l'un de l'autre; nous arriverions ainsi à la variation discontinue du temps, *à l'atome de temps*.

La nouvelle théorie de Planck.

Revenons à des problèmes moins généraux et plus précis, par exemple à la théorie du rayonnement. M. Planck a imaginé une modification à sa première théorie et je voudrais en dire quelques mots. D'après ses nouvelles idées, l'émission de la lumière se ferait brusquement par quanta, mais l'absorption serait continue. Il a voulu ainsi échapper à la difficulté suivante qui lui a, je ne sais pourquoi, paru plus embarrassante en ce qui concerne l'absorption. La lumière arrive sur chaque résonateur d'une façon continue, si elle ne peut être absorbée que quantum par quantum, il faut que l'énergie s'accumule dans une sorte d'antichambre du résonateur, jusqu'à ce qu'il y en ait assez pour entrer. Dans la seconde théorie, cette difficulté disparaît, mais il faut toujours une

salle d'attente pour l'énergie qui sort, puisque l'éther ne peut la transmettre que par fractions infiniment petites.

Dans la nouvelle théorie, les résonateurs conserveront un résidu d'énergie même au zéro absolu. Si nous adoptons la nouvelle manière de voir de M. Planck, il faut alors modifier la relation entre l'énergie du corps rayonnant et l'intensité de son rayonnement. Ce rayonnement n'est plus proportionnel à l'énergie, mais seulement à l'excès de cette énergie sur le résidu qui subsiste au zéro absolu.

Avouerai-je que je n'ai pas été entièrement satisfait de cette nouvelle hypothèse? M. Planck ne parle que de l'émission et de l'absorption, et en parle comme si le résonateur était fixe; il n'est question ni de l'échange d'énergie par chocs, ni du principe de Döppler-Fizeau; dans ces conditions, il ne peut donc y avoir de tendance vers un état final, c'est ce que j'ai dit plus haut; la démonstration par laquelle on cherche à nous faire connaître cet état final n'est donc qu'un trompe-l'œil. L'auteur ne dit pas si les échanges par chocs sont continus comme l'absorption, ou discontinus comme l'émission, et quand on veut appliquer la théorie générale des échanges par chocs, on ne retrouve plus les résultats de M. Planck. Il convient donc de s'en tenir à ses premières idées.

Les idées de M. Sommerfeld.

M. Sommerfeld a proposé une théorie qu'il veut rattacher à celle de M. Planck, bien que le seul lien qu'il y ait entre elles, c'est que la lettre h figure dans les deux formules, et qu'on a donné le même nom de quantum d'action aux deux objets très différents que cette lettre représente.

Le choc des électrons ne suivrait pas du tout les mêmes lois que celui des corps complexes que nous connaissons et qui sont accessibles à l'expérience. Quand un électron rencontrerait un obstacle, il s'arrêterait d'autant plus vite que sa vitesse serait plus grande (si cette loi était applicable aux trains de chemin de fer, le problème du freinage se présenterait sous un jour nouveau). Et cela s'applique à la production des rayons X. Les rayons cathodiques sont des électrons en mouvement; ces électrons s'arrêtent en rencontrant l'anticathode; cet arrêt brusque ébranle l'éther dont les vibrations produisent les rayons X. La théorie de M. Sommerfeld explique pourquoi les rayons X sont

d'autant plus pénétrant et plus « durs » que la vitesse des rayons cathodiques était plus grande. Plus cette vitesse est grande, en effet, plus l'arrêt est brusque, plus, par conséquent, la perturbation de l'éther est intense et de courte durée.

Conclusions.

On voit quel est l'état de la question; les anciennes théories, qui semblaient rendre compte jusqu'ici de tous les phénomènes connus, se sont heurtées à un obstacle inattendu. Il a semblé qu'une modification s'imposait. Une hypothèse s'est d'abord présentée à l'esprit de M. Planck, mais tellement étrange qu'on était tenté de chercher tous les moyens de s'en affranchir; ces moyens, on les a vainement cherchés jusqu'ici. Et cela n'empêche pas que la nouvelle théorie soulève une foule de difficultés, dont beaucoup sont réelles et ne sont pas de simples illusions dues à la paresse de notre esprit, qui répugne à changer ses habitudes.

Il est impossible, pour le moment, de prévoir quelle sera l'issue finale; trouvera-t-on une explication entièrement différente? Ou bien, au contraire, les partisans de la nouvelle théorie parviendront-ils à écarter les obstacles qui nous empêchent de l'adopter sans réserve? La discontinuité va-t-elle régner sur l'univers physique et son triomphe est-il définitif? Ou bien reconnaîtra-t-on que cette discontinuité n'est qu'apparente et dissimule une série de processus continus. Le premier qui a vu un choc a cru observer un phénomène discontinu, et nous savons aujourd'hui qu'il n'a vu que l'effet de changements de vitesses très rapides, mais continus. Chercher dès aujourd'hui à donner un avis sur ces questions, ce serait perdre son encre.

LES RAPPORTS DE LA MATIÈRE
ET
DE L'ÉTHER

Conférence faite à la Société française de Physique, le 11 avril 1912.
Journal de Physique théorique et appliquée, 5e série, t. 2, p. 347-360 (1912).

Lorsque M. Abraham est venu me demander de clore la série des Conférences organisées par la Société française de Physique, j'ai d'abord été sur le point de refuser; il me semblait que chaque sujet avait été entièrement traité et que je ne pourrais rien ajouter à ce qui avait été si bien dit. Je ne pouvais que chercher à résumer l'impression qui semble se dégager de cet ensemble de travaux, et cette impression est tellement nette que chacun de vous a dû l'éprouver tout aussi bien que moi et que je ne saurais lui donner aucune clarté nouvelle en m'efforçant de l'exprimer par des phrases. Mais M. Abraham a insisté avec tant de bonne grâce que j'ai fini par me résigner à des inconvénients inévitables dont le plus grand est de redire ce que chacun de vous a depuis longtemps pensé et dont le moindre est de traverser une foule de sujets divers sans avoir le temps de m'y arrêter.

Une première réflexion a dû frapper tous les auditeurs ; les anciennes hypothèses mécanistes et atomistes ont pris dans ces derniers temps assez de consistance pour cesser presque de nous apparaître comme des hypothèses ; les atomes ne sont plus une fiction commode; il nous semble pour ainsi dire que nous les voyons, depuis que nous savons les compter. Une hypothèse prend du corps et gagne en vraisemblance quand elle explique de nouveaux faits; mais cela peut arriver de bien des façons; le plus souvent elle doit s'élargir pour rendre compte des faits nouveaux; mais tantôt elle perd en précision en s'élar-

gissant, tantôt il est nécessaire de greffer sur elle une hypothèse accessoire qui s'y adapte d'une façon plausible, qui ne jure pas trop avec le porte-greffe, mais qui n'en est pas moins quelque chose d'étranger, d'imaginé tout exprès en vue du but à atteindre, qui est en un mot une sorte de coup de pouce; dans ce cas on ne peut pas dire que l'expérience a confirmé l'hypothèse primitive, mais tout au plus qu'elle ne l'a pas contredite. Ou bien encore, il y a entre les faits nouveaux et les faits anciens, pour lesquels l'hypothèse avait été primitivement conçue une connexion intime et de telle nature que toute hypothèse qui rend compte des uns doit par cela même rendre compte des autres, de telle sorte que les faits vérifiés ne sont nouveaux qu'en apparence.

Il n'en est plus de même quand l'expérience nous révèle une coïncidence que l'on aurait pu prévoir et qui ne saurait être due au hasard et surtout quand il s'agit d'une coïncidence numérique. Or ce sont des coïncidences de ce genre qui sont venues dans ces derniers temps confirmer les idées atomistes.

La théorie cinétique des gaz a reçu pour ainsi dire des étais inattendus. De nouvelles venues se sont exactement calquées sur elles; ce sont d'une part la théorie des solutions, et d'autre part la théorie électronique des métaux. Les molécules des corps dissous, de même que les électrons libres auxquels les métaux doivent leur conductibilité électrique, se comportent comme les molécules gazeuses dans les enceintes où elles sont enfermées. Le parallélisme est parfait et on peut le poursuivre jusqu'à des coïncidences numériques. Par là ce qui était douteux devient probable; chacune de ces trois théories, si elle était isolée, ne nous apparaîtrait que comme une hypothèse ingénieuse, à laquelle on pourrait substituer d'autres explications à peu près aussi vraisemblables; mais, comme dans chacun des trois cas, il faudrait une explication différente, les coïncidences constatées ne pourraient plus être attribuées qu'au hasard, ce qui est inadmissible, tandis que les trois théories cinétiques rendent ces coïncidences nécessaires. Et puis la théorie des solutions nous fait passer tout naturellement à celle du mouvement brownien où il est impossible de regarder l'agitation thermique comme une fiction de l'esprit, puisqu'on la voit directement sous le microscope.

Les brillantes déterminations du nombre des atomes faites par M. Perrin ont complété ce triomphe de l'atomisme. Ce qui entraîne notre conviction, ce sont les multiples concordances entre des résultats obtenus par des procédés entièrement différents. Il n'y a pas très longtemps, on se serait estimé heureux pourvu que les nombres trouvés eussent le même nombre de chiffres; on n'au-

rait même pas exigé que le premier chiffre significatif fût le même; ce premier chiffre est aujourd'hui acquis ; et ce qui est remarquable c'est qu'on s'est adressé aux propriétés les plus diverses de l'atome. Dans les procédés dérivant du mouvement brownien, ou dans ceux où l'on invoque la loi du rayonnement, ce ne sont pas les atomes que l'on a comptés directement, ce sont les degrés de liberté; dans celui où l'on se sert du bleu du ciel, ce ne sont plus les propriétés mécaniques des atomes qui entrent en jeu, ils sont regardés comme des causes de discontinuité optique; enfin, quand on se sert du radium, ce que l'on compte, ce sont les émissions de projectiles. C'est à tel point que, s'il y avait eu des discordances, on n'aurait pas été embarrassé pour les expliquer, mais heureusement il n'y en a pas eu.

L'atome du chimiste est maintenant une réalité; mais cela ne veut pas dire que nous sommes près de toucher les éléments ultimes des choses. Quand Démocrite a inventé les atomes, il les considérait comme des éléments absolument indivisibles et au delà desquels il n'y a plus rien à chercher. C'est cela que cela veut dire en grec; et c'est d'ailleurs pour cela qu'il les avait inventés; derrière l'atome, il ne voulait plus de mystère. L'atome du chimiste ne lui aurait donc pas donné satisfaction, car cet atome n'est nullement indivisible, il n'est pas un véritable élément, il n'est pas exempt de mystère ; cet atome est un monde. Démocrite aurait estimé qu'après nous être donné tant de mal pour le trouver, nous ne sommes pas plus avancés qu'au début ; ces philosophes ne sont jamais contents.

Car, et c'est là la seconde réflexion qui s'impose à nous : chaque nouvelle découverte de la Physique nous révèle une nouvelle complication de l'atome. Et d'abord les corps que l'on croyait simples, et qui, à bien des égards, se comportent tout à fait comme des corps simples, sont susceptibles de se décomposer en corps plus simples encore. L'atome se désagrège en atomes plus petits. Ce qu'on appelle la radioactivité n'est qu'une perpétuelle désagrégation de l'atome. C'est ce qu'on a appelé quelquefois la transmutation des éléments, ce qui n'est pas tout à fait exact, puisqu'un élément ne se transforme pas en réalité en un autre, mais se décompose en plusieurs autres. Les produits de cette décomposition sont encore des atomes chimiques, analogues à bien des égards aux atomes complexes qui leur ont donné naissance en se désagrégeant, de sorte que le phénomène pourrait s'exprimer comme les réactions les plus banales, par une équation chimique, susceptible d'être acceptée sans trop de souffrances par le chimiste le plus conservateur.

Ce n'est pas tout, dans l'atome nous trouvons bien d'autres choses : nous y trouvons d'abord des électrons ; chaque atome nous apparaît alors comme une sorte de système solaire, où de petits électrons négatifs jouant le rôle de planètes gravitent autour d'un gros électron positif qui joue le rôle de soleil central. C'est l'attraction mutuelle de ces électricités de nom contraire qui maintient la cohésion du système et qui en fait un tout; c'est elle qui règle les périodes des planètes, et ce sont ces périodes qui déterminent la longueur d'onde de la lumière émise par l'atome; c'est à la self-induction des courants de convection produits par les mouvements de ces électrons que l'atome qui en est formé doit son inertie apparente et ce que nous appelons sa masse. Outre ces électrons captifs, il y a des électrons libres, ceux qui obéissent aux mêmes lois cinétiques que les molécules gazeuses, ceux qui rendent les métaux conducteurs. Ceux-là sont comparables aux comètes qui circulent d'un système stellaire à l'autre et qui établissent entre ces systèmes éloignés comme un libre échange d'énergie.

Mais nous ne sommes pas au bout : après les électrons ou atomes d'électricité, voici venir les magnétons ou atomes de magnétisme et qui nous arrivent aujourd'hui par deux voies différentes, par l'étude des corps magnétiques et par l'étude du spectre des corps simples. Je n'ai pas à vous rappeler ici la belle conférence de M. Weiss et les étonnants rapports de commensurabilité que ces expériences ont mis en évidence d'une façon si inattendue. Là aussi il y a des rapports numériques que l'on ne saurait attribuer au hasard et dont il faut chercher l'explication.

En même temps il faut expliquer les lois si curieuses de la répartition des raies dans le spectre. D'après les travaux de Balmer, de Runge, de Kaiser, de Rydberg, ces raies se répartissent en séries et dans chaque série obéissent à des lois simples. La première pensée est de rapprocher ces lois de celles des harmoniques. De même qu'une corde vibrante a une infinité de degrés de liberté, ce qui lui permet de donner une infinité de sons dont les fréquences sont les multiples de la fréquence fondamentale; de même qu'un corps sonore de forme complexe donne aussi des harmoniques, dont les lois sont analogues, quoique beaucoup moins simples, de même qu'un résonateur de Hertz est susceptible d'une infinité de périodes différentes, l'atome ne pourrait-il donner, pour des raisons identiques, une infinité de lumières différentes. Vous savez que cette idée si simple a fait faillite, parce que, d'après les lois spectroscopiques, c'est la fréquence et non son carré dont l'expression est simple ; parce

que la fréquence ne devient pas infinie pour les harmoniques de rang infiniment élevé. L'idée doit être modifiée ou elle doit être abandonnée. Jusqu'ici elle a résisté à toutes les tentatives, elle a refusé de s'adapter; c'est ce qui a conduit M Ritz à l'abandonner. Il se représente alors l'atome vibrant comme formé d'un électron tournant et de plusieurs magnétons placés bout à bout. Ce n'est plus l'attraction électrostatique mutuelle des électrons qui règle les longueurs d'onde, c'est le champ magnétique créé par ces magnétons.

On a quelque peine à accepter cette conception, qui a je ne sais quoi d'artificiel; mais il faut bien qu'on s'y résigne, au moins provisoirement, puisque jusqu'ici on n'a rien trouvé d'autre et que cependant on a bien cherché. Pourquoi des atomes d'hydrogène peuvent-ils donner plusieurs raies? Ce n'est pas parce que chacun d'eux pourrait donner toutes les raies du spectre de l'hydrogène, et qu'il donne effectivement l'une ou l'autre suivant les circonstances initiales du mouvement; c'est parce qu'il y a plusieurs espèces d'atomes d'hydrogène, différant entre eux par le nombre des magnétons qui y sont alignés, et que chacune de ces espèces d'atomes donne une raie différente; on se demande si ces atomes différents peuvent se transformer les uns dans les autres et comment. Comment un atome peut-il perdre des magnétons (et c'est ce qui semble arriver quand on passe d'une variété allotropique du fer à une autre)? Est-ce que le magnéton peut sortir de l'atome ou bien une partie d'entre eux peut-elle quitter l'alignement pour se disposer irrégulièrement?

Cette disposition des magnétons bout à bout est aussi un trait singulier de l'hypothèse de Ritz ; les idées de M. Weiss doivent toutefois nous le faire paraître moins étrange. Il faut bien que les magnétons se disposent sinon bout à bout, au moins parallèlement, puisqu'ils s'ajoutent arithmétiquement ou au moins algébriquement, et non pas géométriquement.

Qu'est-ce maintenant qu'un magnéton? Est-ce quelque chose de simple? Non, si l'on ne veut pas renoncer à l'hypothèse des courants particulaires d'Ampère ; un magnéton est alors un tourbillon d'électrons et voilà notre atome qui se complique de plus en plus.

Toutefois ce qui, mieux que toute autre chose, nous fait mesurer la complexité de l'atome, c'est la réflexion que faisait M. Debierne à la fin de sa conférence. Il s'agit d'expliquer la loi de la transformation radioactive ; cette loi est très simple, elle est exponentielle ; mais, si l'on réfléchit à sa forme, on voit que c'est une loi statistique; on y reconnaît la marque du hasard. Or le hasard n'est pas dû ici à la rencontre fortuite d'autres atomes et d'autres agents

extérieurs. C'est à l'intérieur même de l'atome que se trouvent les causes de sa transformation, je veux dire la cause occasionnelle aussi bien que la cause profonde. Sans cela nous verrions les circonstances externes, la température par exemple, exercer une influence sur le coefficient du temps dans l'exposant; or ce coefficient est remarquablement constant, et Curie propose de s'en servir pour la mesure du temps absolu.

Le hasard qui préside à ces transformations est donc un hasard interne; c'est-à-dire que l'atome du corps radioactif est un monde et un monde soumis au hasard; mais qu'on y prenne garde, qui dit hasard, dit grands nombres; un monde formé de peu d'éléments obéira à des lois plus ou moins compliquées, mais qui ne seront pas des lois statistiques. Il faut donc que l'atome soit un monde complexe; il est vrai que c'est un monde fermé (ou tout au moins presque fermé), il est à l'abri des perturbations extérieures que nous pouvons provoquer; puisqu'il y a une statistique et, par conséquent, une thermodynamique interne de l'atome, nous pouvons parler de la température interne de cet atome; eh bien! elle n'a aucune tendance à se mettre en équilibre avec la température extérieure, comme si l'atome était enfermé dans une enveloppe parfaitement adiathermane. Et c'est précisément parce qu'il est fermé, parce que ses fonctions sont nettement tracées, gardées par des douaniers sévères, que l'atome est un individu.

Au premier abord, cette complexité de l'atome n'a rien de choquant pour l'esprit; il semble qu'elle ne doive nous causer aucun embarras. Mais un peu de réflexion ne tarde pas à nous montrer les difficultés qui nous échappaient d'abord. Ce qu'on a compté, en comptant les atomes, ce sont les degrés de liberté; nous avons implicitement supposé que chaque atome n'en a que trois; c'est ce qui nous rend compte des chaleurs spécifiques observées; mais chaque complication nouvelle devrait introduire un degré de liberté nouveau, et alors nous sommes loin de compte. Cette difficulté n'a pas échappé aux créateurs de la théorie de l'équipartition de l'énergie; ils s'étonnaient déjà du nombre des raies du spectre; mais, ne trouvant aucun moyen d'en sortir, ils ont eu la hardiesse de passer outre.

Ce qui semble l'explication naturelle, c'est justement que l'atome est un monde complexe, mais un monde fermé; les perturbations extérieures n'ont aucune répercussion sur ce qui se passe en dedans, et ce qui se passe en dedans n'agit pas sur le dehors; cela ne saurait être tout à fait vrai, sans cela nous ignorerions toujours ce qui se passe en dedans, et l'atome nous apparaî-

trait comme un simple point matériel; ce qui est vrai, c'est qu'on ne peut voir le dedans que par une toute petite fenêtre, qu'il n'y a pas pratiquement d'échange d'énergies entre l'extérieur et l'intérieur et par conséquent pas de tendance à l'équipartition de l'énergie entre les deux mondes. La température interne, comme je disais tout à l'heure, ne tend pas à se mettre en équilibre avec la température extérieure, et c'est pour cela que la chaleur spécifique est la même que si toute cette complexité interne n'existait pas. Supposons un corps complexe formé d'une sphère creuse dont la paroi interne serait absolument imperméable à la chaleur, et au dedans une foule de corps divers, la chaleur spécifique observée de ce corps complexe sera celle de la sphère, comme si tous les corps qui sont enfermés dedans n'existaient pas.

La porte qui ferme le monde intérieur de l'atome s'entr'ouvre pourtant de temps en temps; c'est ce qui arrive quand, par l'émission d'une particule d'hélium, l'atome se dégrade et descend d'un rang dans la hiérarchie radioactive. Que se passe-t-il alors? En quoi cette décomposition diffère-t-elle des décompositions chimiques ordinaires? En quoi l'atome d'uranium, formé d'hélium et d'autre chose, a-t-il plus de titres au nom d'atome que la demi-molécule de cyanogène, par exemple, qui se comporte à tant d'égards comme celle d'un corps simple, et qui est formée de carbone et d'azote? C'est sans doute que la chaleur atomique de l'uranium obéirait (je ne sais si elle a été mesurée) à la loi de Dulong et Petit et qu'elle serait bien celle d'un atome simple; elle devrait doubler alors au moment de l'émission de la particule d'hélium et quand l'atome primordial se décompose en deux atomes secondaires. Par cette décomposition, l'atome acquerrait de nouveaux degrés de liberté susceptibles d'agir sur le monde extérieur, et ces nouveaux degrés de liberté se traduiraient par un accroissement de chaleur spécifique. Quelle serait la conséquence de cette différence entre la chaleur spécifique totale des composants et celle des composés? C'est que la chaleur dégagée par cette décomposition devrait varier rapidement avec la température; de sorte que la formation des molécules radioactives, très fortement endothermique à la température ordinaire, deviendrait exothermique à température élevée. On s'expliquerait mieux ainsi comment les composés radioactifs ont pu se former, ce qui ne laissait pas d'être un peu mystérieux.

Quoi qu'il en soit, cette conception de ces petits mondes fermés, ou seulement entr'ouverts, ne suffit pas pour résoudre le problème. Il faudrait que l'équipartition de l'énergie régnât sans contestation en dehors de ces mondes

fermés, sauf au moment où l'une des portes s'entr'ouvrirait, et ce n'est pas ce qui arrive.

La chaleur spécifique des corps solides diminue rapidement quand la température s'abaisse, comme si quelques-uns de leurs degrés de liberté s'ankylosaient successivement, se gelaient pour ainsi dire, ou, si vous aimez mieux, perdaient tout contact avec l'extérieur et se retiraient à leur tour derrière je ne sais quelle enceinte dans je ne sais quel monde fermé.

D'autre part, la loi du rayonnement noir n'est pas celle qu'exigerait la théorie de l'équipartition.

La loi qui s'adapterait à cette théorie serait celle de Rayleigh, et cette loi, qui d'ailleurs impliquerait contradiction, puisqu'elle conduirait à un rayonnement total infini, est absolument contredite par l'expérience. Il y a dans l'émission des corps noirs beaucoup moins de lumière à courte longueur d'onde que ne l'exigerait l'hypothèse de l'équipartition.

C'est pour cela que M. Planck a imaginé sa théorie des Quanta, d'après laquelle les échanges d'énergie entre la matière et l'éther, ou bien entre la matière ordinaire et les petits résonateurs dont les vibrations engendrent la lumière des corps incandescents, ne pourraient se faire que par sauts brusques; un de ces résonateurs ne pourrait acquérir d'énergie ou en perdre d'une manière continue; il ne pourrait acquérir une fraction de quantum, il acquerrait un quantum tout entier ou rien du tout.

Pourquoi alors la chaleur spécifique d'un solide diminue-t-elle à basse température, pourquoi certains de ses degrés de liberté semblent-ils ne pas jouer? C'est parce que la provision d'énergie qui leur est offerte à basse température n'est pas suffisante pour leur fournir un quantum à chacun; certains d'entre eux n'auraient droit qu'à une fraction de quantum; mais, comme ils veulent tout ou rien, ils n'ont rien et restent ankylosés.

De même dans le rayonnement, certains résonateurs, qui ne peuvent avoir leur quantum entier, n'ont rien et restent immobiles; de sorte qu'il y a beaucoup moins de lumière rayonnée à basse température qu'il n'y en aurait sans cette circonstance; et comme le quantum exigé est d'autant plus grand que la longueur d'onde est plus petite, ce sont surtout les résonateurs à courte longueur d'onde qui demeurent muets, de sorte que la proportion de lumière à courte longueur d'onde est beaucoup plus petite que ne l'exigerait la loi de Rayleigh.

Déclarer qu'une semblable théorie soulève bien des difficultés, ce serait une

grande naïveté; quand on émet une idée aussi hardie, on s'attend bien à rencontrer des difficultés, on sait qu'on bouleverse toutes les opinions reçues et on ne s'étonne plus d'aucun obstacle, on s'étonnerait au contraire de n'en pas trouver devant soi. Aussi ces difficultés ne semblent-elles pas des objections valables.

J'aurai cependant le courage de vous en signaler quelques-unes et je ne choisirai pas les plus grosses, les plus évidentes, celles qui se présentent à tous les esprits, et en effet cela est bien inutile, puisque tout le monde y pense du premier coup; je veux vous dire simplement par quelle série d'états d'âmes j'ai successivement passé.

Je me suis demandé d'abord quelle était la valeur des démonstrations proposées; j'ai vu qu'on évaluait la probabilité des diverses répartitions de l'énergie, en les énumérant simplement, puisque, grâce à l'hypothèse faite, elles étaient en nombre fini, mais je ne voyais pas bien pourquoi on les regardait comme également probables. Ensuite on introduisait les relations connues entre la température, l'entropie et la probabilité; cela supposait la possibilité de l'équilibre thermodynamique, puisque ces relations sont démontrées en supposant cet équilibre possible. Je sais bien que l'expérience nous apprend que cet équilibre est réalisable, puisqu'il est réalisé; mais cela ne me suffisait pas, il fallait montrer que cet équilibre est compatible avec l'hypothèse faite et même qu'il en est une conséquence nécessaire. Je n'avais pas précisément des doutes, mais j'éprouvais le besoin de voir un peu plus clair, et pour cela il fallait pénétrer un peu dans le détail du mécanisme.

Pour qu'il puisse y avoir une répartition d'énergie entre les résonateurs de longueur d'onde différente dont les oscillations sont la cause du rayonnement, il faut qu'ils puissent échanger leur énergie ; sans cela la distribution initiale subsisterait indéfiniment et, comme cette distribution initiale est arbitraire, il ne saurait être question d'une loi du rayonnement. Or un résonateur ne peut céder à l'éther, et il n'en peut recevoir que de la lumière d'une longueur d'onde parfaitement déterminée. Si donc les résonateurs ne pouvaient réagir les uns sur les autres mécaniquement, c'est-à-dire sans l'intermédiaire de l'éther; si, d'autre part, ils étaient fixes et enfermés dans une enceinte fixe, chacun d'eux ne pourrait émettre ou absorber que de la lumière d'une couleur déterminée, il ne pourrait donc échanger d'énergie qu'avec les résonateurs avec lesquels il serait en parfaite résonance, et la distribution initiale demeurerait inaltérable. Mais nous pouvons concevoir deux modes

d'échange qui ne prêtent pas à cette objection. D'une part, des atomes, des électrons libres peuvent circuler d'un résonateur à l'autre, choquer un résonateur, lui communiquer et en recevoir de l'énergie. D'autre part, la lumière, en se réfléchissant sur des miroirs mobiles, change de longueur d'onde en vertu du principe de Döppler-Fizeau.

Sommes-nous libres de choisir entre ces deux mécanismes? Non, il est certain que l'un et l'autre doivent entrer en jeu, et il est nécessaire que l'un et l'autre nous conduisent à un même résultat, à une même loi du rayonnement. Qu'arriverait-il en effet si les résultats étaient contradictoires, si le mécanisme des chocs agissant seul tendait à réaliser une certaine loi de rayonnement, celle de Planck par exemple, tandis que le mécanisme Döppler-Fizeau tendrait à en réaliser une autre? Eh bien! il arriverait que, ces deux mécanismes devant jouer l'un et l'autre, mais devenant alternativement prépondérants sous l'influence de circonstances fortuites, le monde oscillerait constamment d'une loi à l'autre, il ne tendrait pas vers un état final stable, vers cette mort thermique où il ne connaîtra plus le changement; le second principe de la Thermodynamique ne serait pas vrai.

Je résolus donc d'examiner successivement les deux processus, et je commençais par l'action mécanique, par le choc. Vous savez pourquoi les théories anciennes nous conduisent forcément à la loi de l'équipartition; c'est parce qu'elles supposent que toutes les équations de la Mécanique sont de la forme de Hamilton et que, par conséquent, elles admettent l'unité comme un dernier multiplicateur au sens de Jacobi. On doit alors supposer que les lois du choc entre un électron libre et un résonateur ne sont pas de la même forme et que les équations qui les régissent admettent un dernier multiplicateur autre que l'unité. Il faut bien qu'elles aient un dernier multiplicateur, sans quoi le second principe de la Thermodynamique ne serait pas vrai, nous retrouverions la difficulté de tout à l'heure, mais il ne faut pas que ce multiplicateur soit l'unité.

C'est précisément ce dernier multiplicateur qui mesure la probabilité d'un état donné du système (ou plutôt ce qu'on pourrait appeler la densité de la probabilité). Dans l'hypothèse des quanta, ce multiplicateur ne peut être une fonction continue, puisque la probabilité d'un état doit être nulle, toutes les fois que l'énergie correspondante n'est pas un multiple du quantum. C'est là une difficulté évidente, mais c'est une de celles auxquelles nous sommes résignés d'avance; je ne m'y suis pas arrêté; j'ai alors poussé le calcul jusqu'au

bout et j'ai retrouvé la loi de Planck, justifiant pleinement les vues du physicien allemand.

Je suis alors passé au mécanisme de Döppler-Fizeau; supposons une enceinte formée d'un corps de pompe et d'un piston, dont les parois sont parfaitement réfléchissantes. Dans cette enceinte est enfermée une certaine quantité d'énergie lumineuse avec une répartition quelconque des longueurs d'onde, mais *pas de source de lumière*; l'énergie lumineuse y est enfermée une fois pour toutes.

Tant que le piston ne bougera pas, cette répartition ne pourra varier, car la lumière conservera sa longueur d'onde en se réfléchissant; mais, quand on déplacera le piston, la répartition variera. Si la vitesse du piston est très petite, le phénomène est réversible et l'entropie doit demeurer constante ; on retrouve ainsi l'analyse de Wien et la loi de Wien, mais on n'est pas plus avancé, puisque cette loi est commune aux anciennes et aux nouvelles théories. Si la vitesse du piston n'est pas très petite, le phénomène devient irréversible; de sorte que l'analyse thermodynamique ne nous conduit plus à des égalités, mais à de simples inégalités d'où on ne pourrait tirer de conclusions.

Il semble pourtant que l'on pourrait raisonner comme il suit : supposons que la distribution initiale de l'énergie soit celle du rayonnement noir; c'est évidemment celle qui correspond au maximum de l'entropie; si l'on donne quelques coups de piston, la distribution finale devra donc rester la même, sans quoi l'entropie aurait diminué; et même quelle que soit la distribution initiale, après un nombre très grand de coups de piston, la distribution finale devra être celle qui rend l'entropie maximum, celle du rayonnement noir. Ce raisonnement serait sans valeur.

La distribution a une tendance à se rapprocher de celle du rayonnement noir; elle ne peut pas plus s'en écarter que la chaleur ne peut passer d'un corps froid sur un corps chaud, c'est-à-dire qu'elle ne peut le faire *sans contre-partie*. Or ici il y a une contre-partie : en donnant des coups de piston, on dépense du travail, qui se retrouve par une augmentation de l'énergie lumineuse enfermée dans le corps de pompe, c'est-à-dire qui est transformé en chaleur.

La même difficulté ne se retrouverait plus si les corps en mouvement sur lesquels se fait la réflexion de la lumière étaient infiniment petits et infiniment nombreux, parce qu'alors leur force vive ne serait pas du travail mécanique, mais de la chaleur; on ne pourrait donc compenser la diminution d'entropie qui correspond à un changement dans la répartition des longueurs d'onde par la transformation de ce travail en chaleur, et alors on sera en droit de conclure

que, si la distribution initiale est celle du rayonnement noir, cette distribution devra persister indéfiniment.

Supposons donc une enceinte à parois *fixes* et réfléchissantes; nous y enfermerons non seulement de l'énergie lumineuse, mais aussi un gaz; ce sont les molécules de ce gaz qui joueront le rôle de miroirs mobiles. Si la distribution des longueurs d'onde est celle du rayonnement noir correspondant à la température du gaz, cet état devra être stable; c'est-à-dire :

1° Que l'action de la lumière sur les molécules ne devra pas en faire varier la température;

2° Que l'action des molécules sur la lumière ne devra pas troubler la distribution.

M. Einstein a étudié l'action de la lumière sur les molécules; ces molécules subissent, en effet, quelque chose qui ressemble à la pression de radiation; M. Einstein ne s'est pas toutefois placé tout à fait à un point de vue aussi simple; il a assimilé ses molécules à de petits résonateurs mobiles, susceptibles de posséder à la fois de la force vive de translation et de l'énergie due à des oscillations électriques. Le résultat aurait dans tous les cas été le même, il aurait retrouvé la loi de Rayleigh.

Quant à moi, je ferai l'inverse, c'est-à-dire que j'étudierai l'action des molécules sur la lumière. Les molécules sont trop petites pour donner une réflexion régulière; elles produisent seulement une diffusion. Ce qu'est cette diffusion, quand on ne tient pas compte des mouvements des molécules, nous le savons, et par la théorie et par l'expérience; c'est elle, en effet, qui produit le bleu du ciel.

Cette diffusion n'altère pas la longueur d'onde, mais elle est d'autant plus intense que la longueur d'onde est plus petite.

Il faut maintenant passer de l'action d'une molécule au repos à l'action d'une molécule en mouvement, afin de tenir compte de l'agitation thermique; cela est facile, nous n'avons qu'à appliquer le principe de relativité de Lorentz; il en résulte que divers faisceaux de même longueur d'onde réelle, arrivant sur la molécule dans différentes directions, n'auront pas même longueur d'onde apparente pour un observateur qui croirait la molécule en repos. La longueur d'onde *apparente* n'est pas altérée par la diffraction, mais il n'en est pas de même de la longueur d'onde réelle.

On arrive ainsi à une loi intéressante ; l'énergie lumineuse réfléchie ou diffusée n'est pas égale à l'énergie lumineuse incidente ; ce n'est pas l'énergie, c'est le produit de l'énergie par la longueur d'onde qui demeure inaltéré. J'ai d'abord été très content. Il résultait en effet de là qu'un quantum incident donnait un quantum diffusé, puisque le quantum est en raison inverse de la longueur d'onde. Malheureusement cela n'a rien donné.

J'ai été conduit par cette analyse à la loi de Rayleigh ; cela, je le savais bien d'avance ; mais j'espérais qu'en voyant *comment* je serais conduit à la loi de Rayleigh, j'apercevrais plus clairement quelles modifications il faut faire subir aux hypothèses pour retrouver la loi de Planck. C'est cet espoir qui a été déçu.

Ma première pensée fut de chercher quelque chose qui ressemblât à la théorie des quanta ; il serait en effet surprenant que deux explications entièrement différentes rendissent compte d'une même dérogation à la loi d'équipartition, selon le mécanisme par lequel cette dérogation se produirait. Or comment la structure discontinue de l'énergie pourrait-elle intervenir ? On pourrait supposer que cette discontinuité appartient à l'énergie lumineuse elle-même, lorsqu'elle circule dans l'éther libre, que par conséquent la lumière ne tombe pas sur les molécules en masse compacte, mais par petits bataillons séparés ; il est aisé de voir que cela ne changerait rien au résultat.

Ou bien on pourrait supposer que la discontinuité se produit au moment de la diffusion elle-même, que la molécule diffusante ne transforme pas la lumière d'une façon continue, mais par quanta successifs ; cela ne va pas encore parce que, si la lumière à transformer devait faire antichambre, comme si l'on avait affaire à un omnibus qui attendrait d'être plein pour partir, il en résulterait forcément un retard. Or la théorie de lord Rayleigh nous apprend que la diffusion par les molécules, lorsqu'elle se fait sans déviation dans la direction du rayon incident, produit tout simplement la réfraction ordinaire ; c'est-à-dire que la lumière diffusée interfère régulièrement avec la lumière incidente, ce qui ne serait pas possible s'il y avait une perte de phase.

Si nous cherchons sans parti pris quelle est celle de nos prémisses qu'il nous convient d'abandonner, nous ne serons pas moins embarrassés : on ne voit pas comment on pourrait renoncer au principe de relativité ; est-ce alors la loi de diffusion par les molécules au repos qu'il faudrait modifier ? cela est aussi bien difficile ; nous ne pouvons guère pousser la fantaisie jusqu'à croire que le ciel n'est pas bleu.

Je resterai sur cet embarras, et je terminerai par la réflexion suivante

A mesure que la Science progresse, il devient de plus en plus difficile de faire place à un fait nouveau qui ne se case pas naturellement. Les théories anciennes reposent sur un grand nombre de coïncidences numériques qui ne peuvent être attribuées au hasard ; nous ne pouvons donc disjoindre ce qu'elles ont réuni ; nous ne pouvons plus briser les cadres, nous devons chercher à les plier ; et ils ne s'y prêtent pas toujours. La théorie de l'équipartition expliquait tant de faits qu'elle doit contenir une part de vérité ; d'autre part, elle n'est pas vraie tout entière, puisqu'elle ne les explique pas tous. On ne peut ni l'abandonner, ni la conserver sans modification, et les modifications qui semblent s'imposer sont si étranges qu'on hésite à s'y résigner. Dans l'état actuel de la Science, nous ne pouvons que constater ces difficultés sans les résoudre.

NOTES ET COMMENTAIRES.

XXIV₁. — THÉORIES PHYSIQUES.

Dans le tome 38 des *Acta mathematica*, H. A. LORENTZ a commenté les deux importants Mémoires de Henri Poincaré consacrés à la Dynamique de l'électron (Ce tome, p. 494) et à la Théorie des quanta (Ce tome, p. 626). Nous avons pensé que cet hommage de H. A. Lorentz devait figurer ici et nous le reproduisons en tête de ces Notes.

Deux mémoires de Henri Poincaré sur la Physique mathématique,

par H. A. LORENTZ (Haarlem).

Les pages suivantes ne peuvent aucunement donner une idée tant soit peu complète de ce que la Physique théorique doit à Poincaré. J'aurais été heureux de rendre hommage à sa mémoire en présentant au lecteur un tel tableau d'ensemble, mais j'ai reculé devant cette tâche qu'on ne pourrait dignement remplir sans de longues et sérieuses études pour lesquelles le temps m'a manqué. Je me suis donc borné à deux Mémoires, celui sur la dynamique de l'électron, écrit en 1905 et publié l'année suivante dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, et l'étude sur la Théorie des quanta qui parut dans le *Journal de Physique* au commencement de 1912.

Pour bien faire apprécier le premier de ces travaux, je devrai entrer en quelques détails sur les idées dont le développement a abouti au Principe de relativité. Amené ainsi à parler un peu de la part que j'ai pu prendre moi-même à ce développement, je dois dire avant tout que j'ai trouvé un encouragement précieux dans l'intérêt bienveillant que Poincaré a constamment pris à mes études. Du reste, on verra bientôt à quel degré il m'a dépassé.

On sait que Fresnel avait fondé une explication de l'aberration astronomique sur l'hypothèse d'un éther immobile que les corps célestes traverseraient sans l'entraîner. On connaît aussi son célèbre théorème, complément nécessaire de cette hypothèse fondamentale, sur l'entraînement partiel des ondes lumineuses par de la matière en mouvement. Un corps transparent animé d'une translation ne communiquera aux

rayons qu'une fraction de sa propre vitesse, fraction qui est déterminée par le « coefficient de Fresnel » $1 - \frac{1}{n^2}$, dans lequel n est l'indice de réfraction du milieu.

Lorsque, grâce aux travaux de Clerk Maxwell, nos vues sur la nature de la lumière avaient été profondément changées, il était naturel d'essayer une déduction de ce coefficient basée sur les principes de la théorie électromagnétique. Voilà le but que je me suis proposé et qui a pu être atteint sans trop de difficulté dans la théorie des électrons.

La plupart des phénomènes qui se rattachent à l'aberration, et notamment l'absence d'une influence du mouvement de la Terre dans toutes les expériences où le système entier d'appareils est en repos par rapport à notre planète, purent maintenant être expliqués d'une manière satisfaisante. Seulement il fallait faire la restriction que les effets considérés devaient être du premier ordre de grandeur par rapport à la vitesse de la Terre divisée par celle de la lumière, les termes du second ordre ayant été négligés dans les calculs.

Or, en 1881, M. Michelson réussit à faire interférer deux rayons lumineux partis d'un même point et y revenant après avoir suivi des chemins rectilignes de longueur égale et perpendiculaires entre eux. Il trouva que les phénomènes observés sont de nouveau insensibles au mouvement de la Terre; les franges d'interférence conservaient les mêmes positions quelles que fussent les directions des bras de l'appareil.

Cette fois-ci il s'agissait bien d'un effet du second ordre et il était facile de voir que l'hypothèse de l'éther immobile à elle seule ne suffit pas à l'explication du résultat négatif. J'ai été obligé à faire une nouvelle supposition qui revient à admettre que la translation d'un corps à travers l'éther produit une légère contraction du corps dans le sens du mouvement. Cette hypothèse était bien la seule possible; elle avait été imaginée par Fitzgerald et elle trouva l'approbation de Poincaré, qui cependant ne dissimula pas le peu de satisfaction que lui donnèrent les théories dans lesquelles on multiplie les hypothèses spéciales inventées pour des phénomènes particuliers. Cette critique a été pour moi une raison de plus pour chercher une théorie générale, dans laquelle les principes mêmes conduiraient à l'explication de l'expérience de M. Michelson et de toutes celles qu'on avait tentées après lui pour découvrir des effets du second ordre. Dans la théorie que je me proposais, l'absence de phénomènes dus au mouvement d'ensemble d'un système devrait être démontrée pour une valeur quelconque de la vitesse, inférieure à celle v de la lumière.

La méthode à suivre était toute indiquée. Il fallait évidemment montrer que les phénomènes qui ont lieu dans un système matériel peuvent être représentés par des équations de la même forme, que le système soit en repos ou qu'il soit animé d'un mouvement de translation uniforme, cette égalité de forme étant obtenue à l'aide d'une substitution convenable de nouvelles variables. Il s'agissait de trouver des formules de transformation appropriées tant pour les variables indépendantes, les coordonnées x, y, z et le temps t, que pour les différentes grandeurs physiques, vitesses, forces, etc., et de montrer l'invariance des équations pour ces transformations.

Les formules que j'aie établies alors pour les coordonnées et le temps peuvent être mises sous la forme [1]

$$(1) \qquad x' = kl(x + \varepsilon t), \qquad y' = ly, \qquad z' = lz, \qquad t' = kl(t + \varepsilon x),$$

où ε, k, l sont des constantes qui cependant se réduisent à une seule. On voit immédiatement que pour l'origine des nouvelles coordonnées ($x' = 0$) on a

$$x = -\varepsilon t;$$

ce point se déplace donc dans le système x, y, z, t avec la vitesse $-\varepsilon$ dans la direction de l'axe des x. Le coefficient k est défini par

$$k = (1 - \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}$$

et l est une fonction de ε qui a la valeur 1 pour $\varepsilon = 0$. Je l'ai d'abord laissée indéterminée, mais j'ai trouvé dans le cours de mes calculs que pour obtenir l'invariance que j'avais en vue, on doit poser $l = 1$.

Ce furent ces considérations publiées par moi en 1904 qui donnèrent lieu à Poincaré d'écrire son Mémoire sur la Dynamique de l'électron, dans lequel il a attaché mon nom à la transformation dont je viens de parler. Je dois remarquer à ce propos que la même transformation se trouve déjà dans un article de M. Voigt publié en 1887 et que je n'ai pas tiré de cet artifice tout le parti possible. En effet, pour certaines des grandeurs physiques qui entrent dans les formules, je n'ai pas indiqué la transformation qui convient le mieux. Cela a été fait par Poincaré et ensuite par MM. Einstein et Minkowski.

Pour trouver les « transformations de relativité » comme je les appellerai maintenant, il suffit dans quelques cas de décrire les phénomènes dans le système x', y', z', t' exactement de la même manière qu'on le fait dans le système x, y, z, t. Considérons, par exemple, le mouvement d'un point. Si, dans le temps dt les coordonnées x, y, z subissent les changements dx, dy, dz, on a pour les composantes de la vitesse

$$\xi = \frac{dx}{dt}, \qquad \eta = \frac{dy}{dt}, \qquad \zeta = \frac{dz}{dt}.$$

Or, en vertu des relations (1), les variations dx, dy, dz, dt entraînent les changements

$$(2) \qquad dx' = kl(dx + \varepsilon\, dt), \qquad dy' = l\, dy, \qquad dz' = l\, dz, \qquad dt' = kl(dt + \varepsilon\, dx)$$

des nouvelles variables. Il est naturel de définir les composantes de la vitesse dans le nouveau système par les formules

$$(3) \qquad \xi' = \frac{dx'}{dt'}, \qquad \eta' = \frac{dy'}{dt'}, \qquad \zeta' = \frac{dz'}{dt'},$$

---

[1] Je me conforme ici aux notations de Poincaré et je choisis les unités de longueur et de temps de telle façon que la vitesse de la lumière soit égale à 1.

ce qui nous donne

$$(4) \qquad \xi' = \frac{\xi + \varepsilon}{1 + \varepsilon\xi}, \qquad \eta' = \frac{\eta}{k(1 + \varepsilon\xi)}, \qquad \zeta' = \frac{\zeta}{k(1 + \varepsilon\xi)}.$$

Pour avoir un autre exemple, on peut imaginer un grand nombre de points mobiles dont les vitesses sont des fonctions continues des coordonnées et du temps. Soit $d\tau$ un élément de volume situé au point x, y, z et fixons l'attention sur les points du système qui se trouvent dans cet élément à un instant déterminé t. Soit t'_0 la valeur spéciale de t' qui correspond à x, y, z, t en vertu des équations (1), et envisageons pour les différents points les valeurs de x', y', z' correspondant à cette valeur déterminée $t' = t'_0$; en d'autres termes, considérons les positions des points dans le nouveau système, prises toutes pour une même valeur du « temps » t'. On peut se demander quelle est l'étendue de l'élément $d\tau'$ de l'espace x', y', z', dans lequel se trouvent à cet instant t'_0 les points choisis qui se trouvent en $d\tau$ au moment t. Un simple calcul, que je puis omettre ici, conduit à la relation

$$(5) \qquad d\tau' = \frac{l^3}{k}\,\frac{1}{1 + \varepsilon\xi}\,d\tau.$$

Supposons enfin que les points dont il s'agit portent des charges électriques égales et admettons que dans les deux systèmes x, y, z, t et x', y', z', t' on attribue les mêmes valeurs numériques à ces charges. Si les points sont suffisamment rapprochés les uns et les autres, on obtient une distribution continue d'électricité et il est clair que la charge contenue dans l'élément $d\tau$ à l'instant t est égale à celle qui se trouve en $d\tau'$ à l'instant t'. Par conséquent, si ρ et ρ' sont les densités de ces charges,

$$(6) \qquad \rho\, d\tau = \rho'\, d\tau',$$

et, en vertu de (5)

$$(7) \qquad \rho' = \frac{k}{l^3}(1 + \varepsilon\xi)\rho.$$

De cette formule, combinée avec (4), on déduit encore

$$\rho'\xi' = \frac{k}{l^3}\rho(\xi + \varepsilon), \qquad \rho'\eta' = \frac{1}{l^3}\rho\eta, \qquad \rho'\zeta' = \frac{1}{l^3}\rho\zeta.$$

Ce sont les formules de transformation pour le courant de convection.

Pour d'autres grandeurs physiques telles que les forces électrique et magnétique, il faut suivre une méthode moins directe; on cherchera, peut-être un peu par tâtonnement, les formules de transformation propres à assurer l'invariance des équations électromagnétiques.

Les formules (4) et (7) ne se trouvent pas dans mon Mémoire de 1904. C'est que je n'avais pas songé à la voie directe qui y conduit, et cela tient à ce que j'avais l'idée qu'il y a une différence essentielle entre les systèmes x, y, z, t et x', y', z', t'. Dans l'un on se sert — telle était ma pensée — d'axes des coordonnées qui ont une position fixe dans l'éther et de ce que l'on peut appeler le « vrai » temps; dans l'autre système, au contraire, on aurait affaire à de simples grandeurs auxiliaires

dont l'introduction n'est qu'un artifice mathématique. En particulier, la variable t' ne pourrait pas être appelée le « temps » dans le même sens que la variable t.

Dans cet ordre d'idées, je n'ai pas pensé à décrire les phénomènes dans le système x', y', z', t', *exactement de la même manière* que dans le système x, y, z, t et je n'ai pas défini par les équations (3) et (7) les grandeurs ξ', η', ζ', ρ' qui correspondront à ξ, η, ζ, ρ. C'est plutôt par tâtonnement que je suis arrivé à mes formules de transformation qui, avec notre notation actuelle, prennent la forme

$$\xi' = k^2(\xi - \varepsilon), \qquad \eta' = k\eta, \qquad \zeta' = k\zeta, \qquad \rho' = \frac{1}{kl^3}\rho$$

et que j'ai voulu choisir de manière à obtenir dans le nouveau système les équations les plus simples. J'ai pu voir plus tard dans le Mémoire de Poincaré qu'en procédant plus systématiquement j'aurais pu atteindre une plus grande simplification encore. Ne l'ayant pas remarqué, je n'ai pas réussi à obtenir l'invariance exacte des équations; mes formules restaient encombrées de certains termes qui auraient dû disparaître. Ces termes étaient trop petits pour avoir une influence sensible sur les phénomènes et je pouvais donc expliquer l'indépendance du mouvement de la Terre que les observations avaient révélée, mais je n'ai pas établi le principe de relativité comme rigoureusement et universellement vrai.

Poincaré, au contraire, a obtenu une invariance parfaite des équations de l'électrodynamique, et il a formulé le « postulat de relativité », termes qu'il a été le premier à employer. En effet, se plaçant au point de vue que j'avais manqué, il a trouvé les formules (4) et (7). Ajoutons qu'en corrigeant ainsi les imperfections de mon travail il ne me les a jamais reprochées.

Je ne puis m'étendre ici sur tous les beaux résultats obtenus par Poincaré. Insistons cependant sur quelques points. D'abord, il ne s'est pas contenté de faire voir que les transformations de relativité laissent intacte la forme des équations électromagnétiques. Il explique le succès des substitutions en remarquant que ces équations peuvent être mises sous la forme du principe de moindre action et que l'équation fondamentale qui exprime ce principe, ainsi que les opérations par lesquelles on en déduit les équations du champ, sont les mêmes dans les systèmes x, y, z, t et x', y', z', t'.

En second lieu, conformément au titre de son Mémoire, Poincaré considère particulièrement la manière dont se produit la déformation d'un électron mobile, comparable à celle des bras de l'appareil de M. Michelson, qui est exigée par le postulat de relativité. On avait proposé à ce sujet deux hypothèses différentes. D'après toutes les deux un électron, supposé sphérique à l'état de repos, se changerait par une translation en un ellipsoïde de révolution aplati, l'axe de symétrie coïncidant avec la direction du mouvement et le rapport de cet axe au diamètre de l'équateur étant donné par $\sqrt{1 - v^2}$, si v est la vitesse. Mais les hypothèses différaient entre elles en ce qui concerne la longueur des axes et, par conséquent, le volume de l'électron. Tandis que j'avais été conduit à admettre que le rayon de l'équateur reste égal à celui de la sphère primitive, M. Bucherer et M. Langevin voulaient plutôt assigner une grandeur constante au volume. La première hypothèse correspond à $l = 1$, le deuxième à $kl = 1$. Ajoutons

immédiatement que la première valeur est la seule qui soit compatible avec le postulat de relativité.

Si l'on veut se rendre compte de la persistance et de l'équilibre d'un électron en se servant des notions ordinaires de la Mécanique, il ne suffit évidemment pas de considérer les actions électrodynamiques. La particule — que nous considérons ici comme une sphère portant une charge superficielle — exploserait immédiatement à cause des répulsions mutuelles ou, ce qui revient au même, des tensions de Maxwell exercées à la surface. Il faut donc introduire autre chose encore, et Poincaré distingue ici des « liaisons » et « des forces supplémentaires ». Il suppose d'abord qu'il y ait seulement la liaison représentée par l'équation

$$r = b\theta^m,$$

r étant le demi-axe de l'électron, $r\theta$ son rayon équatorial, b et m des grandeurs qui restent constantes quand r et θ (ou l'une de ces grandeurs) varient avec la vitesse de translation v. Cela posé, on connaîtra pour une valeur quelconque de v les dimensions de l'électron — parce qu'on sait que $\theta = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ — et l'on peut calculer par les formules ordinaires du champ électromagnétique l'énergie, la quantité de mouvement et la fonction de Lagrange. Entre ces grandeurs, considérées comme des fonctions de v, il doit y avoir les relations bien connues. Poincaré démontre qu'elles ne se vérifient que pour $m = -\frac{2}{3}$, ce qui nous ramène à la constance du volume, c'est-à-dire à l'hypothèse de M. Bucherer et de M. Langevin. Mais nous savons déjà que ce n'est pas cette hypothèse, mais seulement celle d'un rayon équatorial constant, qui est en accord avec le postulat de relativité. Il faut donc nécessairement avoir recours à des forces supplémentaires.

En supposant qu'elles dépendent d'un potentiel de la forme $Ar^\alpha\theta^\beta$, où A, α et β sont des constantes, Poincaré trouve que la constance du rayon équatorial exige $\alpha = 3$, $\beta = 2$, c'est-à-dire que le potentiel en question doit être proportionnel au volume. Il en résulte que les forces supplémentaires cherchées sont équivalentes à une pression ou une tension normale exercée sur la surface et dont la grandeur par unité de surface reste constante quelle que soit la vitesse de translation. On voit immédiatement qu'une tension dirigée vers l'intérieur convient seule; on en déterminera la grandeur par la condition que pour un électron qui se trouve en repos et qui a, par conséquent, la forme d'une sphère, elle doit faire équilibre aux répulsions électrostatiques. Si ensuite la particule est mise en mouvement, la tension de Poincaré, jointe aux actions électrodynamiques, produira inévitablement l'aplatissement qui est exigé par le principe de relativité.

Après avoir trouvé sa force supplémentaire, Poincaré fait voir que les transformations de relativité ne changent pas la forme des termes qui la représentent; il démontre ainsi que les mouvements *quelconques* d'un système d'électrons peuvent avoir lieu tout à fait de la même manière dans le système x, y, z, t et dans le système x', y', z', t'.

J'ai déjà parlé de la nécessité de poser $l = 1$ (constance du rayon équatorial de l'électron). Je ne répéterai pas ici la démonstration donnée par Poincaré et je dirai seulement qu'il a signalé l'origine mathématique de cette condition. On peut

envisager toutes les transformations qui sont représentées par les formules (1), avec des valeurs différentes de la vitesse $-\varepsilon$, et les valeurs correspondantes de k et de l, ce dernier coefficient devant être considéré comme une fonction de ε; on peut y ajouter d'autres transformations semblables qu'on déduit de (1) en changeant les directions des axes, et enfin des rotations quelconques. Le postulat de relativité exige que toutes ces transformations forment un groupe et cela n'est possible que si l a la valeur constante 1.

Le « groupe de relativité » qu'on obtient ainsi se compose des substitutions linéaires qui n'altèrent pas la forme quadratique

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Le Mémoire se termine par l'application du postulat de relativité aux phénomènes de la gravitation. Il s'agit ici de trouver la règle qui en détermine la propagation et les formules qui expriment les composantes de la force en fonction des coordonnées et de la vitesse tant du corps attiré que du corps attirant. En considérant ces questions, Poincaré commence par chercher les invariants du groupe de relativité; en effet, il est clair qu'il doit être possible de représenter les phénomènes par des équations qui ne contiennent que ces invariants. Cependant, le problème est indéterminé. Il est naturel d'admettre que la vitesse de propagation est égale à celle de la lumière et que les écarts de la loi de Newton doivent être du deuxième ordre de grandeur par rapport aux vitesses. Mais, même avec ces restrictions, on a le choix entre plusieurs hypothèses parmi lesquelles il y en a deux que Poincaré indique spécialement.

Dans cette dernière partie de l'article on trouve quelques notions nouvelles que je dois surtout signaler. Poincaré remarque, par exemple, que si l'on considère x, y, z et $t\sqrt{-1}$ comme les coordonnées d'un point dans un espace à quatre dimensions, les transformations de relativité se réduisent à des rotations dans cet espace. Il a aussi eu l'idée d'ajouter aux trois composantes X, Y, Z d'une force la grandeur

$$T = (X\xi + Y\eta + Z\zeta)$$

qui n'est autre chose que le travail de la force par unité de temps et qu'on peut considérer en quelque sorte comme une quatrième composante. Quand il est question de la force qu'un corps éprouve par unité de volume, les grandeurs X, Y, Z, $T\sqrt{-1}$ sont affectées par une transformation de relativité de la même manière que les grandeurs $x, y, z, t\sqrt{-1}$.

Je rappelle ces idées de Poincaré parce qu'elles se rapprochent des méthodes dont Minkowski et d'autres savants se sont servis plus tard pour faciliter les opérations mathématiques qui se présentent dans la théorie de relativité.

Passons maintenant au Mémoire sur la Théorie des quanta. Vers la fin de 1911, Poincaré avait assisté à la réunion du Conseil de Physique convoqué à Bruxelles par M. Solvay, dans laquelle on s'était surtout occupé des phénomènes du rayonnement calorifique et de l'hypothèse des éléments ou quanta d'énergie imaginée par M. Planck pour les expliquer. Dans les discussions, Poincaré avait montré

toute la vivacité et la pénétration de son esprit et l'on avait admiré la facilité avec laquelle il sut entrer dans les questions de Physique les plus ardues, même dans celles qui devaient être nouvelles pour lui. De retour à Paris, il ne cessa de s'occuper du problème dont il sentait vivement l'importance. Si l'hypothèse de M. Planck était vraie, « les phénomènes physiques cesseraient d'obéir à des lois exprimables par des équations différentielles, et ce serait là, sans doute, la plus grande révolution et la plus profonde que la philosophie naturelle ait subie depuis Newton ».

Mais ces conceptions nouvelles sont-elles vraiment inévitables et n'y a-t-il pas moyen d'arriver à la loi du rayonnement sans introduire ces discontinuités qui sont en opposition directe avec les notions de la Mécanique classique ? Voilà la question que Poincaré se pose dans son Mémoire et à laquelle il donne une réponse que je me permettrai de résumer brièvement.

Considérons un système composé de n résonateurs de Planck et de p molécules, n et p étant de très grands nombres; supposons que tous les résonateurs soient égaux entre eux et qu'il en soit de même des molécules. Désignons par $\xi_1, \ldots, \xi_p$ les énergies des molécules et par $\eta_1, \ldots, \eta_n$, celles des résonateurs; chacune de ces variables pourra prendre toutes les valeurs positives.

Poincaré démontre d'abord que la probabilité pour que les quantités d'énergie soient comprises entre les limites ξ_1 et $\xi_1 + d\xi_1, \ldots, \xi_p$ et $\xi_p + d\xi_p$, η_1 et $\eta_1 + d\eta_1$, $\ldots, \eta_n$ et $\eta_n + d\eta_n$ peut être représentée par

$$w(\eta_1)\ldots w(\eta_n)\,d\eta_1\ldots d\eta_n\,d\xi_1\ldots d\xi_p,$$

où w est une fonction sur laquelle on peut faire différentes hypothèses.

Dès qu'on connaît cette fonction, on pourra dire de quelle manière une quantité d'énergie h se répartira sur les molécules et les résonateurs. A cet effet, on peut se représenter dans l'espace à $p+n$ dimensions $\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_n$ la couche infiniment mince S, dans laquelle l'énergie totale

$$\xi_1 + \ldots + \xi_p + \eta_1 + \ldots + \eta_n$$

est comprise entre h et une valeur infiniment voisine $h + dh$. On calculera les trois intégrales

$$\mathrm{I} = \int w(\eta_1)\ldots w(\eta_n)\,d\eta_1\ldots d\eta_n\,d\xi_1\ldots d\xi_p,$$

$$\mathrm{I}' = \int x\,w(\eta_1)\ldots w(\eta_n)\,d\eta_1\ldots d\eta_n\,d\xi_1\ldots d\xi_p,$$

$$\mathrm{I}'' = \int (h - x)\,w(\eta_1)\ldots w(\eta_n)\,d\eta_1\ldots d\eta_n\,d\xi_1\ldots d\xi_p$$

$$(x = \eta_1 + \ldots + \eta_n),$$

étendues à la couche S, et on aura $\dfrac{\mathrm{I}'}{\mathrm{I}}$ pour l'énergie que prennent les résonateurs et $\dfrac{\mathrm{I}''}{\mathrm{I}}$ pour celle de l'ensemble des molécules. Par conséquent, si Y est l'énergie moyenne d'un résonateur, et X celle d'une molécule,

$$n\mathrm{YI} = \mathrm{I}', \qquad p\mathrm{XI} = \mathrm{I}''.$$

Pour calculer l'intégrale I, on peut d'abord donner des valeurs fixes aux variables $\eta_1, \ldots, \eta_n$ et, par conséquent, à leur somme x, et étendre l'intégration par rapport aux ξ à toutes les valeurs positives de ces variables, pour lesquelles la somme $\xi_1 + \ldots + \xi_p$ est comprise entre $h - x$ et $h - x + dh$. Cela nous donne

$$\int d\xi_1 \ldots d\xi_p = \frac{1}{(p-1)!}(h-x)^{p-1}\,dh.$$

Ensuite, on peut calculer l'intégrale

$$\int w(\eta_1)\ldots w(\eta_n)\,d\eta_1\ldots d\eta_n$$

étendue aux valeurs positives des η telles que $\eta_1 + \ldots + \eta_n$ se trouve entre x et $x + dx$. Posons

$$\int w(\eta_1)\ldots w(\eta_n)\,d\eta_1\ldots d\eta_n = \varphi(x)\,dx; \tag{8}$$

φ sera une fonction qui dépend de la fonction w et nous aurons

$$I = \frac{dh}{(p-1)!}\int_0^h (h-x)^{p-1}\varphi(x)\,dx.$$

I′ et I″ se calculent de la même manière; on n'a qu'à introduire sous le signe d'intégration le facteur x ou le facteur $h - x$. En fin de compte, on peut écrire

$$nY = C\int_0^h x(h-x)^{p-1}\varphi(x)\,dx, \tag{9}$$

$$pX = C\int_0^h (h-x)^p\varphi(x)\,dx, \tag{10}$$

où le facteur C est le même dans les deux cas. Nous n'avons pas à nous en occuper parce qu'il suffit de déterminer le rapport de X à Y.

On obtient maintenant la formule de M. Planck — qui peut être regardée comme l'expression de la réalité — si l'on fait sur la fonction w l'hypothèse suivante, qui est conforme à la théorie des quanta.

Soit ε la grandeur du quantum d'énergie qui est propre aux résonateurs considérés et désignons par δ une grandeur infiniment petite ([1]). La fonction w sera nulle, excepté dans les intervalles

$$k\varepsilon < \eta < k\varepsilon + \delta \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

et pour chacun de ces intervalles l'intégrale

$$\int_{k\varepsilon}^{k\varepsilon+\delta} w\,d\eta$$

aura la valeur 1.

([1]) Il s'agit ici de la *première* théorie de M. Planck, dans laquelle on admet que l'énergie d'un résonateur ne peut avoir qu'une des valeurs $0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \ldots$.

Ces données suffisent pour la détermination de la fonction φ et du rapport $\frac{Y}{X}$ pour lequel on trouve, comme je l'ai déjà dit, la valeur donnée par la théorie de M. Planck. Je ne m'arrèterai pas à ces calculs et je passe immédiatement à la question principale, celle de savoir si les discontinuités que je viens d'indiquer doivent nécessairement ètre admises.

Je vais reproduire le raisonnement de Poincaré, mais je dirai d'abord que dans les formules que nous rencontrerons, α désigne une variable complexe dont la partie réelle α_r est toujours positive. Dans la représentation graphique, on se bornera à la moitié du plan α caractérisée par $\alpha_r > 0$ et dans les intégrations par rapport à α on suivra une ligne droite L perpendiculaire à l'axe des α réels, et prolongée indéfiniment des deux côtés. Les valeurs des intégrales seront indépendantes de la longueur de la distance α_r de cette ligne à l'origine des α.

Poincaré introduit une fonction auxiliaire qu'il définit par l'équation

$$\Phi(\alpha) = \int_0^\infty w(\eta)\, e^{-\alpha\eta}\, d\eta$$

et il démontre que la fonction w et la fonction φ qui en dérive peuvent être exprimées à l'aide de Φ.

On a d'abord, par l'inversion de (11)

$$(12) \qquad w(\eta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{L} \Phi(\alpha)\, e^{\alpha\eta}\, d\alpha.$$

Pour obtenir une formule analogue pour $\varphi(x)$, nous remarquerons que dans l'équation (11) on peut remplacer η par une quelconque des variables $\eta_1, \ldots \eta_n$. En multipliant les n équations qu'on obtient ainsi, on trouve

$$(13) \qquad [\Phi(\alpha)]^n = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty w(\eta_1) \ldots w(\eta_n)\, e^{-\alpha x}\, d\eta_1 \ldots d\eta_n,$$

ou bien, en vertu de la formule (8),

$$[\Phi(\alpha)]^n = \int_0^\infty \varphi(x)\, e^{-\alpha x}\, dx,$$

et par inversion

$$\varphi(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(L)} [\Phi(\alpha)]^n\, e^{\alpha x}\, d\alpha.$$

Les formules (9) et (10) deviennent maintenant

$$nY = \frac{C}{2i\pi} \int_0^h \int_L x(h-x)^{p-1} [\Phi(\alpha)]^n\, e^{\alpha x}\, dx\, d\alpha,$$

$$pX = \frac{C}{2i\pi} \int_0^h \int_L (h-x)^p [\Phi(\alpha)]^n\, e^{\alpha x}\, dx\, d\alpha$$

et Poincaré les transforme encore par les substitutions

$$x = n\omega, \qquad h = n\beta, \qquad p = nk,$$

ce qui lui donne

$$nY = \frac{C n^{p+1}}{2i\pi} \int_0^\beta \int_L \frac{\omega}{\beta - \omega} \Theta^n \, d\omega \, d\alpha.$$

$$pX = \frac{C n^{p-1}}{2i\pi} \int_0^\beta \int_L \Theta^n \, d\omega \, d\alpha.$$

où il a posé

$$\Theta = \Phi(\alpha) e^{\alpha\omega} (\beta - \omega)^k.$$

Notons que ω n'est autre chose que l'énergie moyenne d'un seul résonateur pour le cas où l'on aurait

$$\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = \omega,$$

que β est la valeur que prendrait ω si toute l'énergie disponible h se trouvait dans les résonateurs et que k est le rapport entre le nombre des molécules et celui des résonateurs.

Lorsque, dans les applications du calcul des probabilités aux théories moléculaires, on cherche l'état d'un système, qui présente le maximum de probabilité, on trouve toujours que, grâce au nombre immense des molécules, ce maximum est tellement prononcé qu'on peut négliger la probabilité de tous les états qui s'écartent sensiblement de l'état le plus probable. Dans le cas qui nous occupe, il y a quelque chose d'analogue.

Admettons avec Poincaré que, pour des valeurs données de h et de β, la fonction Θ a un maximum pour $\alpha = \alpha_0$, $\omega = \omega_0$ et faisons passer par le point α_0, le lieu du maximum, la ligne L, dont la distance α_r à l'origine pouvait être choisie à volonté. Comme l'exposant n est un nombre très élevé, le maximum de Θ^n est extrêmement prononcé et les seuls éléments des intégrales que nous ayons à prendre en considération, sont ceux qui se trouvent dans le voisinage immédiat de α_0 et de ω_0. Cela nous donne immédiatement pour le rapport cherché

$$\frac{nY}{pX} = \frac{\omega_0}{\beta - \omega_0}$$

et en vertu de l'équation

$$nY + pX = h = n\beta.$$

(13) $$Y = \omega_0,$$

(14) $$X = \frac{\beta - \omega_0}{k}.$$

Pour déterminer les valeurs de α_0 et de ω_0, on peut se servir des équations

$$\frac{d \log \Theta}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{d \log \Theta}{d\omega} = 0,$$

d'où l'on tire

(15) $$\frac{\Phi'(\alpha_0)}{\Phi(\alpha_0)} + \omega_0 = 0$$

et

(16) $$\alpha_0 - \frac{k}{\beta - \omega_0} = 0.$$

On voit par ces formules que α_0 et ω_0 dépendent de la grandeur β, c'est-à-dire de la quantité totale d'énergie h qui a été communiquée au système ; c'est un résultat auquel on devait s'attendre. L'équation (16) nous apprend, en outre, que α_0 sera toujours réel. Cette grandeur détermine immédiatement l'énergie moyenne d'une molécule, car il résulte de (14) et de (16) que

$$X = \frac{1}{\alpha_0}.$$

Or, nous savons que l'énergie moyenne d'une molécule est proportionnelle à la température absolue T. On peut donc écrire

$$\alpha_0 = \frac{c}{T},$$

où c est une constante connue, et l'équation

$$(17) \qquad Y = -\frac{\Phi'(\alpha_0)}{\Phi(\alpha_0)},$$

qu'on tire de (13) et de (15), nous donne l'énergie moyenne d'un résonateur en fonction de la température. On voit que ce résultat est indépendant du rapport entre les nombres n et p.

Supposons maintenant que nous connaissions pour toutes les températures l'énergie moyenne d'un résonateur. Par (17) nous connaîtrons alors pour toutes les valeurs positives de α la dérivée

$$\frac{d \log \Phi(\alpha)}{d\alpha};$$

nous en déduirons $\Phi(\alpha)$ à un facteur constant près. Bien entendu, ces conclusions seront d'abord limitées à des valeurs réelles de α, mais la fonction $\Phi(\alpha)$ est supposée être telle qu'elle est déterminée dans toute l'étendue du demi-plan α dont nous avons parlé, quand elle est donnée en tous les points du demi-axe réel et positif.

Enfin, la formule (12) nous fournira la fonction de probabilité w pour une valeur positive quelconque de η. Il est vrai que le facteur indéterminé de la fonction $\Phi(\alpha)$ se retrouvera en w, mais un tel facteur n'a aucune importance.

On peut donc dire que la probabilité w est entièrement déterminée dès qu'on connaît la distribution de l'énergie *pour toutes les températures*. Il n'y a qu'*une* fonction w pour une distribution qui est donnée en fonction de la température. Par conséquent, les hypothèses que nous avons faites sur w et qui conduisent à la loi de Planck sont les seules qu'on puisse admettre.

Voilà le raisonnement par lequel Poincaré a établi la *nécessité* de l'hypothèse des quanta.

On voit que la conclusion dépend de l'hypothèse que la formule de Planck est une image exacte de la réalité. Cela pourrait être tiré en doute, la formule ne pourrait être qu'approchée. C'est pour cette raison que Poincaré reprend le problème en abandonnant la loi de Planck et en se servant seulement de la rela-

tion que ce physicien a trouvée entre l'énergie d'un résonateur et celle du rayonnement noir. Ce nouvel examen conduit à la conclusion que l'énergie totale du rayonnement sera infinie à moins que l'intégrale

$$\int_0^{\eta_0} w\, d\eta,$$

ne tende *pas* vers zéro avec η_0. La fonction w doit donc présenter au moins *une* discontinuité (pour $\eta = 0$), analogue à celles que donne la théorie des quanta [1].

Sur la polarisation par diffraction (p. 293 et 331). — Les expériences de Gouy et leur interprétation sont exposées et discutées dans les principaux traités d'Optique. H. Poincaré a rappelé le principe de ces expériences et les difficultés de leur interprétation dans la *Théorie mathématique de la lumière* (t. 2, 1892, p. 213-226).

La première solution asymptotique correcte du problème de la diffraction par un écran en forme de biseau a été obtenue par H. Poincaré dans son Mémoire (p. 293). La solution mathématique correcte générale a été développée par :

A. Sommerfeld [*Math. Ann.*, t. **47**, 1896, p. 317 ; *Götting. Nachr.*, 1894, p. 338 et 1895, p. 260 ; *Proc. London Math. Soc.* (1), t. **28**, 1897, p. 395 ; *Zeitschr. Math. Phys.*, t. **46**, 1901, p. 11].

H. S. Carslaw [*Proc. London Math. Soc.*, (1), t. **30**, 1899, p. 121 ; *Proc. Edinb. Math. Soc.*, t. **19**, 1901, p. 71].

H. Lamb [*Proc. London. Math. Soc.*, (1), t. **29**, 1898, p. 523 et (2), t. **4**, 1906, p. 190].

J. H. Mac Donald (*Electric waves*, 1902) a généralisé la théorie de H. Poincaré et donné la première théorie exacte et complète de la diffraction par le biseau.

Les théories de H. Poincaré et de A. Sommerfeld se trouvent exposées notamment dans les Ouvrages de :

G. Wolfsohn (*Handbuch der Physik*, t. **20**, p. 266-277).

P. S. Epstein, *Spezielle Beugungs probleme* (*Enzykl. Math. Wiss.*, t. 53, 1915, p. 488-501).

H. Bateman, *Partial differential equations of Mathematical Physics* (chap. XI : Diffraction problems, p. 476-490).

Ces dernières années, ces problèmes ont été réétudiés par de nombreux auteurs en utilisant la théorie des équations intégrales. Nous citerons notamment les Mémoires de :

---

[1] Ce résultat avait été trouvé par M. P. Ehrenfest, voir *Ann. Physik*, t. 36, 1911, p. 91.

E. T. Copson (*Quarterly J. Math.*, t. **17**, 1946, p. 19; *Proc. Roy. Soc. London*, A **186**, 1946, p. 100-118 et A **202**, 1950, p. 277).

H. Levine et J. Schwinger [*Phys. Rev.*, (2), t. **74**, 1948, p. 958-974 et t. **75**, 1949, p. 1423-1432].

J. W. Miles (*J. Appl. Phys.*, t. **20**, 1949, p. 760-771).

J. C. Bouwkamp (*Thèse*, Groningen, 1941; *Physica*, t. **16**, 1950 p. 1-6; *Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. Amsterdam*, t. **13**, 1950, p. 654-661; *Philips Res. Rep.*, t. **5**, 1950, p. 321-332 et 401-422).

T. B. A. Senior (*Proc. Roy. Soc.*, A **213**, 1952, p. 436-458).

Un exposé modernisé de la théorie de Sommerfeld et des méthodes actuelles d'étude des problèmes de diffraction se trouve dans l'Ouvrage de B. B. Baker et E. T. Copson : *The Mathematical Theory of the Huygens' Principle* (2e édit., Oxford, 1950, chap. IV, p. 124-152).

A propos de la théorie de M. Larmor (p. 369, 383, 395 et 414). — H. Poincaré a exposé et discuté dans cette série de publications une théorie développée par J. Larmor dans les deux premières parties d'une série de publications :

J. Larmor, *A dynamical Theory of the Electric and Luminiferous Medium* [*Proc. Roy. Soc.*, (I), t. **54**, 1893, p. 438-461; (II), t. **58**, 1893, p. 222-228; (III), t. **61**, 1897, p. 272-285; *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A : (I), t. **185**, 1894, p. 719-822; (II), t. **186**, 1895, p. 695-743; (III), 1897, p. 205-300]; *Œuvres* [(I), t. **1**, p. 389-535; (II), t. **1**, p. 536-597; (III), t. **1**, p. 625-672 et t. **2**, p. 11-137].

Dans la quatrième partie d'*Électricité et Optique* [*A propos de la théorie de Larmor* (2e édit., p. 575-632)], H. Poincaré a repris cette discussion en la complétant. Après avoir reproduit ses articles et en harmonisant les notations avec celles du reste de l'Ouvrage, H. Poincaré expose (p. 627-632) la forme définitive que Larmor a donné à sa théorie dans la troisième partie de ses publications en tenant compte des hypothèses de Lorentz combinées avec les siennes propres.

J. Larmor a repris et développé systématiquement avec des additions une partie du contenu de ses Mémoires dans son traité : *Aether and Matter* (Cambridge, 1900). Une *Notice historique* sur ces recherches écrites par J. Larmor et d'importants extraits de l'Ouvrage cité se trouvent dans les Mémoires rassemblés par H. Abraham et P. Langevin publiés sous le titre : *Les quantités élémentaires d'électricité. Ions, Electrons, Corpuscules*, par la Société française de Physique (Collection de Mémoires relatifs à la Physique, 2e série, Paris, 1905, p. 334-361).

La théorie de Lorentz et les expériences de Zeeman (p. 427). — *La théorie de Lorentz et le phénomène de Zeeman* (p. 442). — Le second de ces Mémoires est reproduit par H. Poincaré dans *Electricité et Optique* (2e édit., chap. VIII : Polarisation rotatoire magnétique et phénomène de Zeeman, p. 544-573).

Le raisonnement de H. Poincaré a été critiqué par H. A. Lorentz [*La théorie élémentaire du phénomène de Zeeman. Réponse à une objection de M. Poincaré* (*Arch. Néerl.*, t. 7, 1902, p. 299; *Collected Papers*, V, t. 3, p. 73-90)] qui dit notamment : « Dans un article paru dans l'*Éclairage Électrique*, M. Poincaré arrive à la conclusion que la théorie élémentaire bien connue du phénomène de Zeeman (la théorie dans laquelle on suppose que chaque molécule lumineuse contient un ou plusieurs électrons mobiles, pouvant vibrer indépendamment les uns des autres) peut bien rendre compte de l'observation d'un doublet dans la direction des lignes de force, mais est incapable d'expliquer le triplet que l'on observe perpendiculairement à cette direction. Il arrive à ce résultat non en traitant directement l'émission, mais en considérant l'absorption dans le champ magnétique et il est remarquable que ce même procédé ait conduit antérieurement M. Voigt (*Göttingen Nachrichten*, 1898, p. 329) à des équations d'où l'on déduit l'existence du triplet. Il me semble que l'on doit chercher la cause de ce désaccord dans le fait que dans l'équation (6) à la page 8 (ce tome p. 448), M. Poincaré omet à tort le terme $\varepsilon_k \alpha \frac{dL_k}{dt}$ ... ».

Alors que l'effet Zeeman normal peut s'interpréter par la théorie classique, la théorie des effets Zeeman anomaux qui exige l'intervention de la notion de spin n'a pu être développée qu'avec les progrès de la Mécanique ondulatoire.

La théorie classique de l'effet Zeeman est exposée notamment dans les Ouvrages de H. A. Lorentz [*The Theory of Electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat* (Conférences faites à Columbia University en avril 1906, 2e édit., Leipzig, 1916, chap. III, p. 98-131) et *Theorie der Magneto-optischen phänomene* (*Enzykl. Math. Wiss.*, t. V, 22, p. 199-281)] et par R. Becker (*Théorie des électrons*, § 16, p. 99-106).

La théorie quantique de l'effet Zeeman est exposée dans les Ouvrages suivants :

E. Back et A. Landé, *Zeeman Effekt und Multiplettstruktur der Spektrallinien* Berlin, Springer édit., 1925.

A. Landé (*Handbuch der Phys.*, t. 21; *Licht und Materie*, chap. VII, p. 360-388).

E. U. Condon et G. H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra* (Cambridge, 1935, chap. XVI, p. 378-396).

Le phénomène de Hall et la théorie de Lorentz (p. 461). — La théorie classique de l'effet Hall est exposée dans les Ouvrages de R. Becker (*Théorie des électrons*, § 37, p. 236-240) et de W. Gerlach (*Handbuch der Physik*, t. 13, p. 228-262, ch. VI : Die Galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte in die Elektronenleitern).

Les résultats expérimentaux ont montré de nombreuses incompatibilités avec les résultats déduits de l'hypothèse des électrons libres et n'ont pu être interprétés que par les théories quantiques.

La théorie quantique de l'effet Hall a été développée par A. Sommerfeld dans le cas où les mouvements électroniques sont régis par la statistique de Fermi-Dirac.

Zeits. Physik, t. 47, 1928, p. 50-60). Les calculs de A. Sommerfeld sont résumés dans l'Ouvrage de M. Léon BRILLOUIN : *Les statistiques quantiques et leurs applications* (2ᵉ édit., t. 2, 1930, p. 234.)

La théorie de Lorentz et le principe de réaction (p. 464). — La validité et les conditions de l'application du principe de réaction en Électrodynamique ont fait l'objet de nombreux travaux.

Les résultats de H. Poincaré ont été examinés et discutés, notamment par :

MAX ABRAHAM, *Prinzipien der Dynamik des Elektrons* (*Ann. Physik*, 4ᵉ série, t. 10, 1903, p. 105-179; *Gottingen Nachr.*, 1902, p. 20). [Mémoire traduit de l'allemand par Paul LANGEVIN et inséré dans : H. ABRAHAM et P. LANGEVIN, *Les quantités élémentaires d'électricité. Ions. Électrons. Corpuscules* (Collection de Mémoires relatifs à la Physique, publiés par la Société française de Physique, 2ᵉ série, Paris, 1905, p. 1-48)].

M. PLANCK, *Bemerkung zum Prinzip der Aktion und Reaktion in der allgemeinen Dynamik* (*Physik Zeitschs.*, t. 9, 1908, p. 828 et *Verh. Deutsch. Phys. Ges.*, t. 6, 1908, p. 728).

H. A. LORENTZ (*Enzykl. Math. Wiss.*, t. 5, 14; *Elektronentheorie*, 1903, § 7, p. 162).

F. ZERNER (*Handbuch der Physik*, t. 12, Berlin, 1927, *Die Elektronentheorie*, § 17, p. 175-177 : Le principe de réaction).

R. BECKER, *Théorie des électrons*, 1933. (Traduction E. LABIN, Paris, Alcan, 1938 ; § 7, p. 40-44 : Théorèmes de l'énergie et de la quantité de mouvement dans la théorie électronique.)

M. VON LAUE, *La théorie de la relativité*. (Traduction G. LÉTANG, Paris, Gauthier-Villars, 1924 ; t. 1, p. 14-15 et 114-129.)

La transformation précisée par Poincaré dans ce Mémoire pour définir la synchronisation des horloges par échange de signaux lumineux dans un changement de système de référence $t' = t - \frac{vx}{V^2}$ a été reprise plus tard par A. Einstein pour l'introduction de la notion de temps local [*voir* H. THIRRING (*Handbuch der Physik*, t. 12, p. 270)].

Sur la dynamique de l'électron (p. 489 et 494). — Ces deux articles, ainsi que le texte d'une Conférence de H. Poincaré au Congrès de Lille en 1909 de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences ont été rassemblés et publiés sous le titre : *La Mécanique nouvelle. Conférence, Mémoire et Note sur la Théorie de la Relativité*, avec une introduction de M. Edouard GUILLAUME (Paris, Gauthier-Villars, 1912).

Dans ces Mémoires, H. Poincaré a donné les relations fondamentales de la Mécanique de la relativité restreinte. W. PAULI (*Enzykl. Math. Wiss.*, t. 5, p. 545) présente comme bases de cette théorie l'article de H. A. LORENTZ : *Electromagnetic*

phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light (*Proc. Amsterdam*, 1904, p. 899) [Mémoires réunis par H. Abraham et P. Langevin, *Les quantités élémentaires d'électricité. Ions. Électrons. Corpuscules* (trad. franç. de P. Langevin, p. 477-499)] et les deux Mémoires de H. Poincaré, le célèbre Mémoire de A. Einstein : *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (*Ann. Physik*, t. **17**, 1905, p. 891) n'apportant rien de plus au point de vue mathématique que les publications de H. A. Lorentz et de H. Poincaré. De même, H. Thirring (*Handbuch der Physik*, t. **12**, p. 264) présente les idées fondamentales de la Mécanique relativiste comme introduites simultanément par H. Poincaré et A. Einstein.

Dans ces deux articles, H. Poincaré a introduit les dénominations « transformations de Lorentz » et « groupe de Lorentz » pour les transformations laissant invariantes les équations d'évolution du champ électromagnétique dans un changement de système de référence.

D'après M. von Laue (*La théorie de la relativité*, t. **1**, trad. G. Létang, Paris, 1924), les formules mathématiques de la transformation de Lorentz et la démonstration de l'invariance de l'équation des ondes par cette transformation se trouvent d'abord dans un Mémoire de W. Voigt sur le principe de Döppler (*Göttingen Nachr.*, 1887, p. 41 ; réimprimé, *Phys. Zeitschr.*, t. **16**, 1915, p. 381), puis avec leur relation explicite avec la théorie de la relativité dans l'article de H. A. Lorentz (*Proc. Amst.*, 1904, p. 809) [réimprimé dans l'Ouvrage : H. A. Lorentz, A. Einstein et H. Minkowski, *Das Relativitätsprinzip* (Leipzig et Berlin, 1913)].

La nécessité d'introduire, pour justifier la stabilité de l'électron, les tensions ou pressions internes considérées par H. Poincaré (dénommées depuis pressions de Poincaré) a fait l'objet de très nombreuses discussions et l'origine physique de ces tensions n'est pas encore complètement éclaircie (*voir* notamment : H. A. Lorentz, *The theory of Electrons*, p. 215 ; W. Pauli, *Enzykl. der Math. Wiss.*, t. **519**, p. 752 ; F. Zerner, *Handbuch der Physik*, t. **12**, p. 215 ; Von Laue, *La théorie de la relativité*, t. **1**, § **28** et **29**, p. 240-254).

H. Poincaré a introduit dans son Mémoire la substitution $y_4 = ix_4$ pour obtenir un ds^2 de la forme

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 - dy_4^2$$

Cette substitution est généralement attribuée à H. Minkowski (*Göttingen Nachr.*, 1908, p. 53) qui l'a utilisée systématiquement, bien que W. Pauli (*Enzykl.*, t. **519** ; *Relativitätstheorie*, p. 567, note n° **54**) et H. Thirring (*Handbuch der Physik*, t. **12**, p. 283) signalent l'antériorité de H. Poincaré.

La considération de la Mécanique relativiste dans la théorie de la gravitation proposée par H. Poincaré a été l'origine de nombreux Mémoires dont l'aboutissement a été la théorie de la relativité générale.

On en trouvera une discussion et une bibliographie dans le traité de M. von Laue (*La théorie de la relativité*, t. **2**, § **2**, p. 15-20 et bibliographie, p. 313-315). Nous citerons seulement les importants travaux de H. Minkowski, M. Abraham, G. Mie, G. Nordstrom, A. Einstein et A. D. Fokker, et le Mémoire fondamental de A. Einstein, *Ueber die specielle und die allgemeine Relativitätstheorie* (*Ann. Physik*, t. **49**, 1916, p. 769).

La dynamique de l'électron (p. 551). — Dans cet article, H. Poincaré examine notamment parmi les causes possibles de la gravitation l'hypothèse d'une origine corpusculaire des forces de gravitation discutée par G. H. Darwin [*The Analogy between Lesage's Theory of gravitation and the repulsion of light* (*Proceed. Roy. Soc.*, A 76, 1905, p. 387-410, *Scientific Papers*, t. IV, p. 446-469)]. Cette hypothèse abandonnée devant les résultats apportés par la théorie de la relativité générale a été reprise ces dernières années, notamment par M. Fierz et W. Pauli (*Proc. Roy. Soc.*, A, t. **173**, 1939, p. 211) et par les physiciens de l'Institut Henri Poincaré. M. Louis de Broglie a exposé cette nouvelle théorie corpusculaire de la gravitation dans son Ouvrage : *Théorie générale des particules à spin* (*méthode de fusion*) (Gauthier-Villars, Paris, 1943).

Réflexions sur la théorie cinétique des gaz (p. 587). — J. Kroo [*Ueber den Fundamentalsatz der statistischen Mechanik* (*Ann. Physik.*, t. **34**, 1911, p. 907)] a considéré l'analyse du problème réduit donnée par H. Poincaré comme n'étant pas à l'abri de toute objection et a repris l'étude de la dissipation d'une répartition non stationnaire de densité dans l'espace des phases (Mémoire analysé dans l'*Encycl. des Sc. Math.*, édit. française, t. IV_2 : Mécanique statistique, exposé d'après P. et T. Ehrenfest par E. Borel, 1[er] suppl., § 27, p. 258-259).

Le travail de J. Kroo a été discuté par L. Silberstein [*Ann. Physik*, (4), t. **37**, 1912, p. 386].

Sur la théorie des quanta (p. 620 et 626). — *L'hypothèse des quanta* (p. 654). — Ces articles ont été rédigés à la suite du premier Congrès de Physique Solvay tenu à Bruxelles du 30 octobre au 3 novembre 1911. Le Compte rendu des séances en a été publié sous le titre : *La théorie du rayonnement et les quanta*. Rapports et discussions de la réunion tenue à Bruxelles du 30 octobre au 3 novembre 1911 sous les auspices de M. E. Solvay, publiés par MM. P. Langevin et Maurice de Broglie (Gauthier-Villars, Paris, 1912).

Des remarques et Notes de M. H. Poincaré figurent dans les discussions des rapports de M. H. A. Lorentz (*Sur l'application au rayonnement du théorème de l'équipartition de l'énergie*), de M. Max Planck (*La loi du rayonnement noir et l'hypothèse des quantités élémentaires d'action*), de M. A. Sommerfeld (*Application de la théorie de l'élément d'action aux phénomènes moléculaires non périodiques*), de M. A. Einstein (*L'état actuel du problème des chaleurs spécifiques*) et dans les conclusions générales.

M. Maurice de Broglie dans un Ouvrage récent : *Les premiers Congrès de Physique Solvay et l'orientation de la Physique depuis* 1911 (Cahiers de la collection *Sciences d'Aujourd'hui*, dirigés par André George, Albin Michel, Paris, 1951) a retracé l'atmosphère de ces séances. On trouvera dans cet Ouvrage les portraits des membres de ce congrès et notamment (planche XXIX) un portrait de H. Poincaré et (planche XXX) la reproduction de l'autographe d'une remarque de H. Poincaré.

Ces Mémoires ont été examinés par M. E. Borel [2e suppl. à l'article de P. et T. Ehrenfest (*Encycl. des Sc. Math.*, édit. franç., t. IV$_2$, p. 284-285)] qui donne une abondante bibliographie des travaux rattachés à cette question.

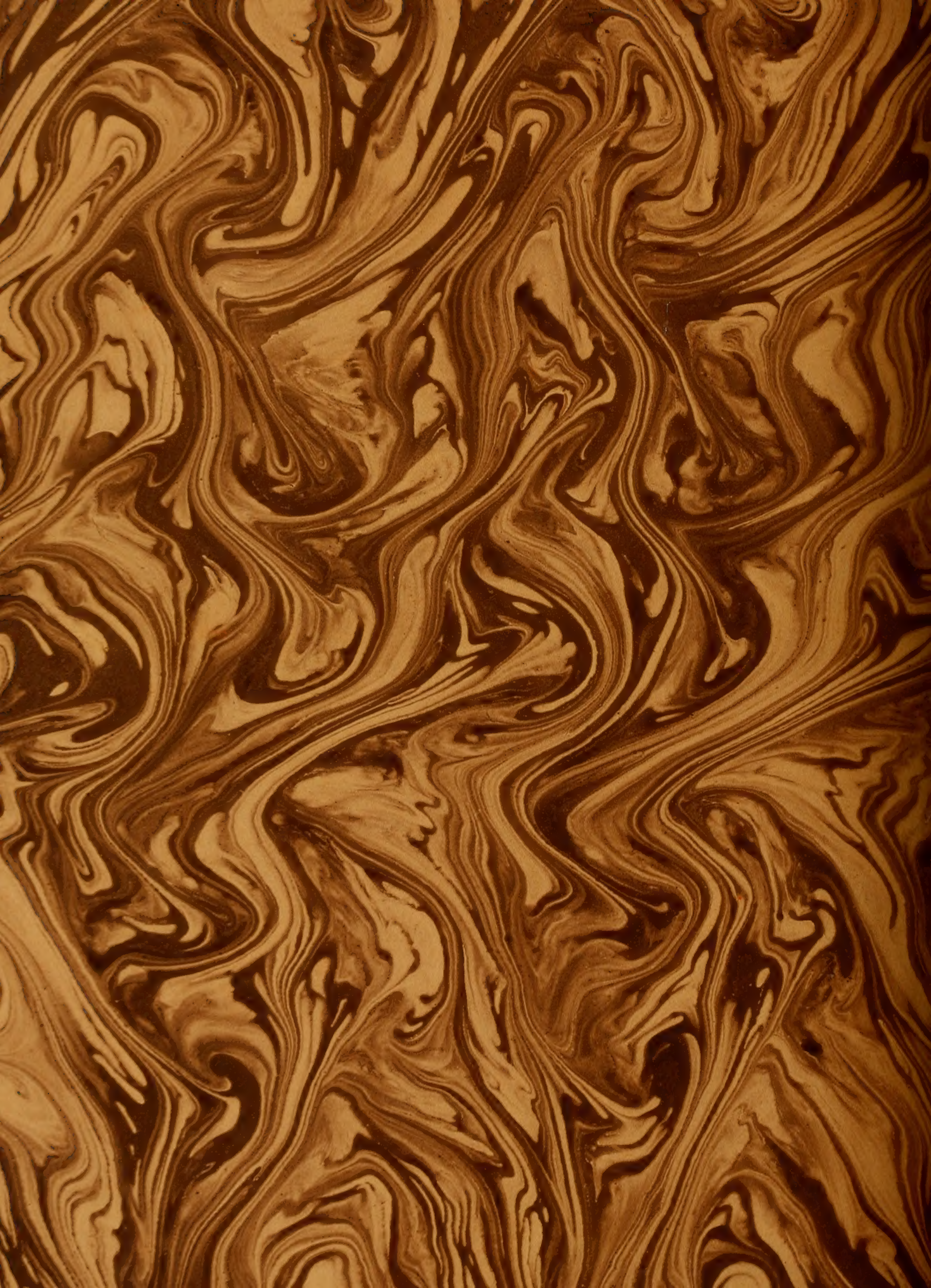
M. Planck, *Henri Poincaré und die quantentheorie* (*Acta Mathematica*, t. 38, p. 388-397) a analysé également ces Mémoires et discuté les objections élevées par H. Poincaré à sa seconde théorie.

Le raisonnement de H. Poincaré, modernisé, simplifié et rendu plus rigoureux est développé dans l'Ouvrage de R. H. Fowler, *Statistical Mechanics* (1re édit., Cambridge, 1929, p. 134-137).

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME IX.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, 55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS.
Dépôt légal imprimeur, 1954, n° 895. — Dépôt légal éditeur, 1954, n° 522.
Achevé d'imprimer le 20 janvier 1954.




Stechert-Hafner, Inc.
31 East 10TH Street